# CURVATURA DI UNA CONNESSIONE

Sia $\nabla$ una connessione sul fibrato vettoriale $E \xrightarrow{\pi_E} M$

sappiamo che $\nabla : \Omega^0(E) \longrightarrow \Omega^1(E)$ soddisfa $\nabla(fs) = df\, s + f \nabla s$

possiamo estendere $\nabla$ a un operatore

$$\nabla : \Omega^p(E) \longrightarrow \Omega^{p+1}(E)$$

$$\nabla(s\varphi) = \nabla s \wedge \varphi + s\, d\varphi$$

la curvatura $R$ della connessione $\nabla$ è data da $\boxed{R = \nabla^2}$

$$R : \Omega^0(E) \longrightarrow \Omega^2(E)$$

**NOTA**: $R$, a differenza di $\nabla$, è $C^\infty(M)$-lineare:

$$\boxed{R(sf)} = \nabla(\nabla(sf)) = \nabla(\nabla s \cdot f + s\,df)$$

nota $\nabla s \in \Omega^1(E)$ ossia $\nabla s = s\alpha$, con $\alpha \in \Omega^1(M)$

$$= \nabla(s \cdot \alpha f + s\,df) =$$

$$= \nabla s \wedge (\alpha f) + s\,d(\alpha f) + \nabla s \wedge df + s\,\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{d^2 f} =$$

$$= \nabla s \wedge (\alpha f) + s\,(d\alpha \cdot f - \alpha\,df) + \nabla s \wedge df =$$

$$= \nabla s \wedge (\alpha f) + s\,(d\alpha \cdot f) \underbrace{- \overset{\nabla s}{s\alpha}\,df + \nabla s \wedge df}_{\overset{\shortparallel}{0}} =$$

$$= f\,\nabla^2 s = \boxed{f\,R(s).}$$

∎

Dunque $R(s) = \nabla^2 s$ dipende solo dal valore di $s$ puntualmente (e non in un intorno).

ossia, $\forall\ x \in M$

$$\nabla^2 : T_xM \times T_xM \times E_x \longrightarrow E_x$$

definisce una 2-forma a valori in $End(E)$.

Localmente:

$$\nabla s_i = \sum_{j=1}^{k} s_j \, \omega_{ji}$$

$$\nabla^2 s_i = \sum_{j=1}^{k} \left( \nabla s_j \wedge \omega_{ji} + s_j \, d\omega_{ji} \right) =$$

$$= \sum_{j}^{k} \left( \sum_{\ell} s_\ell \, \omega_{\ell j} \wedge \omega_{ji} + s_j \, d\omega_{ji} \right) =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{k} s_\ell \underbrace{\left( \sum_{j=1}^{k} \omega_{\ell j} \wedge \omega_{ji} + d\omega_{\ell i} \right)}_{\Omega_{\ell i} \in \Omega^2(M)}$$

$$\nabla^2 s = s \, \Omega$$

dove $\boxed{\Omega = \omega \wedge \omega + d\omega}$

$$\boxed{\Omega = \omega \wedge \omega + d\omega}$$

matrice di 2-forme locali

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{curvatura}}$

matrice di 1-forme locali

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{connessione}}$

seconda equazione di struttura.

**NOTA** in $gl(k,\mathbb{R})$ $[A,B] \overset{def}{=} AB - BA$

per forme a valori in $gl(k,\mathbb{R})$

vale $[\alpha,\beta] = \alpha \wedge \beta - (-1)^{\deg\alpha \deg\beta}\beta \wedge \alpha$

per 1-forme $2\,\alpha\wedge\alpha = [\alpha,\alpha]$

la seconda equazione di struttura si trova scritta anche nella forma

$$\boxed{\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]}$$

NOTA siano $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\nabla^2 s_i (X, Y) =$$

$$\sum_{j=1}^{k} s_j \Omega_{ji}(X,Y) =$$

$$= \sum_j s_j \left( \sum_e \omega_{je} \wedge \omega_{ei} + d\omega_{ji} \right)(X,Y)$$

nota siano $\alpha, \beta$ 1-forme

- $d\alpha(X,Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X,Y])$
- $\alpha \wedge \beta (X,Y) = \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X)$

$$= \sum_j s_j \left\{ \sum_e \left( \underline{\omega_{je}(X)\,\omega_{ei}(Y)} - \underline{\omega_{je}(Y)\,\omega_{ei}(X)} \right) + \boxed{X\,\omega_{ji}(Y)} - \boxed{Y\,\omega_{ji}(X)} - \underline{\omega_{ji}([X,Y])} \right\}$$

$$= \nabla_X \nabla_Y s_i - \nabla_Y \nabla_X s_i - \nabla_{[X,Y]} s_i$$

nota $\nabla_X(\nabla_Y s_i) = \nabla_X \left( \sum_j s_j\, \omega_{ji}(Y) \right) =$

$$= \sum_j s_j \left( X\,\omega_{ji}(Y) + \sum_k s_k\, \omega_{kj}(X)\,\omega_{ji}(Y) \right)$$

Dunque

$$R(X,Y)s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s$$

tensore di curvatura

Torniamo alla forma locale

abbiamo $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$

differenziando troviamo la 2ª identità di Bianchi:

$$\boxed{d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega}$$

consideriamo adesso due banalizzazioni locali, quindi due sezioni locali

$s_\alpha, s_\beta$ di $P(E, GL(k,\mathbb{R}))$

con $s_\alpha = s_\beta g_{\beta\alpha}$

abbiamo

$$s_\alpha \Omega_\alpha = \nabla^2 s_\alpha \qquad s_\beta \Omega_\beta = \nabla^2 s_\beta$$

relazione tra $\Omega_\alpha$ e $\Omega_\beta$

$$s_\alpha \Omega_\alpha = \nabla^2 s_\alpha = \nabla^2 s_\beta g_{\beta\alpha} =$$

$$= \nabla(\nabla s_\beta \cdot g_{\beta\alpha} + s_\beta \, dg_{\beta\alpha}) =$$

$$= \nabla^2 s_\beta \, g_{\beta\alpha} - \underbrace{\nabla s_\beta \wedge dg_{\beta\alpha} + \nabla s_\beta \wedge dg_{\beta\alpha}}_{= 0}$$

$$= (\nabla^2 s_\beta) g_{\beta\alpha} =$$

$$= s_\beta \Omega_\beta g_{\beta\alpha} = s_\alpha g_{\beta\alpha}^{-1} \Omega_\beta g_{\beta\alpha}$$

$$\boxed{\Omega_\alpha = g_{\beta\alpha}^{-1} \Omega_\beta g_{\beta\alpha}}$$

Dunque la curvatura è una collezione di matrici di 2-forme t.c.

$$\Omega_\alpha = \mathrm{Ad}(g_{\alpha\beta})(\Omega_\beta)$$

ossia definisce un oggetto globalmente definito, precisamente

$$\Omega \in \Omega^2\Big(M, \underbrace{P(E, GL(n,\mathbb{R})) \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})}_{\mathrm{Ad}(Fr(E))}\Big)$$

# Curvatura su fibrati principali

Consideriamo $P \to M$
con forma di connessione $\omega$.
Definiamo curvatura di $\omega$:

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

$\Omega$ soddisfa le seguenti proprietà:

① $\forall \, p \in P$ e $\forall \, X_p, Y_p \in T_pP$

$$\Omega_p(X_p, Y_p) = d\omega_p(X_p^h, Y_p^h)$$

② $$R_g^* \Omega = Ad(g^{-1})\Omega$$

③ $$d\Omega = [\Omega, \omega]$$ (2ª identità di Bianchi)

se $P = P(E, GL(n, \mathbb{R}))$
localmente $\Omega_\alpha = s_\alpha^* \Omega$ sono le forme locali di connessione.

# Olonomia e curvatura

## Teorema di Ambrose - Singer

Sia $P \longrightarrow M$ un $G$-fibrato principale con una connessione $\omega$. Sia $\Omega$ la curvatura.

Allora

$$\mathrm{Lie}\left(\mathrm{Hol}_p(\omega)\right) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left\{ U \in G \;\middle|\; U = \Omega_q(X,Y) \text{ con } q \sim p \text{ e } X, Y \in H_q \right\}$$

# Teorema di Gauss-Bonnet

Sia $M$ una superficie ($\dim M = 2$) compatta, orientata, Riemanniana. Abbiamo visto che $M$ è triangolabile e abbiamo definito

$$\chi(M) = V - E + F$$

caratteristica di Eulero di $M$.

Consideriamo il fibrato $P$ dei riferimenti ortonormali orientati, un $G$-fibrato principale con gruppo $SO(2)$.

Allora localmente

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega^1_2 \\ -\omega^1_2 & 0 \end{pmatrix} \in so(2)$$

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega = \begin{bmatrix} 0 & d\omega^1_2 \\ -d\omega^1_2 & 0 \end{bmatrix}$$

sappiamo che $\Omega_\alpha = \underbrace{Ad(g_{\alpha\beta})}_{=id} \Omega_\beta$

$Ad : SO(2) \longrightarrow Aut(so(2))$ è $= id.$

dunque $\Omega^1_2$ 2-forma globalmente definita su $M$.

Teorema di Gauss-Bonnet:

$$\int_M \Omega^1_2 = 2\pi \chi(M) = 2\pi(2-2g)$$

NOTA $\Omega^1_2 = K\, \theta^1 \wedge \theta^2$

curvatura Gaussiana

$\theta^1, \theta^2 \in T^*M$ ortonormali (frame locale)

$K$ è intrinsecamente definita, NON dipende da come la superficie è immersa in $\mathbb{R}^3$ (Teorema Egregium di Gauss).

NOTA Se deformiamo la superficie la sua curvatura cambia, ma necessariamente in modo che l'integrale totale rimanga costante.

Teorema Se $M$ è una superficie compatta, chiusa e orientata, con $K > 0$ ovunque, allora $M \simeq S^2$.

Teorema di Gauss-Bonnet generalizzato.

M varietà compatta, orientata, Riemanniana di dimensione $2m$ e $\nabla$ una connessione metrica con matrice di curvatura $\Omega$ locale, relativa a un riferimento ortonormale orientato.

Allora

- $\Omega \in \Omega^2(\mathfrak{so}(2m))$
- $\Omega_\alpha = Ad(g_{\alpha\beta})\,\Omega_\beta$

NOTA Sia $X \in SO(2n)$, dunque antisimmetrica. Lo pfaffiano di $X$ è un polinomio omogeneo $Pf(X)$ di grado $n$ t.c.

- $\det(X) = (Pf(X))^2$
- $Pf\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{bmatrix} = 1$

valgono le proprietà:

$$Pf(A^T X A) = \det A \; Pf(X)$$

dunque in particolare

$$Pf(\Omega_\alpha) = Pf(\Omega_\beta)$$

NOTA $M$ compatta, liscia

può essere triangolata e

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^{e} \alpha_{e}$$

Si ha il teorema di

Gauss-Bonnet generalizzato

$$\boxed{\int_M \mathrm{Pf}(\Omega) = 2\pi\, \chi(M)}$$

Sia $E \longrightarrow M$ fibrato orientato Riemanniano.

Si ha

$Pf(\Omega)$ forma chiusa

$[Pf(\Omega)]$ non dipende da $\nabla$

$$e(E) = \left[ Pf\left(\frac{1}{2\pi}\Omega\right)\right]$$

classe di Eulero del fibrato orientato $E$.

Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato vettoriale complesso

ossia localmente $U \times \mathbb{C}^k$

Hermitiano

ossia $\forall\ x \in M$ è definita su $E_x$ una forma Hermitiana che dipende in modo $C^\infty$ da $x$

Hermitiana: $\langle\ ,\ \rangle_x : E_x \times E_x \to \mathbb{C}$

- $\langle u, v \rangle_x = \overline{\langle v, u \rangle_x}$
- sesquilineare
- definita positiva.

Il fibrato $P$ dei riferimenti ortonormali di $E$ ha gruppo di struttura $U(k)$.

Data una connessione $\nabla$ su $E$, le forme locali di connessione soddisfano

$$\Omega_\alpha = g_{\alpha\beta}^{-1} \Omega_\beta \, g_{\alpha\beta}$$

$$\Omega_\alpha \in \Omega^2(\mathfrak{su}(k))$$

$\det\left(I + \frac{i}{2\pi}\Omega\right)$ è invariante per $Ad(g_{\alpha\beta}^{-1})$.

$$\det\left(I + \frac{i}{2\pi}\Omega\right) =$$

$$= 1 + c_1(E) + \qquad + c_k(E)$$

$c_i(E) \in H^{2i}(M)$ sono chiuse e definiscono classi di coomologia di $M$ indipendenti da $\nabla$.

Sono le classi di Chern di $E$ e sono invarianti per isomorfismo del fibrato $E$.

Se abbiamo due fibrati con classi di Chern diverse possiamo escludere che siano isomorfi.