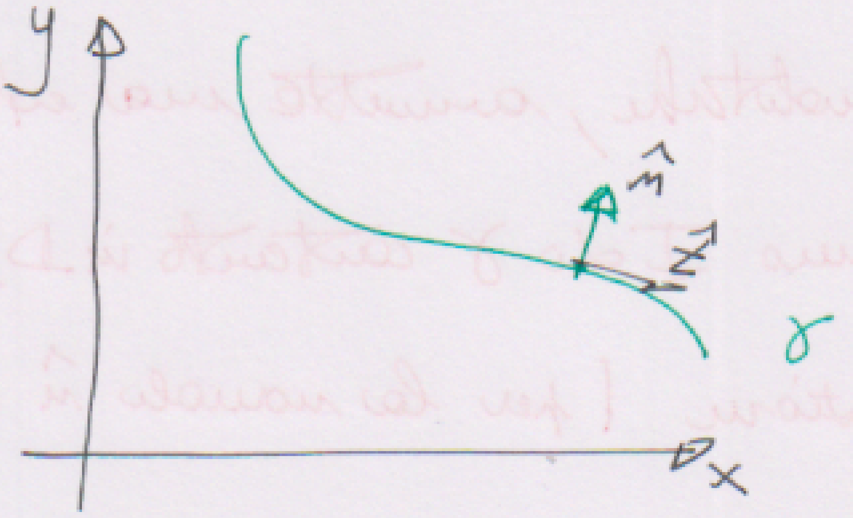
Teorema di Cauchy-Kovalevskaya (caso $\mathbb{R}^2$)

Consideriamo il problema generale dell'esistenza di soluzioni di un'eq. II ordine generica

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + f(x,y)u + g(x,y) = 0 \qquad (1)$$

In cui le c.c. sono date lungo una curva



$$u\big|_\gamma = \varphi$$

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}\bigg|_\gamma = \psi$$

Come visto nel caso del metodo di Riemann, fissare u e la sua derivata normale lungo una curva, equivale ad assegnare le derivate parziali $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_\gamma$, $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_\gamma$

Detti $\hat{t} = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y$

$\hat{n} = \beta \vec{e}_x - \alpha \vec{e}_y$

$$\frac{du}{ds} = \hat{t}\,\nabla u = \alpha \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_\gamma + \beta \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_\gamma = \dot{\varphi} \qquad (2)$$

↳ parametro d'arco

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = \hat{n}\cdot\vec{\nabla} u = \beta \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\gamma} - \alpha \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\gamma(s)} = \psi(s) \quad (3)$$

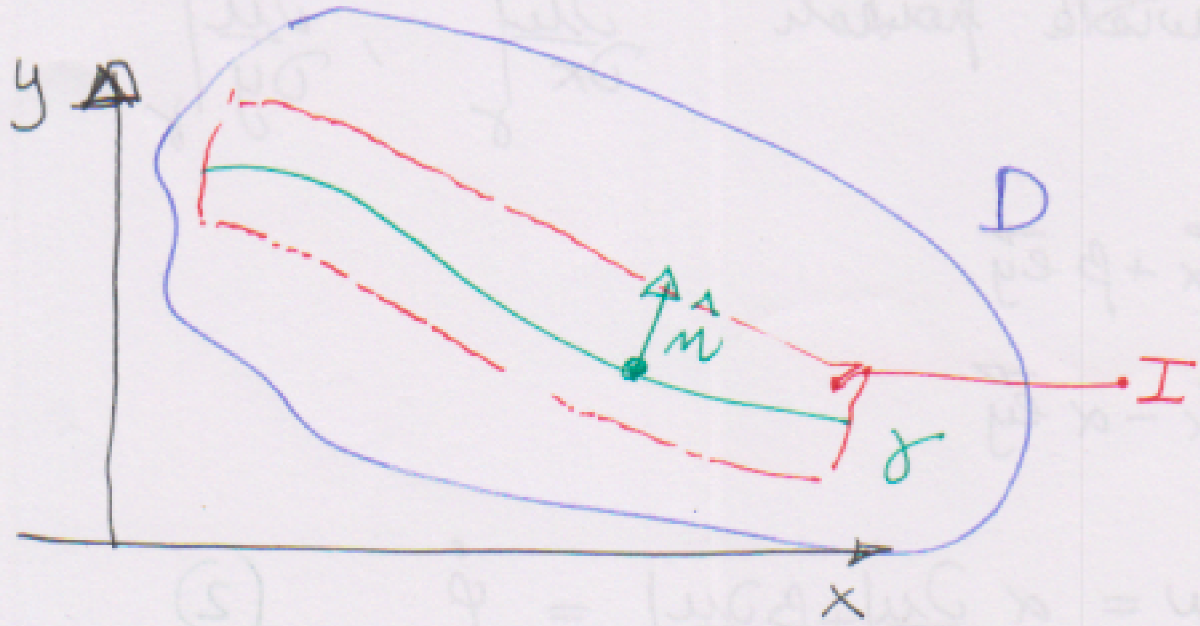
Th C-K: Siano i coeff. $a, b, \dots g$ funzioni analitiche in un dominio $D \subset \gamma$, con γ analitica. Il problema di Cauchy (1) con cond. al contorno

$$\begin{cases} u = \varphi & \text{per } (x,y) \in \gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = \psi & \text{per } (x,y) \in \gamma \end{cases}$$

con φ, ψ funzioni date analitiche, ammette una ed una sola soluzione in un intorno I di γ contenuto in D, purchè valga la seguente condizione (per la normale $\hat{n}$ in γ)

$$\hat{n}\cdot(A\,\hat{n}) \neq 0$$

con $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

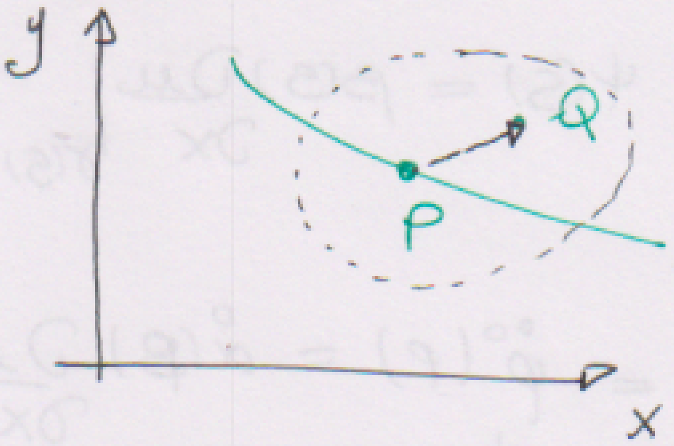


Esistenza locale di soluzione

sottomessa però ad una condizione per la normale alla curva (legata sia all'eq. diff. che all'orientamento della curva)

IDEA della dimostrazione.

Si sfrutta l'elevata regolarità dei coeff. e dei termini noti per sviluppare la soluzione in serie nell'intorno di un punto di γ per valutare il valore della soluzione all'interno del dominio. Difficoltà: ricavare TUTTI i coeff. dell'espansione della solut. sulla base dei dati noti e dimostrare la convergenza dell'espansione.



Utilizziamo lo sv. Taylor per trovare $u(Q)$ con $Q \in U_P$

$$u(Q) = u(P) + \vec{\nabla} u\Big|_P \cdot (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) +$$

$$+ (\vec{r}_Q - \vec{r}_P)^T H(P) (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) + o(|\vec{r}_Q - \vec{r}_P|^2)$$

poniamo $\vec{r}_Q - \vec{r}_P = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y$

$$\underbrace{u(x',y') = \underset{\varphi(P)}{\underset{\Downarrow}{u(P)}} + \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_P x' + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_P y'}_{\text{Termini noti}} +$$

$$+ \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x}\Big|_P & \frac{\partial u}{\partial x \partial y}\Big|_P \\ \frac{\partial u}{\partial x \partial y}\Big|_P & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + o(|x'^2+y'^2|)$$

ricaviamo il valore delle der. seconde in P

Deriviamo (2), (3) rispetto a s

$$\frac{du}{ds} = \mathring{\varphi}(s) = \alpha(s) \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\gamma(s)} + \beta \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\gamma(s)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = \psi(s) = \beta(s) \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\gamma(s)} - \alpha(s) \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\gamma(s)}$$

$$\frac{d^2 u}{ds}\Big|_P = \underset{\text{NOTO}}{\underset{\Downarrow}{\mathring{\mathring{\varphi}}(P)}} = \underbrace{\mathring{\alpha}(\beta) \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_P + \mathring{\beta} \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_P}_{\text{NOTO}} +$$

$$+ \underset{\text{noto}}{\underset{\Downarrow}{\alpha(P)}} \frac{d}{ds} \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{s=P} + \underset{\text{noto}}{\underset{\Downarrow}{\beta(P)}} \frac{d}{ds} \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{s=P}$$

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial u}{\partial x} = \underset{\mathring{s}}{\overset{\hat{}}{\underset{\parallel}{t}}} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \underset{\alpha}{\underset{\parallel}{t_x}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \underset{\beta}{\underset{\parallel}{t_y}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{s=p} = \alpha(p)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_p + \beta(p)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|_p$$

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_p = \alpha(p)\frac{\partial u^3}{\partial x \partial y}\Big|_p + \beta(p)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_p$$

abbiamo ottenuto

$$\boxed{\alpha^2(p)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\big(\alpha(p)\beta(p)\big)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|_p + \beta^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = A}$$

$$A(p) = \ddot{\varphi}(p) - \dot{\alpha}(p)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_p - \dot{\beta}(p)\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_p$$

Nel caso $\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}$

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}\Big|_p = \dot{\varphi}(p) = \dot{\beta}(s)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_p - \dot{\alpha}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_p +$$

$$+\beta(\beta)\frac{d}{ds}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_p - \alpha(p)\frac{d}{ds}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_p =$$

$$= \beta(p)\alpha(p)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta^2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \alpha\beta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\boxed{\alpha(p)\beta(p)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\beta^2 - \alpha^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \alpha(p)\beta(p)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = B}$$

$$B = \dot{\varphi}(p) - \dot{\beta}(\beta)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_p + \dot{\alpha}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_p$$

Come 3ª equazione per determinare le 3 der. parz. di u in P considero la (1)

$$a(P)\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_P + 2b(P)\left.\frac{\partial u}{\partial x\partial y}\right|_P + c(P)\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_P = C(P)$$

$$C(P) = -d(P)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P - e\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P - f(P)\varphi(P) + g(P)$$

Ho ottenuto il sist. lineare

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & 2b & c \\ \alpha^2 & 2\alpha\beta & \beta^2 \\ \alpha\beta & (\beta^2-\alpha^2) & -\alpha\beta \end{pmatrix}}_{\text{invertibile!}}^{=\underline{\underline{M}}} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ A \\ B \end{pmatrix}$$

usando $\alpha^2+\beta^2=1$

$$-\det M = (\beta \quad -\alpha)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \hat{n}^+(A\,n)$$

quindi se $\hat{n}^+(A\hat{n}) \neq 0$ le derivate seconde di u sono esprimibili in termini dei dati assegnati in P

Si verifica che procedendo allo stesso maniera si possono ricavare tutte le derivate successive (schema ricorsivo della dimostrazione) ed in principio determinare tutti i termini dello sv. in serie Taylor di u in ogni punto della curva γ. Poiché, per costruzione, u soddisfa il prob. di Cauchy, una volta dimostrata la convergenza della serie si dimostra l'esistenza (e unicità) in un intorno della curva.

Interpretazione del risultato: condizione $\hat{n}^{+}(\underline{A}\hat{n})\neq 0$

La condizione $\hat{n}^{+} A\hat{n} = 0$

$\underline{A}$ è una mat. simmetrica, ha 2 autovalori reali $\underbrace{}_{\lambda_1, \lambda_2}$ cui corrisp.

2 autovettori ortogonali $\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2$

Se esprimiamo $\hat{n}$ sulla base $\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2$

$$\hat{n} = \alpha_1 \hat{\vartheta}_1 + \alpha_2 \hat{\vartheta}_2$$

$$\underline{A}\hat{n} = \alpha_1 A\hat{\vartheta}_1 + \alpha_2 A\hat{\vartheta}_2 = \alpha_1\lambda_1 \hat{\vartheta}_1 + \alpha_2\lambda_2 \hat{\vartheta}_2$$

$$\hat{n}^{+}(\underline{A}\hat{n}) = \langle \hat{n}, \underline{A}\hat{n} \rangle = \langle \alpha_1 \hat{\vartheta}_1 + \alpha_2 \hat{\vartheta}_2, \alpha_1\lambda_1 \hat{\vartheta}_1 + \alpha_2\lambda_2 \hat{\vartheta}_2 \rangle$$

$$= \alpha_1^2 \lambda_1 + \alpha_2^2 \lambda_2$$

La matrice A è la matrice dei coefficienti della parte principale dell'equazione

$-\det A = b^2 - ac \Rightarrow$ invariante dell'equazione

$\boxed{\text{Eq. Ellittica}}$ $b^2 - ac < 0 \Rightarrow \det A > 0$

$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1$ e λ_2 hanno lo stesso segno

$\Rightarrow \quad \lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2 \neq 0$ sempre

$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$

$\Rightarrow$ per le eq. ellittiche la cond. $\hat{n}^+ \cdot \underline{A} \hat{n}$ non è <u>mai</u> verificata $\Rightarrow$ ho <u>sempre</u> soluzioni locali attorno a γ

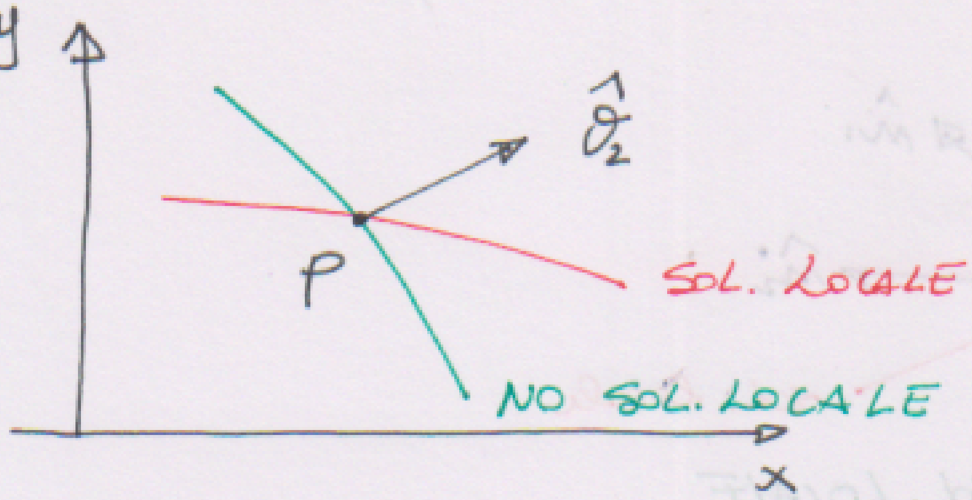
$\boxed{\text{Eq. Parabolica}}$ $b^2 - ac = 0 \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 = 0$

un autovalore è nullo (non è possibile entrambi altrimenti A sarebbe la matrice nulla)

$\lambda_2 = 0 \Rightarrow \hat{n}^+ (A n) = \lambda_1 \alpha_1^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

poichè $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 1 \Rightarrow \hat{n} = \hat{\theta}_2$

Conclusione: nel caso parabolico esiste una direzione (l'autov. di A) t.c. se si sceglie una curva γ ortogonale in cui si fornisci valori al contorno $\Rightarrow$ il prob. di Cauchy è mal posto.



$\boxed{\text{Caso iperbolico}}$

$$b^2 - ac > 0 \Rightarrow \det A < 0 \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 < 0$$

$\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ con segno opposto

Condiz. Cauchy Kow.

$$\hat{n}^T (\underline{\bar{A}} \hat{n}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 \alpha_1^2 = -\lambda_2 \alpha_2^2$$

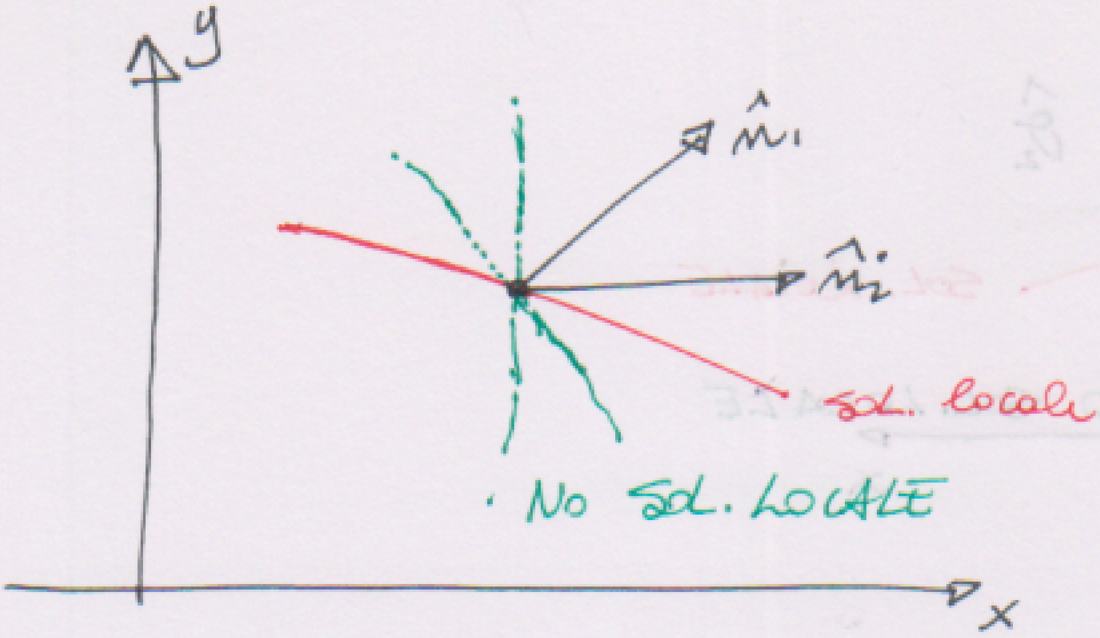
$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0 \Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \pm \sqrt{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \pm \sqrt{\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|} \doteq \pm x$$

Quindi $\hat{n}_1 = \alpha_2 (+ x \hat{\vartheta}_1 + \hat{\vartheta}_2)$

$\hat{n}_2 = \alpha_2 (- x \hat{\vartheta}_1 + \hat{\vartheta}_2)$

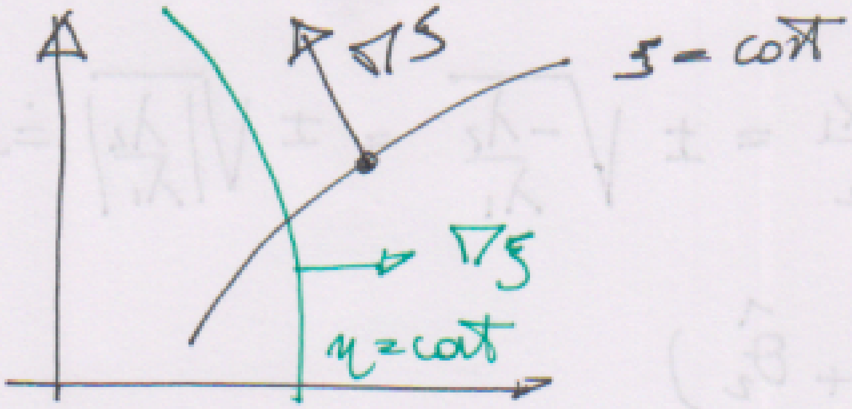
Sono 2 direz. per cui il Th di Cauchy-Kov. non vale.

Conclusione : Nel caso iperbolico, in ogni punto del piano esistono sempre 2 soluzioni cui la curva di valori al contorno non può essere ortogonale per avere garanzie di esistenza locale di soluzione.



Legame con le caratt. di un'eq. II ordine

Per poter ridurre un'equazione nella sua forma canonica abbiamo fatto uso del concetto di caratteristica per determinare il cambio di variabili opportuno.



$$\vec{\nabla}\xi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y}\xi \end{pmatrix}$$

Ricordiamo la formula che permette di calcolare i coeff. di termini con le der. seconde dell'equazione trasformata

$$A = a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} \end{pmatrix}$$

se prendiamo $\hat{n} = \nabla \xi$ ritroviamo esattamente la cond. C.-K.

Analogo per il termine $C = \nabla \eta^T M \nabla \eta$

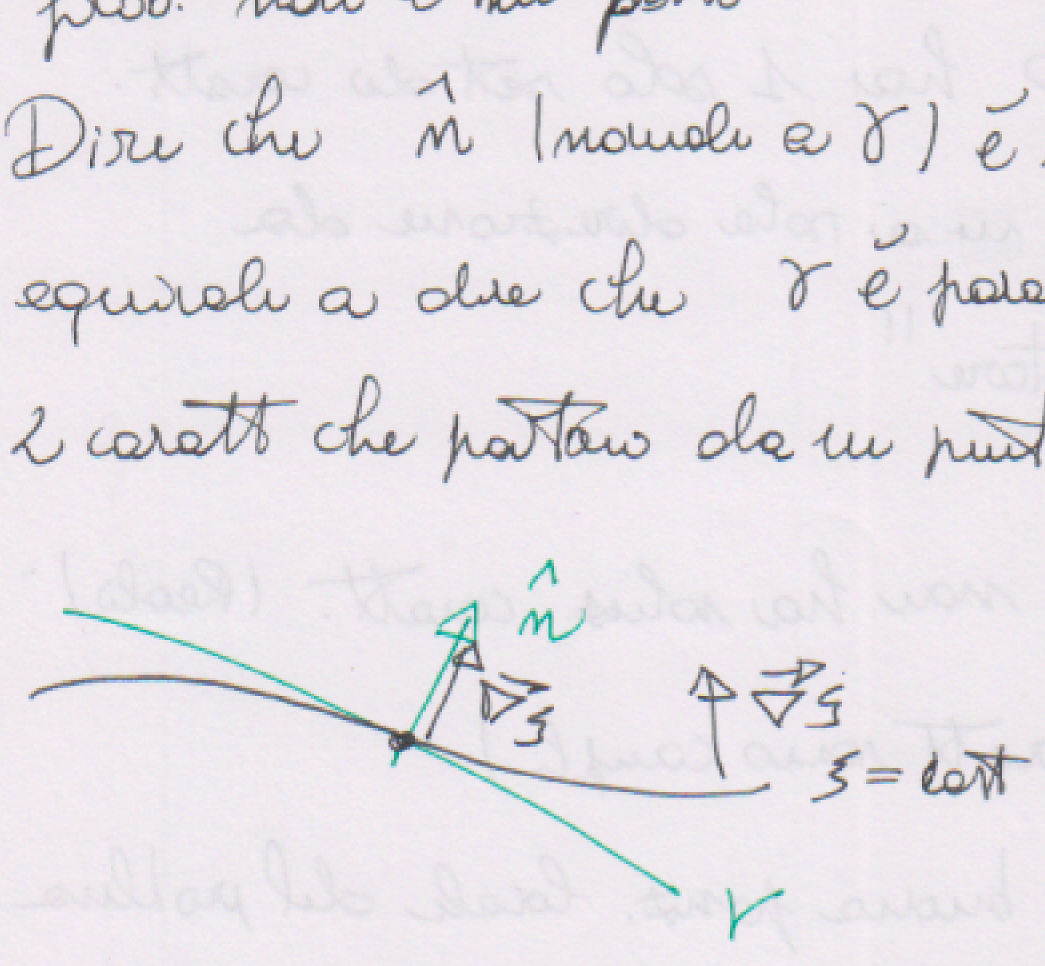
Trovare una soluzione dell'equazione $A = 0$ $(C=0)$ equivale a trovare una direzione $\hat{n} = \nabla \xi$ $(\hat{n} = \nabla \eta)$ per cui la cond. C-K è soddisfatta (ovvero il problema non è ben posto

Caso Iperbolico : $A=0$ ha 2 solut. indipendenti (2 fasci caratteristici)

$\Rightarrow \exists$ 2 direzioni $\hat{n}_1 = \nabla \xi$ $\hat{n}_2 = \nabla \eta$ t.c.

Se la normale di γ è diretta come $\hat{n}_1$ o $\hat{n}_2$ il prob. non è ben posto

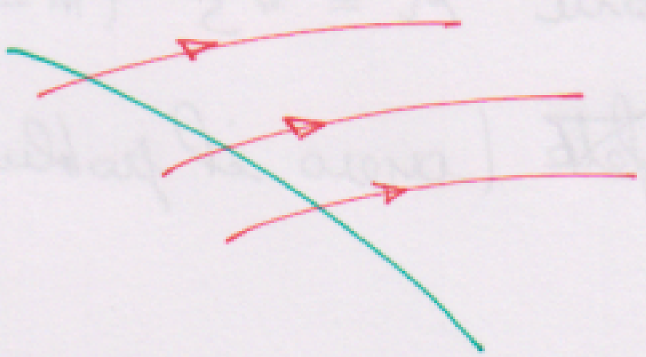
Dire che $\hat{n}$ (normale a γ) è parallela a $\nabla \xi$ o $\nabla \eta$ equivale a dire che γ è parallela ad una delle 2 caratt che partono da un punto



$\Rightarrow$ problema di buona posizione

Questa condizione equivale a chiedere che le caratteristiche uscenti dalla curva γ in cui sono i dati al bordo **non** siano parallele alla curva stessa: CONDIZIONE di TRASVERSALITA'

del metodo alle caratteristiche



le caratt. devono "uscire" dalla sup. in cui assegno i valori al bordo.

Abbiamo la conferma che nel caso iperbolico esistono dei vincoli (2 condizioni di trasversalità delle caratt.) che devono essere ~~soddisfatte~~ affinchè il prob. abbia una soluzione.

Caso Parabolico: $A=0$ ha 1 solo set di caratt. ovvero una sola direzione da "evitare"

Caso Ellittico $A=0$ non ha soluz. caratt. (Reali) (le caratt sono compl.)

Th C-K assicura la buona posiz. locale del problema

Considerazioni Finali

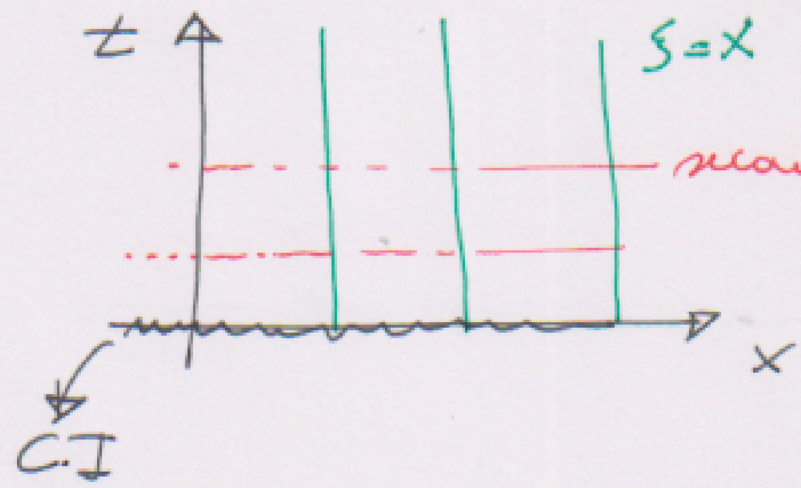
Eq. Poisson (Laplace) (Ellittica)

Abbiamo studiato e trovato soluzioni in forma chiusa relative a problemi posti in domini limitati da superfici attraverso su cui passano le C.C.

Ragionevole, la forma del bordo del dominio non influenza la buona posiz. del problema.

Eq. Calore (Parabolica)

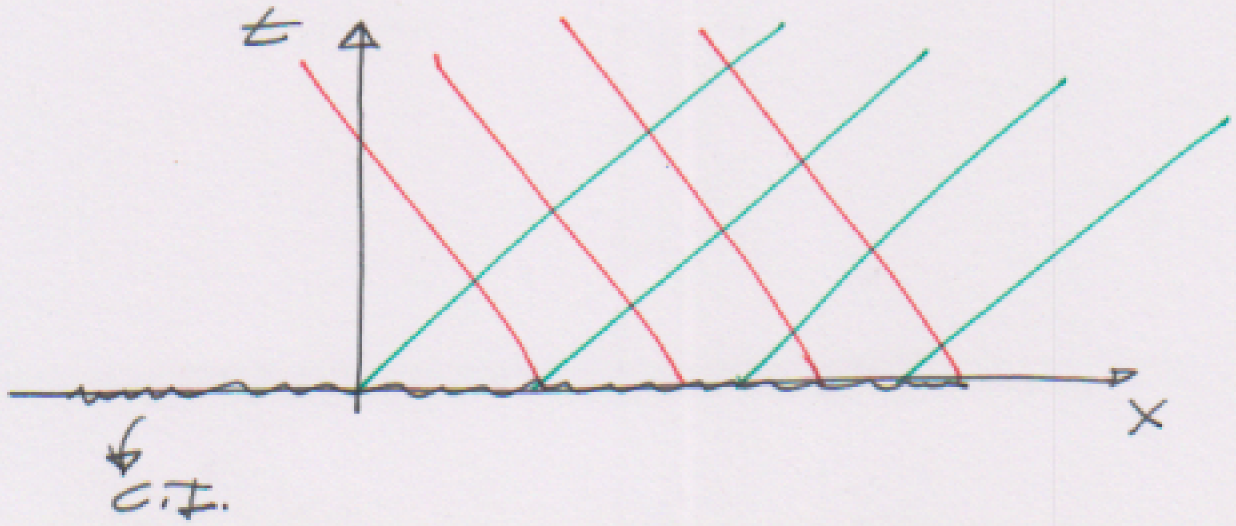
Abbiamo considerato sempre problemi in un dominio tipo



NOTA: per confrontare con esempio svolto $y \to x$ e $b=0$
$x \to t$

Eq. Onde (Iperb.)

Anche in questo caso ci siamo limitati a domini



Caratt. Trasversali a C.C.