

Capitolo 10

Identificazione parametrica a minimo errore di predizione

per gli studenti del corso di
Stima e identificazione

Luigi Chisci, 2 Giugno 2020

10.1 Criterio di adeguatezza PEM

Tra i criteri di adeguatezza più comunemente usati per l'identificazione parametrica vi è certamente quello del *Minimo Errore di Predizione* indicato con l'acronimo *PEM* = *Prediction Error Method*. Si consideri una classe parametrica (*struttura*) di modelli lineari

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &\triangleq \text{im}(m) \triangleq \{m(\theta) : \theta \in \Theta\} \\ m(\theta) : y_k &= G(z, \theta)u_k + H(z, \theta)e_k, \quad e_k \sim \text{swn}(0, \Sigma_e)\end{aligned}\tag{10.1.1}$$

dove $\Theta \subseteq \mathbb{R}^{n_\theta}$ è l'insieme dei parametri ammissibili, ovvero l'insieme dei parametri θ per i quali il predittore ottimo ad un passo associato al modello $m(\theta)$

$$\hat{y}_{k|\theta} = P(z, \theta) z_k = \underbrace{H^{-1}(z, \theta)G(z, \theta)}_{P_u(z, \theta)} u_k + \underbrace{[I - H^{-1}(z, \theta)]}_{P_y(z, \theta)} y_k\tag{10.1.2}$$

è BIBO-stabile. Allora il metodo di identificazione PEM si propone di determinare

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta \in \Theta} V_N(\theta, z^N)\tag{10.1.3}$$

dove l'indice di prestazione da minimizzare è definito nel seguente modo

$$V_N(\theta, z^N) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ell(\varepsilon_{k|\theta}^F)\tag{10.1.4}$$

con

- $\varepsilon_{k|\theta}^F \triangleq L(z)\varepsilon_{k|\theta} = L(z)(y_k - \hat{y}_{k|\theta})$;

- $L(z)$ arbitrario filtro digitale BIBO-stabile;
- $\ell(\cdot)$ arbitraria funzione positiva cioè tale che $\ell(\varepsilon) > 0$ per ogni $\varepsilon \neq 0$.

Si noti che, poiché

$$\begin{aligned}\varepsilon_{k|\theta}^F &= L(z)\varepsilon_{k|\theta} = L(z)H^{-1}(z, \theta) [y_k - G(z, \theta)u_k] = H^{-1}(z, \theta) [y_k^F - G(z, \theta)u_k^F] \\ &= y_k^F - P(z, \theta) z_k^F\end{aligned}$$

con

$$u_k^F \triangleq L(z)u_k, \quad y_k^F \triangleq L(z)y_k, \quad z_k^F = \begin{bmatrix} y_k^F \\ u_k^F \end{bmatrix},$$

l'utilizzo di un filtro non unitario ($L(z) \neq 1$) equivale semplicemente ad operare con i dati pre-filtrati u_k^F, y_k^F al posto dei dati originari u_k, y_k . In altri termini $L(z) \neq 1$ comporta la ridefinizione dell'insieme dati come $z^N \triangleq \{z_k^F = L(z)z_k; k = 1, 2, \dots, N\}$. Nel seguito, per semplicità di notazione, si ometterà l'apice F assumendo che i dati elaborati nell'algoritmo di identificazione possano comunque essere stati ottenuti da quelli acquisiti nell'esperimento mediante un opportuno pre-filtraggio.

L'altro grado di libertà a disposizione è la funzione $\ell(\cdot)$ per la quale la scelta più comune è $\ell(\varepsilon) = \|\varepsilon\|^2 \triangleq \varepsilon^\top \varepsilon$ che nel caso scalare si riduce a $\ell(\varepsilon) = \varepsilon^2$.

10.2 Calcolo della stima parametrica

10.2.1 Regressione lineare

Si consideri il caso particolare di *predittore lineare nei parametri*

$$\hat{y}_{k|\theta} = \theta^\top \varphi_k \quad (10.2.1)$$

dove, per ogni k , il regressore $\varphi_k = g_k(z^N) \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ dipende esclusivamente dall'insieme dati e non dalla matrice dei parametri $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_y}$. Si consideri per semplicità il caso scalare ($n_y = 1$) con $\ell(\varepsilon) = \varepsilon^2$, per il quale risulta

$$V_N(\theta, z^N) \propto \sum_{k=1}^N \varepsilon_{k|\theta}^2 = \sum_{k=1}^N (y_k - \varphi_k^\top \theta)^2.$$

Per minimizzare rispetto a θ la funzione $V_N(\theta, z^N)$ se ne calcola il gradiente:

$$\begin{aligned}V'_N(\theta, z^N) &\triangleq \frac{\partial}{\partial \theta} V_N(\theta, z^N) = \left[\frac{\partial V_N}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial V_N}{\partial \theta_{n_x}} \right]^\top \\ &\propto \sum_{k=1}^N \frac{\partial \varepsilon_{k|\theta}}{\partial \theta} 2\varepsilon_{k|\theta} \propto - \sum_{k=1}^N \varphi_k (y_k - \varphi_k^\top \theta).\end{aligned} \quad (10.2.2)$$

Pertanto si ha:

$$V'_N(\theta, z^N) = 0 \implies \sum_{k=1}^N (\varphi_k y_k - \varphi_k \varphi_k^\top \theta) = 0 \implies \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k \varphi_k^\top \right) \theta = \sum_{k=1}^N \varphi_k y_k.$$

Inoltre, l'Hessiano risulta

$$V''_N(\theta, z^N) \triangleq \frac{\partial}{\partial \theta^\top} [V'_N(\theta, z^N)] = \left[\frac{\partial V'_N}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial V'_N}{\partial \theta_{n_x}} \right] \propto \sum_{k=1}^N \varphi_k \varphi_k^\top.$$

Pertanto se è soddisfatta la condizione

$$\det \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k \varphi_k^\top \right) > 0 \quad (10.2.3)$$

ovvero se la matrice di informazione $R_N \triangleq \sum_{k=1}^N \varphi_k \varphi_k^\top$ è invertibile, il criterio di adeguatezza $V_N(\theta, z^N)$ ha un unico minimo globale in $\theta = \hat{\theta}_N$ dato da

$$\hat{\theta}_N = \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k \varphi_k^\top \right)^{-1} \sum_{k=1}^N \varphi_k y_k. \quad (10.2.4)$$

È immediato verificare che l'inserimento del trasposto y_k^\top in (10.2.4) permette di generalizzare la soluzione al caso vettoriale ($n_y > 1$). Infatti, posto $y_k \triangleq [y_{k,1}, y_{k,2}, \dots, y_{k,n_y}]^\top$ e $\theta \triangleq [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n_y}]$, si ha

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta} \sum_{k=1}^N (y_k - \theta^\top \varphi_k)^\top (y_k - \theta^\top \varphi_k) = \arg \min_{\{\theta_i\}_{i=1}^{n_y}} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_y} (y_{k,i} - \varphi_k^\top \theta_i)^2.$$

Pertanto, la colonna i -esima della matrice $\hat{\theta}_N$ può essere determinata, indipendentemente dalle altre colonne, come nel caso scalare considerando $y_{k,i}$ al posto di y_k , vale a dire:

$$[\hat{\theta}_N]_{\cdot i} = \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k \varphi_k^\top \right)^{-1} \sum_{k=1}^N \varphi_k y_{k,i}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

da cui deriva immediatamente (10.2.4). La stima parametrica (10.2.4), che minimizza la somma dei quadrati $\|\varepsilon_{k|\theta}\|^2$ degli errori prende il nome di *stima ai minimi quadrati*. Si noti che la condizione di *identificabilità* (10.2.3) per i minimi quadrati richiede necessariamente che $N \geq n_\theta$, ovvero che il numero di dati a disposizione non sia inferiore al numero di parametri da stimare.

Ricordando le definizioni di correlogramma e cross-correlogramma

$$\widehat{R}_\varphi^N(i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi_k \varphi_{k-i}^\top, \quad \widehat{R}_{\varphi y}^N(i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi_k y_{k-i}^\top,$$

è immediato constatare come la stima ai minimi quadrati (10.2.4) possa essere espressa equivalentemente tramite

$$\hat{\theta}_N = \left[\widehat{R}_\varphi^N(0) \right]^{-1} \widehat{R}_{\varphi y}^N(0) \quad (10.2.5)$$

ovvero come “rapporto” fra cross-correlogramma in $i = 0$ (covarianza campionaria) di φ_k e y_k e correlogramma in $i = 0$ (varianza campionaria) del regressore φ_k . Questa interpretazione statistica dello stimatore ai minimi quadrati consente di analizzarne le proprietà asintotiche (cioè per $N \rightarrow \infty$). A tale scopo, si ipotizzi l’esistenza di un sistema vero

$$\mathcal{S}: \quad y_k = \theta_0^\top \varphi_k + v_k \quad (10.2.6)$$

che ha generato l’insieme di dati z^N . Sostituendo (10.2.6) in (10.2.4), con semplici passaggi algebrici si ha:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_N &= \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k \varphi_k^\top \right)^{-1} \sum_{k=1}^N \varphi_k y_k^\top \\ &= \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k \varphi_k^\top \right)^{-1} \sum_{k=1}^N \varphi_k (\varphi_k^\top \theta_0 + v_k^\top) \\ &= \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k \varphi_k^\top \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k \varphi_k^\top \right) \theta_0 + \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k \varphi_k^\top \right)^{-1} \sum_{k=1}^N \varphi_k v_k^\top \\ &= \theta_0 + \left[\widehat{R}_\varphi^N(0) \right]^{-1} \widehat{R}_{\varphi v}^N(0) \end{aligned} \quad (10.2.7)$$

che mette in evidenza come l’errore di stima sui parametri $\tilde{\theta}_N \triangleq \hat{\theta}_N - \theta_0$ sia direttamente proporzionale al cross-correlogramma di φ_k e v_k ed inversamente proporzionale al correlogramma di φ_k . Sotto l’ulteriore ipotesi di quasi-stazionarietà di φ_k e y_k , i correlogrammi convergono per $N \rightarrow \infty$ alle rispettive funzioni di auto-covarianza di φ_k e di cross-covarianza fra φ_k e v_k , per cui vale il seguente risultato:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_N = R_\varphi^{-1}(0) R_{\varphi v}(0). \quad (10.2.8)$$

L’espressione (10.2.8) mostra come l’errore di stima sia asintoticamente direttamente proporzionale alla cross-correlazione fra il regressore φ_k e l’errore di equazione v_k in (10.2.6)

ed inversamente proporzionale alla varianza del regressore φ_k . In particolare, se

$$R_{\varphi v}(0) \triangleq \overline{E} [\varphi_k v_k^\top] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E [\varphi_k v_k^\top] = 0 \quad (10.2.9)$$

ovvero se φ_k e v_k sono incorrelati, lo stimatore ai minimi quadrati è *asintoticamente non polarizzato*, cioè

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_N = 0 \implies \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_N = \theta_0. \quad (10.2.10)$$

La condizione (10.2.9) di assenza di polarizzazione asintotica risulta, in particolare, verificata nei seguenti due casi di interesse pratico.

1. Il processo v_k è un rumore bianco ed il regressore $\varphi_k = g(z^{k-1})$ dipende in modo strettamente causale dai dati osservati z_k . In tal caso, infatti, v_k è certamente incorrelato con z^{k-1} e, quindi, con φ_k . Questo avviene, ad esempio, se il sistema vero \mathcal{S} è ARX.
2. L'ingresso u_k è indipendente da v_k ed il regressore $\varphi_k = g(u^k)$ dipende solo dagli ingressi. Anche in questo caso, infatti, φ_k e v_k risultano incorrelati. Questo accade, ad esempio, se il sistema vero ha funzione di trasferimento ingresso-uscita $G(z) = \sum_{i=0}^n g_i z^{-i}$ a *risposta impulsiva finita (FIR)* a prescindere dalla funzione di trasferimento del disturbo $H(z)$.

In generale, viceversa, se il regressore φ_k contiene anche uscite y_{k-i} e v_k non è un rumore bianco, risulta $R_{\varphi v}(0) = \overline{E} [\varphi_k v_k^\top] \neq 0$ e la stima ai minimi quadrati risulta polarizzata anche per un numero elevato di dati a disposizione.

10.2.2 Regressione pseudo-lineare

Si è appena visto come nel caso di modello/predittore *lineare nei parametri* e di funzione $\ell(\cdot)$ *quadratica* si possa determinare esplicitamente la stima ottima dei parametri (10.2.4) mediante il metodo dei minimi quadrati. Se viceversa il modello/predittore non è lineare nei parametri e/o la funzione $\ell(\cdot)$ non è quadratica si deve ricorrere ad una soluzione numerica del problema di ottimizzazione

$$\min_{\theta \in \Theta} V_N(\theta, z^N).$$

Le tecniche numeriche adottate consistono tipicamente di algoritmi di ricerca iterativi che operano nel seguente modo

$$\hat{\theta}_N^{(i+1)} = \hat{\theta}_N^{(i)} + \alpha^{(i)} f^{(i)} \quad (10.2.11)$$

dove il vettore $f^{(i)}$ fornisce la direzione di ricerca mentre lo scalare $\alpha^{(i)}$ è il passo di aggiornamento determinato in modo da ottenere una diminuzione della funzione obiettivo, ovvero imporre

$$V_N(\hat{\theta}_N^{(i+1)}, z^N) < V_N(\hat{\theta}_N^{(i)}, z^N).$$

Per quanto riguarda la scelta della direzione di ricerca ci si può avvalere, oltre alla conoscenza della funzione obiettivo $V_N(\theta, z^N)$, anche della conoscenza del gradiente $V'_N(\theta, z^N)$ e dell'Hessiano $V''_N(\theta, z^N)$, laddove questi possano essere calcolati, al fine di aumentare la velocità di convergenza. Metodi comunemente usati sono quello della *più rapida discesa* in cui la direzione di ricerca coincide con quella del gradiente cioè

$$f^{(i)} = -V'_N(\hat{\theta}_N^{(i)}, z^N)$$

ed il metodo di Newton in cui

$$f^{(i)} = - \left[V''_N(\hat{\theta}_N^{(i)}, z^N) \right]^{-1} V'_N(\hat{\theta}_N^{(i)}, z^N).$$

Si fa notare come il metodo del gradiente fornisca una velocità di convergenza del primo ordine (lineare) mentre il metodo di Newton fornisce una velocità di convergenza del secondo ordine (quadratica) a fronte della necessità di valutare anche l'Hessiano.

Per molti modelli parametrici lineari, quali ad esempio i modelli polinomiali a scatola nera, il predittore ottimo assume la forma di *regressione pseudo-lineare*

$$\hat{y}_{k|\theta} = \varphi_{k|\theta}^\top \theta \quad (10.2.12)$$

con il regressore pseudo-lineare $\varphi_{k|\theta}$, dipendente da θ , ed il vettore dei parametri θ opportunamente definiti. Assumendo $\ell(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^2$, si procede di seguito al calcolo del gradiente e dell'Hessiano della funzione obiettivo risultante:

$$V_N(\theta, z^N) = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{k|\theta}^2, \quad \varepsilon_{k|\theta} \triangleq y_k - \varphi_{k|\theta}^\top \theta.$$

Si ha:

$$V'_N(\theta, z^N) \triangleq \frac{\partial}{\partial \theta} V_N(\theta, z^N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\partial \varepsilon_{k|\theta}}{\partial \theta} \varepsilon_{k|\theta} = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\partial \hat{y}_{k|\theta}}{\partial \theta} \varepsilon_{k|\theta}. \quad (10.2.13)$$

Definito il gradiente della predizione

$$\psi_{k|\theta} \triangleq \frac{\partial \hat{y}_{k|\theta}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \varepsilon_{k|\theta}}{\partial \theta}, \quad (10.2.14)$$

da (10.2.13) si ottiene la seguente espressione per il gradiente della funzione obiettivo

$$V'_N(\theta, z^N) = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \psi_{k|\theta} \varepsilon_{k|\theta} \quad (10.2.15)$$

da cui

$$V_N''(\theta, z^N) \triangleq \frac{\partial}{\partial \theta^\top} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} V_N(\theta, z^N) \right] = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \psi_{k|\theta} \frac{\partial \varepsilon_{k|\theta}^\top}{\partial \theta} - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\partial \psi_{k|\theta}}{\partial \theta^\top} \varepsilon_{k|\theta}. \quad (10.2.16)$$

Sostituendo (10.2.14) ed omettendo il secondo termine in (10.2.16), che risulta trascurabile in prossimità del minimo dove $\varepsilon_{k|\theta}$ è piccolo, si ottiene la seguente approssimazione dell'Hessiano:

$$V_N''(\theta, z^N) \cong \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \psi_{k|\theta} \psi_{k|\theta}^\top. \quad (10.2.17)$$

Tale approssimazione viene comunemente impiegata negli algoritmi di stima parametrica PEM, dove è importante avere una buona approssimazione dell'Hessiano nelle vicinanze dell'ottimo per accelerare la convergenza, mentre l'effetto dell'Hessiano non è così importante quando la stima corrente è distante dall'ottimo.

Tramite le espressioni (10.2.15) e (10.2.17), il calcolo del gradiente e dell'Hessiano della funzione obiettivo richiede il calcolo del vettore $\psi_{k|\theta}$ definito in (10.2.14), che dipende dalla particolare struttura parametrica adottata. Ad esempio per una struttura *ARMAX*(n_a, n_b, n_c, d) si ha:

$$\begin{aligned} \varphi_{k|\theta} &= [-y_{k-1}, \dots, -y_{k-n_a}; u_{k-d}, \dots, u_{k-d-n_b+1}; \varepsilon_{k-1|\theta}, \dots, \varepsilon_{k-n_c|\theta}]^\top \\ \theta &= [a_1, \dots, a_{n_a}; b_1, \dots, b_{n_b}; c_1, \dots, c_{n_c}]^\top \\ \psi_{k|\theta} &= \left[\frac{\partial}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial a_{n_a}}; \frac{\partial}{\partial b_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial b_{n_b}}; \frac{\partial}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial c_{n_c}} \right]^\top \hat{y}_{k|\theta}. \end{aligned} \quad (10.2.18)$$

Utilizzando la rappresentazione, sotto forma di equazione alle differenze, del predittore ARMAX:

$$C(z)\hat{y}_{k|\theta} = B(z)u_{k-d} + [C(z) - A(z)]y_k \quad (10.2.19)$$

si deducono le relazioni:

$$\begin{aligned} C(z) \frac{\partial}{\partial a_i} \hat{y}_{k|\theta} &= -y_{k-i} & i = 1, \dots, n_a \\ C(z) \frac{\partial}{\partial b_i} \hat{y}_{k|\theta} &= u_{k-d-i+1} & i = 1, \dots, n_b \\ C(z) \frac{\partial}{\partial c_i} \hat{y}_{k|\theta} + \hat{y}_{k-i|\theta} &= y_{k-i} & i = 1, \dots, n_c \implies \\ \implies C(z) \frac{\partial}{\partial c_i} \hat{y}_{k|\theta} &= \varepsilon_{k-i|\theta} & i = 1, \dots, n_c \end{aligned}$$

da cui

$$C(z) \psi_{k|\theta} = \varphi_{k|\theta}. \quad (10.2.20)$$

Pertanto, nel caso ARMAX, le componenti del gradiente $\psi_{k|\theta}$ sono ottenute filtrando le omologhe componenti del regressore $\varphi_{k|\theta}$ con un filtro digitale BIBO-stabile di funzione di trasferimento $C^{-1}(z)$.

10.3 Analisi asintotica del metodo PEM

L'utilizzo pratico del metodo PEM pone alcuni quesiti sulle proprietà di tale metodo che vale la pena di analizzare da un punto di vista teorico.

- Q1. Convergenza** - Ci si chiede se, ed eventualmente a quale valore, converge la stima $\hat{\theta}_N$ quando $N \rightarrow \infty$.
- Q2. Consistenza** - Nell'ipotesi in cui l'insieme dei dati z^N sia stato generato da un sistema vero \mathcal{S} appartenente alla classe di modelli \mathcal{M} considerata, cioè esiste $\theta_0 \in \Theta$ tale che $m(\theta_0) = \mathcal{S}$, ci si chiede se $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_N = \theta_0$.
- Q3. Incertezza** - Ci si chiede quale sia l'incertezza sui parametri stimati e come essa dipenda dal numero N di dati utilizzati e dal rapporto segnale/rumore.
- Q4. Analisi nel dominio della frequenza** - Ci si chiede come venga pesato in frequenza l'errore che si commette rimpiazzando il sistema con il suo modello.

I risultati analitici che seguono fanno riferimento alle seguenti ipotesi.

H1. L'insieme dei dati z^N è stato generato secondo lo schema di figura 10.1 in cui

- il sistema \mathcal{S} ed il controllore \mathcal{C} sono lineari;
- il sistema ad anello chiuso risultante dalla connessione di \mathcal{S} e \mathcal{C} è internamente stabile;
- l'ingresso esterno r_k è un segnale deterministico limitato;
- l'ingresso esterno e_k è un rumore bianco a media nulla.

H2. Il sistema vero \mathcal{S} è dato da

$$\mathcal{S} : \begin{cases} y_k &= G_0(z) u_k + H_0(z) e_k \\ e_k &= \text{swn}(0, \sigma_0^2). \end{cases}$$

In virtù dell'ipotesi H1, l'errore di predizione (eventualmente filtrato)

$$\varepsilon_{k|\theta} = L(z) (y_k - \hat{y}_{k|\theta})$$

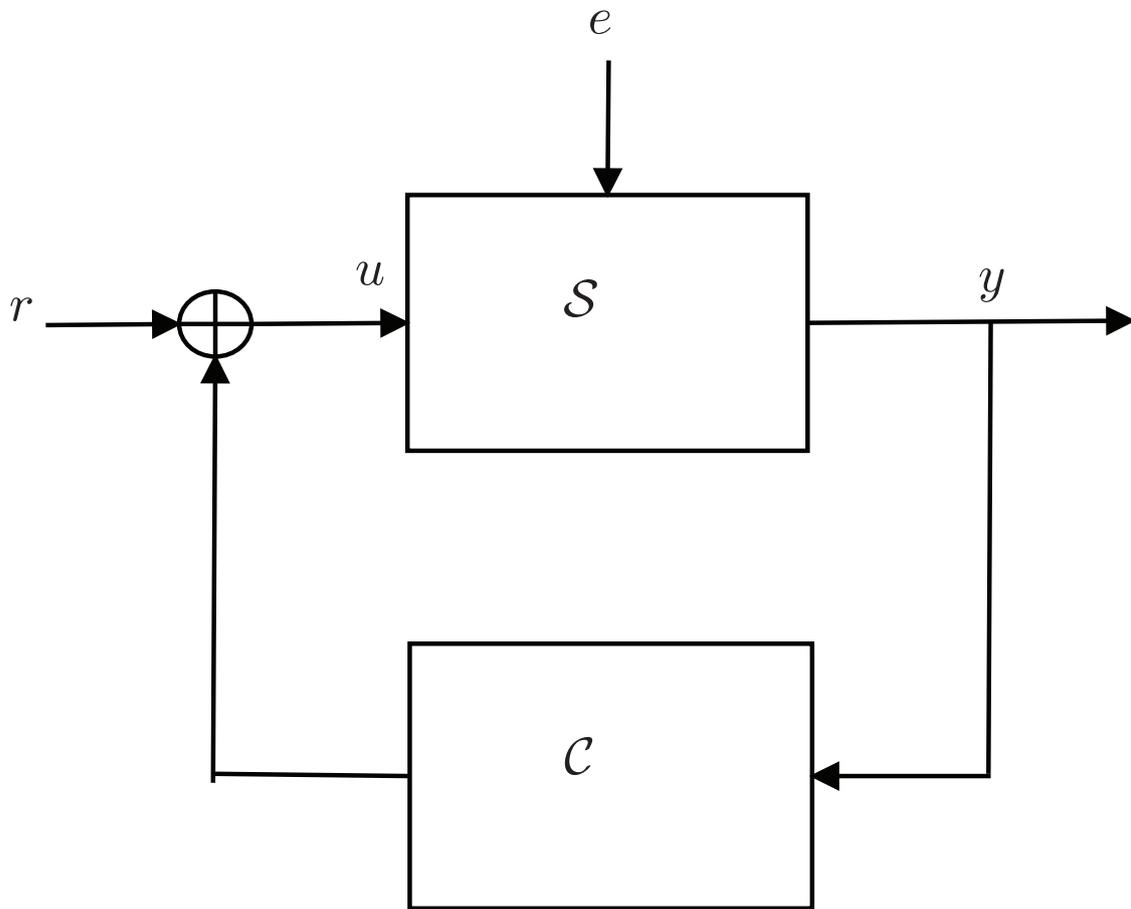


Figura 10.1: Schema di generazione dei dati sperimentali

risulta un segnale *quasi-stazionario* ed *ergodico*¹, per cui

$$V_{\infty}(\theta) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ell(\varepsilon_{k|\theta}^F) = \overline{E} [\ell(\varepsilon_{k|\theta}^F)]. \quad (10.3.1)$$

Si noti che $V_{\infty}(\theta) = \overline{E} [\ell(\varepsilon_{k|\theta}^F)]$ non dipende da z^N e rappresenta la funzione obiettivo asintotica (per $N \rightarrow \infty$) del metodo PEM.

¹Un segnale discreto s_k dicesi ergodico se per qualunque funzione $g(\cdot)$ si ha:
 $\overline{E} [g(s_k)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g(s_k)$.

10.3.1 Convergenza

Conviene introdurre l'insieme

$$\Theta_c \triangleq \left\{ \theta^* : V_\infty(\theta^*) = \min_{\theta \in \Theta} V_\infty(\theta) \right\} = \{ \theta^* \in \Theta : V_\infty(\theta^*) \leq V_\infty(\theta), \forall \theta \in \Theta \} \quad (10.3.2)$$

dei punti di minimo della funzione obiettivo asintotica $V_\infty(\theta)$. Vale il seguente risultato di convergenza.

Teorema 1 - Nell'ipotesi H1, $\hat{\theta}_N \rightarrow \Theta_c$ per $N \rightarrow \infty$ nel senso che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{\theta \in \Theta_c} \|\hat{\theta}_N - \theta\| = 0.$$

Il Teorema 1 asserisce, dunque, che, assumendo H1, la stima PEM converge per $N \rightarrow \infty$ all'insieme Θ_c dei punti di minimo di $V_\infty(\theta)$; pertanto Θ_c può anche essere interpretato come l'insieme dei possibili punti di convergenza dello stimatore parametrico PEM.

10.3.2 Informatività dei dati

Prima di affrontare il problema della consistenza occorre introdurre alcune definizioni riguardanti l'informatività dell'esperimento rispetto alla struttura adottata, ovvero la capacità che l'insieme dei dati riesca a discriminare modelli diversi nella classe di modelli prestabilita. A tale proposito, nelle definizioni che seguono, si farà riferimento ad un insieme dei dati $z^\infty \triangleq \{z_k, k \geq 1\}$ di ampiezza arbitrariamente elevata.

Definizione 1 - L'insieme dei dati z^∞ dicesi **informativo rispetto alla classe di modelli** \mathcal{M} se per ogni coppia di modelli $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ con associati predittori $P_1(z)$ e, rispettivamente, $P_2(z)$ vale quanto segue:

$$\overline{E} \{ [(P_1(z) - P_2(z)) z_k]^2 \} = 0 \implies P_1(e^{j\omega}) = P_2(e^{j\omega}), \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (10.3.3)$$

Per comprendere il significato della precedente definizione si fa notare (omettendo per semplicità di notazione il pedice temporale k per i segnali e la variabile z per le funzioni di trasferimento) che:

$$(P_1 - P_2) z = \hat{y}_1 - \hat{y}_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \triangleq \Delta \varepsilon$$

dove \hat{y}_1 e \hat{y}_2 rappresentano le predizioni calcolate usando lo stesso insieme di dati z^∞ e i modelli m_1 e, rispettivamente, m_2 mentre ε_1 e ε_2 sono i corrispondenti errori di predizione. Si ricorda inoltre che vi è una corrispondenza biunivoca fra il modello $m = (G(z), H(z))$ ed il predittore associato $P(z) = (P_u(z), P_y(z))$ per cui $P_1(z) = P_2(z)$ se e solo se $G_1(z) =$

$G_2(z)$ e $H_1(z) = H_2(z)$ o equivalentemente i modelli m_1 e m_2 coincidono. Alla luce di queste considerazioni, l'implicazione (10.3.3) può essere espressa equivalentemente in questo modo:

$$\overline{E} [\Delta \varepsilon_t^2] = 0 \implies G_1(e^{j\omega}) = G_2(e^{j\omega}) \text{ e } H_1(e^{j\omega}) = H_2(e^{j\omega}), \forall \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (10.3.4)$$

Pertanto si può interpretare il concetto di informatività di un insieme di dati rispetto ad una classe di modelli, espresso matematicamente da (10.3.3) o (10.3.4), nel seguente modo.

Se l'errore quadratico medio della differenza degli errori di predizione di due modelli della classe considerata è nullo, allora i due modelli devono coincidere nel senso che devono avere la stessa risposta in frequenza. Equivalentemente si potrebbe dire che per due modelli diversi della stessa classe si deve avere un errore quadratico medio della differenza degli errori di predizione positivo.

Nel seguito si vedrà come l'informatività dei dati consente di discriminare modelli diversi della stessa classe e, quindi, di garantire la consistenza del metodo di identificazione. Si fa notare che, in realtà, la coincidenza delle risposte in frequenza in (10.3.3) e (10.3.4) è richiesta per quasi tutti i valori della pulsazione ω in $[-\pi, \pi]$, ovvero con la possibile eccezione di un sottoinsieme di valori di misura nulla. Pertanto nelle precedenti e nelle future occorrenze della notazione " $\forall \omega \in [-\pi, \pi]$ " il simbolo \forall deve essere interpretato, con un abuso di notazione, come "per quasi tutti" nel senso di "eccetto un sottoinsieme di misura nulla dell'intervallo $[-\pi, \pi]$ ".

Di seguito si indica con \mathcal{L} l'insieme di tutti i modelli LTI (lineari e tempo-invarianti).

Definizione 2 - L'insieme dei dati z^∞ dicesi **informativo** se lo è rispetto alla classe \mathcal{L} . □

Il seguente risultato fornisce una condizione sufficiente per l'informatività dei dati.

Teorema 2 - L'insieme z^∞ è informativo se

$$\varphi_z(\omega) > 0, \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi], \quad (10.3.5)$$

ovvero la densità spettrale $\varphi_z(\omega)$ del segnale z_k è positiva per quasi tutte le pulsazioni.

Dimostrazione - Per arbitrari modelli lineari con predittori $P_1(z)$ e $P_2(z)$ si definisce $\Delta P(z) \triangleq P_1(z) - P_2(z)$. Allora, in virtù del teorema di Parseval,

$$\overline{E} [(\Delta P(z) z_t)^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta P(e^{j\omega}) \varphi_z(\omega) \Delta P^\top(e^{-j\omega}) d\omega = 0$$

implica necessariamente

$$\Delta P(e^{j\omega}) \varphi_z(\omega) \Delta P^\top(e^{-j\omega}), \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi] \quad (10.3.6)$$

e, se vale (10.3.5), (10.3.6) implica $\Delta P(e^{j\omega}) = 0, \forall \omega \in [-\pi, \pi]$ da cui consegue l'informatività di z^∞ . \square

10.3.3 Identificabilità strutturale

Un concetto fondamentale per l'identificazione è l'*identificabilità* ovvero la possibilità che il procedimento di identificazione fornisca come risultato un unico modello e che tale modello coincida con il sistema vero o, comunque, costituisca una buona approssimazione del sistema reale di interesse. Nel caso dell'identificazione parametrica, tale possibilità dipende dalla scelta della *struttura* (*identificabilità strutturale*) oltre che dalla scelta dell'*esperimento* (*identificabilità sperimentale*).

In questo paragrafo si pone attenzione specifica all'identificazione strutturale mentre l'identificazione sperimentale verrà trattata in seguito. Formalmente, una *struttura* di modelli è una funzione $m(\cdot)$ che associa ad un parametro ammissibile θ (per cui il predittore è BIBO-stabile) un modello, i.e.

$$m : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow m(\theta) \in \mathcal{M}.$$

Sarebbe auspicabile che un modello m_0 dell'insieme \mathcal{M} fosse descritto da un unico parametro $\theta \in \Theta$ ovvero che la struttura $m(\cdot)$ fosse *iniettiva*, ovvero associasse modelli diversi a parametri diversi. A tale proposito, si introduce l'insieme

$$\Theta(m_0, \mathcal{M}) = \{\theta \in \Theta : m(\theta) = m_0\} \quad (10.3.7)$$

di tutte le parametrizzazioni del modello m_0 in \mathcal{M} . La seguente definizione formalizza il concetto di identificabilità strutturale.

Definizione (Identificabilità strutturale puntuale) - La struttura $m(\cdot)$, ovvero la classe parametrica di modelli $\mathcal{M} = im(m)$, si dice *strutturalmente identificabile* in $\theta_0 \in \Theta$ se

$$\Theta(m(\theta_0), \mathcal{M}) = \{\theta_0\} \quad (10.3.8)$$

cioè non esistono altre parametrizzazioni $\theta \neq \theta_0$ in Θ per cui $m(\theta) = m(\theta_0)$. \square

In altri termini, l'identificabilità strutturale in θ_0 equivale a quanto segue

$$m(\theta) = m(\theta_0) \Rightarrow \theta = \theta_0. \quad (10.3.9)$$

Si noti che la precedente definizione di identificabilità strutturale in θ_0 è globale nel senso che non deve esserci nessun altro parametro θ in tutto l'insieme dei parametri ammissibili

Θ che fornisca lo stesso modello $m(\theta_0)$. In certe situazioni, ci si può accontentare della validità locale, cioè in un intorno di θ_0 , di tale proprietà che equivale a sostituire (10.3.8) con la seguente condizione meno restrittiva

$$\exists \varepsilon > 0 : \Theta(m(\theta_0), \mathcal{M}) \cap \mathcal{B}(\theta_0, \varepsilon) = \{\theta_0\} \quad (10.3.10)$$

dove $\mathcal{B}(\theta_0, \varepsilon) = \{\theta : \|\theta - \theta_0\| < \varepsilon\}$ denota la iper-sfera in \mathbb{R}^{n_θ} di raggio ε centrata in θ_0 . Si noti che l'identificabilità strutturale locale (10.3.10) richiede dunque che, in un opportuno intorno di θ_0 , non esistano altre parametrizzazioni $\theta \neq \theta_0$ dello stesso modello $m(\theta_0)$.

La precedente definizione di identificabilità strutturale puntuale può essere estesa a tutta la struttura come segue.

Definizione (Identificabilità strutturale in senso stretto) - La struttura $m(\cdot)$, ovvero la classe parametrica di modelli $\mathcal{M} = im(m)$, si dice *strutturalmente identificabile in senso stretto* se lo è per ogni $\theta \in \Theta$. \square

Tale definizione risulta piuttosto onerosa da soddisfare, nel senso che è difficile costruire strutture di modelli che siano strutturalmente identificabili in senso stretto. A tale proposito, si introduce la seguente proprietà più debole ma più realistica.

Definizione (Identificabilità strutturale) - La struttura $m(\cdot)$, ovvero la classe parametrica di modelli $\mathcal{M} = im(m)$, si dice *strutturalmente identificabile* se lo è per quasi tutti i parametri $\theta \in \Theta$, ovvero con la possibile eccezione di un sottoinsieme di misura nulla di Θ . \square

Esempio (Identificabilità strutturale di modelli ARMAX) - Si consideri la classe dei modelli ARMAX($n_a = 2, n_b = 2, n_c = 2, d = 1$) parametrizzata da

$$\theta = [a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2]^\top \in \Theta = \{\theta : 1 + \theta_5 z^{-1} + \theta_6 z^{-2} \text{ ha radici in } |z| < 1\}. \quad (10.3.11)$$

In tale classe di modelli, si consideri il modello ARMAX del primo ordine con funzioni di trasferimento

$$G_0(z) = \frac{bz^{-1}}{1 + az^{-1}}, \quad H_0(z) = \frac{1 + cz^{-1}}{1 + az^{-1}} \quad \text{con } |c| < 1, \quad (10.3.12)$$

che corrisponde al vettore di parametri

$$\theta_0 = [a, 0, b, 0, c, 0]^\top. \quad (10.3.13)$$

In realtà, moltiplicando numeratore e denominatore di $G_0(z)$ e $H_0(z)$ per uno stesso fattore comune $\alpha(z) = 1 + \alpha z^{-1}$, con $|\alpha| < 1$, si ha

$$\begin{aligned} G_0(z) &= \frac{bz^{-1}}{1 + az^{-1}} \frac{1 + \alpha z^{-1}}{1 + \alpha z^{-1}} = \frac{bz^{-1} + b\alpha z^{-2}}{1 + (a + \alpha)z^{-1} + a\alpha z^{-2}} \\ H_0(z) &= \frac{1 + cz^{-1}}{1 + az^{-1}} \frac{1 + \alpha z^{-1}}{1 + \alpha z^{-1}} = \frac{1 + (c + \alpha)z^{-1} + c\alpha z^{-2}}{1 + (a + \alpha)z^{-1} + a\alpha z^{-2}} \end{aligned}$$

per cui il modello $m_0 = (G_0, H_0)$ risulta parametrizzato dagli infiniti vettori

$$\theta_\alpha = [a + \alpha, \alpha a, b, \alpha b, c + \alpha, \alpha c]^\top, \quad \forall \alpha \in (-1, 1). \quad (10.3.14)$$

La struttura in oggetto risulta identificabile in θ se e solo se i tre polinomi

$$z^2 A(z) = z^2 + a_1 z + a_2, \quad zB(z) = b_1 z + b_2, \quad z^2 C(z) = z^2 + c_1 z + c_2$$

non hanno radici in comune; viceversa, non è identificabile in tutti i parametri $\theta \in \Theta$ della forma (10.3.14) con arbitrari a, b, c, α tali che $|c| < 1$ e $|\alpha| < 1$.

Generalizzando ad una struttura ARMAX(n_a, n_b, n_c, d), si ha identificabilità strutturale in $\theta = [a_1, \dots, a_{n_a}; b_1, \dots, b_{n_b}; c_1, \dots, c_{n_c}]^\top$ se e solo se i tre polinomi

$$\begin{aligned} z^{n_a} A(z) &= z^{n_a} + a_1 z^{n_a-1} + \dots + a_{n_a} \\ z^{n_b-1} B(z) &= b_1 z^{n_b-1} + \dots + b_{n_b} \\ z^{n_c} C(z) &= z^{n_c} + c_1 z^{n_c-1} + \dots + c_{n_c} \end{aligned}$$

sono primi fra loro, i.e. non hanno fattori in comune. Pertanto la struttura ARMAX non è strutturalmente identificabile in senso stretto ma, poiché il sottoinsieme dei parametri per cui viene a mancare l'identificabilità strutturale ha misura nulla, è strutturalmente identificabile. \square

Identificabilità strutturale della struttura OE - Si consideri la classe di modelli OE(n_b, n_f, d) che associa al parametro $\theta = [b_1, \dots, b_{n_b}; f_1, \dots, f_{n_f}]^\top$ il modello $m(\theta) = (G(z, \theta) = z^{-d} B(z)/F(z), H(z, \theta) = 1)$. Indicando con $B_0(z)$ e $F_0(z)$ i polinomi relativi al parametro θ_0 , si ha che

$$m(\theta) = m(\theta_0) \iff \frac{B(z)}{F(z)} = \frac{B_0(z)}{F_0(z)}$$

da cui

$$m(\theta) = m(\theta_0) \implies \theta = \theta_0$$

se e solo se i polinomi $z^{n_b-1} B(z) = b_1 z^{n_b-1} + \dots + b_{n_b}$ e $z^{n_f} F(z) = z^{n_f} + f_1 z^{n_f-1} + \dots + f_{n_f}$ sono primi fra loro. Quindi, anche l'identificabilità strutturale della struttura OE (come quella della struttura ARMAX) risulta verificata ma non in senso stretto, essendo condizionata all'assenza di cancellazioni nei polinomi B ed F . \square

Identificabilità strutturale della struttura ARX - Si consideri la classe di modelli ARX(n_a, n_b, d) che associa al parametro $\theta = [a_1, \dots, a_{n_a}; b_1, \dots, b_{n_b}]^\top$ il modello $m(\theta) = (G(z, \theta) = z^{-d} B(z)/A(z), H(z, \theta) = 1/A(z))$. Indicando con $A_0(z)$ e $B_0(z)$ i polinomi relativi al parametro θ_0 , si ha che

$$m(\theta) = m(\theta_0) \iff \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B_0(z)}{A_0(z)} \text{ e } \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{A_0(z)} \iff \left\{ \begin{array}{l} A(z) = A_0(z) \\ B(z) = B_0(z) \end{array} \right\} \iff \theta = \theta_0.$$

Pertanto la struttura ARX risulta identificabile in senso stretto. \square

Identificabilità strutturale della struttura BB polinomiale - Si consideri la struttura $BB(n_a, n_b, n_c, n_d, n_f, d)$

$$A(z) y_k = \frac{B(z)}{F(z)} u_{k-d} + \frac{C(z)}{D(z)} e_k$$

che associa al vettore dei parametri

$$\theta = [a_1, \dots, a_{n_a}; b_1, \dots, b_{n_b}; c_1, \dots, c_{n_c}; d_1, \dots, d_{n_d}; f_1, \dots, f_{n_f}]^\top$$

il modello

$$m(\theta) = \left(G(z, \theta) = z^{-d} \frac{B(z)}{A(z)F(z)}, H(z, \theta) = \frac{C(z)}{A(z)D(z)} \right).$$

Indicando con $A_0(z), B_0(z), C_0(z), D_0(z), F_0(z)$ i polinomi relativi al parametro θ_0 , si ha che

$$m(\theta) = m(\theta_0) \iff \frac{B(z)}{A(z)F(z)} = \frac{B_0(z)}{A_0(z)F_0(z)} \text{ e } \frac{C(z)}{A(z)D(z)} = \frac{C_0(z)}{A_0(z)D_0(z)}.$$

Si lascia al lettore il compito di verificare che l'identificabilità strutturale in θ richiede che vengano soddisfatte le seguenti condizioni:

- i)** i polinomi $z^{n_a}A(z), z^{n_b-1}B(z), z^{n_c}C(z)$ non hanno fattori comuni (a tutti e tre);
- ii)** i polinomi $z^{n_b-1}B(z)$ e $z^{n_f}F(z)$ non hanno fattori comuni;
- iii)** i polinomi $z^{n_c}C(z)$ e $z^{n_d}D(z)$ non hanno fattori comuni;
- iv)** se $n_a \geq 1$, i polinomi $z^{n_d}D(z)$ e $z^{n_f}F(z)$ non hanno fattori comuni;
- v)** se $n_d \geq 1$, i polinomi $z^{n_a}A(z)$ e $z^{n_b-1}B(z)$ non hanno fattori comuni;
- vi)** se $n_f \geq 1$, i polinomi $z^{n_a}A(z)$ e $z^{n_c}C(z)$ non hanno fattori comuni.

Pertanto la struttura BB risulta strutturalmente identificabile ma non in senso stretto. \square

La precedente analisi ha evidenziato come il principale ostacolo all'identificabilità strutturale sia costituito da cancellazioni nelle funzioni di trasferimento $G(z, \theta)$ e $H(z, \theta)$ del modello, situazione che si può facilmente verificare se l'ordine (i gradi dei polinomi) della classe di modelli scelta risulta sovrastimato rispetto all'ordine del sistema \mathcal{S} da identificare. Questa situazione può tuttavia essere evitata partendo da una classe di modelli di ordine minimo, e.g. ARMAX(1, 1, 0, 1), ed incrementando di uno l'ordine fino ad incontrare, prima o poi, una struttura in cui il sistema \mathcal{S} è univocamente rappresentato. Sebbene, nella pratica, il sistema reale di interesse non ammetta una descrizione esatta in nessuna classe di modelli, il suddetto suggerimento di partire da una struttura di ordine minimo ed estenderla progressivamente fino alla determinazione di un modello soddisfacente, risulta comunque valido.

10.3.4 Consistenza

In accordo all'assunzione H1, si consideri l'insieme

$$\Theta(\mathcal{S}, \mathcal{M}) \triangleq \{\theta \in \Theta : m(\theta) = \mathcal{S}\} \quad (10.3.15)$$

di tutte le parametrizzazioni del sistema vero \mathcal{S} nella classe di modelli $\mathcal{M} = im(m)$. Per quanto riguarda la consistenza dell'identificazione PEM, si dimostra il seguente risultato.

Teorema 3 - Se valgono le ipotesi H1 e H2:

$$(i) \quad \mathcal{S} = m(\theta_0) \in \mathcal{M} \implies \theta_0 \in \Theta_c;$$

$$(ii) \quad \left. \begin{array}{l} \mathcal{S} \in \mathcal{M} \\ z^\infty \text{ è informativo rispetto a } \mathcal{M} \end{array} \right\} \implies \Theta_c = \Theta(\mathcal{S}, \mathcal{M});$$

$$(iii) \quad \left. \begin{array}{l} \mathcal{S} = m(\theta_0) \in \mathcal{M} \\ z^\infty \text{ è informativo rispetto a } \mathcal{M} \\ \mathcal{M} \text{ è strutturalmente identificabile in } \theta_0 \end{array} \right\} \implies \Theta_c = \{\theta_0\}.$$

Dimostrazione - (i) Si osserva anzitutto che

$$m(\theta_0) = \mathcal{S} \implies G(z, \theta_0) = G_0(z) \text{ e } H(z, \theta_0) = H_0(z)$$

da cui

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k|\theta_0} &\triangleq y_k - \hat{y}_{k|\theta_0} \\ &= H^{-1}(z, \theta_0) [y_k - G(z, \theta_0)u_k] \\ &= H^{-1}(z, \theta) [G_0(z)u_k + H_0(z)e_k - G(z, \theta)u_k] \\ &= H_0^{-1}(z) [G_0(z)u_k + H_0(z)e_k - G_0(z)u_k] \\ &= e_k = swn(0, \sigma_0^2). \end{aligned}$$

Quindi, per un generico $\theta \in \Theta$,

$$\varepsilon_{k|\theta} = \varepsilon_{k|\theta_0} + (\varepsilon_{k|\theta} - \varepsilon_{k|\theta_0}) = e_k + (\hat{y}_{k|\theta_0} - \hat{y}_{k|\theta}).$$

Poiché i termini e_k e $\Delta\hat{y}_k = \hat{y}_{k|\theta_0} - \hat{y}_{k|\theta}$ risultano incorrelati, per la bianchezza di e_k ed il fatto che $\Delta\hat{y}_k$ è funzione di y^{k-1} e u^{k-1} , si ha:

$$V_\infty(\theta) = \overline{E} [\varepsilon_{k|\theta}^2] = \sigma_0^2 + \overline{E} [(\hat{y}_{k|\theta_0} - \hat{y}_{k|\theta})^2] \geq \sigma_0^2 = \overline{E} [\varepsilon_{k|\theta_0}^2] = V_\infty(\theta_0) \quad (10.3.16)$$

da cui si deduce immediatamente che θ_0 è un punto di minimo di $V_\infty(\theta)$, cioè $\theta_0 \in \Theta_c$ come volevasi dimostrare nella parte (i).

(ii) Per quanto riguarda la parte (ii) si osserva che se z^∞ è informativo rispetto alla classe \mathcal{M} , risulta che

$$\overline{E} \left[(\hat{y}_{k|\theta_0} - \hat{y}_{k|\theta})^2 \right] = \overline{E} \left[(\varepsilon_{k|\theta} - \varepsilon_{k|\theta_0})^2 \right] > 0, \quad \forall \theta : m(\theta) \neq m(\theta_0) = \mathcal{S}. \quad (10.3.17)$$

Utilizzando (10.3.17) in (10.3.16), si ha

$$V_\infty(\theta) > V_\infty(\theta_0), \quad \forall \theta \in \Theta(\mathcal{S}, \mathcal{M}) \text{ e } \forall \theta \in \Theta \setminus \Theta(\mathcal{S}, \mathcal{M})$$

da cui i punti di minimo di $V_\infty(\theta)$ sono tutti e soli gli elementi di $\Theta(\mathcal{S}, \mathcal{M})$, cioè $\Theta(\mathcal{S}, \mathcal{M}) = \Theta_c$ come volevasi dimostrare nella parte (ii).

(iii) Se, infine, si assume anche che \mathcal{M} è strutturalmente identificabile in θ_0 risulta che $\Theta(\mathcal{S}, \mathcal{M}) = \Theta_c = \{\theta_0\}$ come volevasi dimostrare nella parte (iii). \square

Commentando il precedente risultato si nota che per avere consistenza devono essere soddisfatte le seguenti tre condizioni:

- (C1) la classe dei modelli selezionata deve contenere il sistema vero;
- (C2) la struttura $m(\cdot)$ deve essere tale per cui il sistema vero ammette una rappresentazione univoca $m(\theta_0)$ in \mathcal{M} ;
- (C3) l'esperimento deve essere informativo nel senso che l'insieme dei dati sperimentali acquisiti deve permettere di discriminare i vari modelli della classe \mathcal{M} selezionata.

Se le suddette tre condizioni sono soddisfatte, il metodo PEM garantisce quindi una corretta identificazione per un numero di dati sufficientemente elevato, nel senso che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_N = \theta_0 \text{ tale che } \mathcal{S} = m(\theta_0). \quad (10.3.18)$$

Si noti come da un punto di vista pratico la suddetta condizione (C1) sia irrealistica nel senso che nessun modello, per quanto complesso, potrà mai rappresentare con esattezza un sistema reale. Nonostante ciò, la proprietà di consistenza (10.3.19) derivante dall'assunzione (C1) è ugualmente importante in quanto la sua validità costituisce una premessa affinché il metodo di identificazione fornisca un buon modello del sistema nel caso realistico in cui $\mathcal{S} \notin \mathcal{M}$. Se $\mathcal{S} \notin \mathcal{M}$, l'insieme Θ_c va interpretato come l'insieme dei parametri dei migliori approssimanti nella classe \mathcal{M} del sistema vero \mathcal{S} . A tale proposito, per non avere ambiguità nella stima parametrica, è opportuno scegliere la struttura \mathcal{M} e l'esperimento \mathcal{E} in modo che $\Theta_c = \{\bar{\theta}\}$ sia costituito da un unico elemento $\bar{\theta}$. In questo caso si avrebbe infatti

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_N = \bar{\theta} \quad (10.3.19)$$

dove il modello $m(\bar{\theta})$ è il miglior approssimante di \mathcal{S} nella classe \mathcal{M} .

10.3.5 Incertezza

Qualunque stimatore di utilità pratica non si può limitare a provvedere alla stima della grandezza di interesse ma deve anche fornire una valutazione dell'incertezza associata. A questo non fa eccezione lo stimatore parametrico PEM per il quale vale il seguente risultato.

Teorema 4 - Si assumano le ipotesi H1-H2. Sia $\Theta_c = \{\bar{\theta}\}$, e di conseguenza $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_N = \bar{\theta}$, allora per $N \rightarrow \infty$

$$\sqrt{N} (\hat{\theta}_N - \bar{\theta}) \sim \mathcal{N}(0, P_\theta) \quad (10.3.20)$$

dove

$$P_\theta = \text{var}(\varepsilon_{k|\bar{\theta}}) \left\{ \bar{E} [\psi_{k|\bar{\theta}} \psi_{k|\bar{\theta}}^\top] \right\}^{-1}. \quad (10.3.21)$$

Il teorema 3 asserisce che se $V_\infty(\theta)$ ha un unico minimo $\bar{\theta}$ a cui converge $\hat{\theta}_N$, allora l'errore $\hat{\theta}_N - \bar{\theta}$ è asintoticamente normale (Gaussiano) di varianza:

$$\text{var}(\hat{\theta}_N) \triangleq E \left[(\hat{\theta}_N - \bar{\theta}) (\hat{\theta}_N - \bar{\theta})^\top \right] = \frac{1}{N} \text{var}(\varepsilon_{k|\bar{\theta}}) \left\{ \bar{E} [\psi_{k|\bar{\theta}} \psi_{k|\bar{\theta}}^\top] \right\}^{-1}. \quad (10.3.22)$$

Approssimando le varianze di $\varepsilon_{k|\bar{\theta}}$ e $\psi_{k|\bar{\theta}}$ in (10.3.22) con le rispettive varianze campionarie, si ottiene la seguente approssimazione per la varianza asintotica dello stimatore PEM:

$$\text{var}(\hat{\theta}_N) \triangleq E \left[(\hat{\theta}_N - \bar{\theta}) (\hat{\theta}_N - \bar{\theta})^\top \right] \cong \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^N \varepsilon_{k|\bar{\theta}}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^N \psi_{k|\bar{\theta}} \psi_{k|\bar{\theta}}^\top \right)^{-1}. \quad (10.3.23)$$

Questa varianza può essere utilizzata per determinare regioni di confidenza dei parametri stimati.

10.3.6 Analisi nel dominio della frequenza

Per $N \rightarrow \infty$ ed assumendo $\ell(\varepsilon) = \varepsilon^2$

$$\hat{\theta}_N \rightarrow \bar{\theta} = \arg \min_{\theta} V_\infty(\theta)$$

con

$$V_\infty(\theta) = \bar{E} \left[(\varepsilon_{k|\theta}^F)^2 \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_\varepsilon^F(\omega, \theta) d\omega$$

dove $\varphi_\varepsilon^F(\omega, \theta)$ è la densità spettrale dell'errore di predizione filtrato $\varepsilon_{k|\theta}^F$. Assumendo H2, si ha

$$\varepsilon_{k|\theta}^F = L(z) H^{-1}(z, \theta) [y_k - G(z, \theta) u_k] = L(z) H^{-1}(z, \theta) [\Delta G(z, \theta) u_k + H_0(z) e_k] \quad (10.3.24)$$

dove $\Delta G(z, \theta) \triangleq G_0(z) - G(z, \theta)$. Assumendo inoltre che il sistema operi ad anello aperto si può ipotizzare che u_k ed e_k siano incorrelati, da cui

$$\varphi_\varepsilon^F(\omega, \theta) = \frac{|L(e^{j\omega})|^2}{|H(e^{j\omega}, \theta)|^2} \left[|\Delta G(e^{j\omega}, \theta)|^2 \varphi_u(\omega) + |H_0(e^{j\omega})|^2 \sigma_0^2 \right]. \quad (10.3.25)$$

Pertanto,

$$\bar{\theta} = \arg \min_{\theta} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|L(e^{j\omega})|^2}{|H(e^{j\omega}, \theta)|^2} \left[|\Delta G(e^{j\omega}, \theta)|^2 \varphi_u(\omega) + |H_0(e^{j\omega})|^2 \sigma_0^2 \right] d\omega \right\}. \quad (10.3.26)$$

La formula (10.3.26) esprime nel dominio della frequenza la funzione obiettivo asintotica. Nel caso particolare in cui $L(z) = 1$, (10.3.24) può essere riscritta come

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k|\theta}^F = \varepsilon_{k|\theta} &= H^{-1}(z, \theta) \left\{ \Delta G(z, \theta) u_k + \underbrace{[H_0(z) - H(z, \theta)] e_k + H(z, \theta) e_k}_{H_0(z) e_k} \right\} \\ &= H^{-1}(z, \theta) [\Delta G(z, \theta) u_k + \Delta H(z, \theta) e_k] + e_k \end{aligned}$$

dove $\Delta H(z, \theta) \triangleq H_0(z) - H(z, \theta)$. Poiché e_k è incorrelato sia con $\Delta G(z, \theta) u_k$ che con $\Delta H(z, \theta) e_k$, la minimizzazione (10.3.26) si riduce a

$$\bar{\theta} = \arg \min_{\theta} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|H(e^{j\omega}, \theta)|^2} \left[|\Delta G(e^{j\omega}, \theta)|^2 \varphi_u(\omega) + |\Delta H(e^{j\omega}, \theta)|^2 \sigma_0^2 \right] d\omega \right\}. \quad (10.3.27)$$

Si noti che se esiste $\theta_0 \in \Theta$ tale che

$$G(z, \theta_0) = G_0(z), \quad H(z, \theta_0) = H_0(z) \quad (10.3.28)$$

allora

$$\Delta G(e^{j\omega}, \theta_0) = 0 \text{ e } \Delta H(e^{j\omega}, \theta_0) = 0, \quad \forall \omega.$$

In questo caso, $\bar{\theta} = \theta_0$ è certamente un minimo di (10.3.27). Se, viceversa, $\mathcal{S} \notin \mathcal{M}$ e quindi non esiste alcun valore θ_0 che soddisfa (10.3.28), la minimizzazione rispetto a θ in (10.3.26) esprime comunque un compromesso fra la minimizzazione dell'errore in frequenza $|\Delta G(e^{j\omega}, \theta)|^2$ del modello ingresso-uscita pesato da $|L(e^{j\omega})|^2 \varphi_u(\omega) / |H(e^{j\omega}, \theta)|^2$ e la minimizzazione di $|H_0(e^{j\omega})|^2 / |H(e^{j\omega}, \theta)|^2$ pesato da $|L(e^{j\omega})|^2$. Pertanto, nel dominio della frequenza, l'identificazione PEM ricerca un compromesso fra:

- l'adattamento della risposta in frequenza ingresso-uscita $G(e^{j\omega}, \theta)$ a $G_0(e^{j\omega})$;
- l'adattamento della risposta in frequenza del disturbo $H(e^{j\omega}, \theta)$ a $H_0(e^{j\omega})$.

Nel caso particolare in cui il modello del disturbo sia fissato (come ad esempio nei modelli polinomiali OE, in cui $H(z, \theta) = 1$), risulta $H(e^{j\omega}, \theta) = H(e^{j\omega})$ indipendente da θ e, quindi, la minimizzazione in (10.3.26) si riduce semplicemente a

$$\min_{\theta} \int_{-\pi}^{\pi} Q(\omega, \theta) \left| \underbrace{G(e^{j\omega}, \theta) - G_0(e^{j\omega})}_{\Delta G(e^{j\omega}, \theta)} \right|^2 d\omega \quad (10.3.29)$$

dove

$$Q(\omega, \theta) \triangleq \frac{|L(e^{j\omega})|^2}{|H(e^{j\omega})|^2} \varphi_u(\omega). \quad (10.3.30)$$

Le formule (10.3.29)-(10.3.30) evidenziano come l'errore di modello $|\Delta G(e^{j\omega})|^2$ sia pesato alla pulsazione ω dai seguenti fattori:

- il modulo quadrato della risposta in frequenza del prefiltro $L(z)$;
- la densità spettrale dell'ingresso $\varphi_u(\omega)$;
- il reciproco del modulo quadrato della risposta in frequenza del disturbo.

Pertanto l'importanza relativa dell'errore di modello alle varie frequenze può essere regolata agendo sul prefiltro $L(z)$, sul modello del disturbo $H(z)$ e/o sul contenuto spettrale dell'ingresso.

10.4 Identificabilità sperimentale

Dal teorema 3 è emerso come la consistenza della stima parametrica PEM richieda un insieme di dati sufficientemente ampio ed informativo. A tale proposito occorre progettare opportunamente l'esperimento (in particolare scegliere l'ingresso u_k) in modo da garantire l'informatività, rispetto alla classe di modelli adottata, dell'insieme di dati z^N acquisito nell'esperimento. Di seguito si considera la classe \mathcal{L} di tutti i modelli LTI. Siano $m_1 = (G_1, H_1)$ e $m_2 = (G_2, H_2)$ due modelli lineari e siano ε_1 e ε_2 gli errori di predizione associati:

$$\varepsilon_i = H_i^{-1}(y - G_i u), \quad i = 1, 2.$$

Allora

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon \triangleq \varepsilon_1 - \varepsilon_2 &= \left(\frac{1}{H_1} - \frac{1}{H_2} \right) y + \left(\frac{G_2}{H_2} - \frac{G_1}{H_1} \right) u \\ &= \frac{H_2 - H_1}{H_1 H_2} y + \left(\frac{G_2}{H_2} - \frac{G_1}{H_1} + \frac{G_2}{H_1} - \frac{G_2}{H_1} \right) u \\ &= \frac{\Delta H}{H_1 H_2} y + \left(\frac{\Delta G}{H_1} - G_2 \frac{\Delta H}{H_1 H_2} \right) u \\ &= \frac{\Delta G}{H_1} u + \frac{\Delta H}{H_1 H_2} (y - G_2 u) \end{aligned}$$

dove $\Delta G \triangleq G_2 - G_1$ e $\Delta H \triangleq H_2 - H_1$. Considerando l'ipotesi H2, cioè $y = G_0 u + H_0 e$, si ha

$$\Delta \varepsilon = \frac{\Delta G}{H_1} u + \frac{\Delta H}{H_1 H_2} [(G_0 - G_2)u + H_0 e] = \frac{1}{H_1} \left[\left(\Delta G + \frac{G_0 - G_2}{H_2} \Delta H \right) u + \left(\frac{H_0}{H_2} \Delta H \right) e \right].$$

Nel caso di *esperimento ad anello aperto*, i segnali u_k ed e_k risultano incorrelati per cui

$$\overline{E} [\Delta \varepsilon_k^2] \propto \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|H_1|^2} \left| \Delta G + \frac{G_0 - G_2}{H_2} \Delta H \right|^2 \varphi_u d\omega + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|H_0|^2}{|H_1 H_2|^2} |\Delta H|^2 \sigma_0^2 d\omega. \quad (10.4.1)$$

Dall'espressione (10.4.1) si nota che

$$\overline{E} [\Delta \varepsilon_k^2] = 0 \implies \Delta H (e^{j\omega}) = 0 \text{ e } |\Delta G (e^{j\omega})|^2 \varphi_u(\omega) = 0, \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi]$$

poiché $H_0 (e^{j\omega}) \neq 0$ per ogni ω . Ricordando la definizione di insieme di dati informativo

$$\overline{E} [\Delta \varepsilon_k^2] = 0 \implies \Delta H (e^{j\omega}) = 0 \text{ e } \Delta G (e^{j\omega}) = 0, \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi],$$

si constata che l'esperimento è informativo, nel senso che genera un insieme dati informativo, se si sceglie l'ingresso u_k in modo tale che valga la seguente condizione

$$|\Delta G (e^{j\omega})|^2 \varphi_u(\omega) = 0, \quad \forall \omega \implies \Delta G (e^{j\omega}) = 0, \quad \forall \omega. \quad (10.4.2)$$

Se $\Delta G(z)$ è una funzione razionale (modelli a dimensione finita) strettamente propria (ritardo ingresso-uscita $d \geq 1$) di ordine (grado del denominatore) n , essa ha al più $n - 1$ zeri e, di conseguenza, possono esistere al più $n - 1$ valori distinti di $\omega \in [-\pi, \pi]$ per i quali $\Delta G (e^{j\omega}) = 0$. Pertanto, se si sceglie l'ingresso u_k in modo tale che esistono n valori distinti $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \dots \neq \omega_n$ per i quali

$$\varphi_u(\omega_i) > 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

la condizione (10.4.2) è certamente verificata e l'esperimento garantisce quindi l'informatività dell'insieme dati. Questa discussione motiva le seguenti definizioni di segnale *persistentemente eccitante*.

Definizione 3 - Un segnale quasi-stazionario u_k dicesi **persistentemente eccitante di ordine n** (pe_n) se esistono n pulsazioni distinte $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \dots \neq \omega_n$ in cui la densità spettrale $\varphi_u(\omega)$ di u_k è non nulla (positiva). \square

Definizione 4 - Un segnale quasi-stazionario u_k dicesi *pe* se

$$\varphi_u(\omega) > 0, \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi].$$

Si noti che un segnale *pe* è ovviamente pe_n per ogni $n > 0$. In particolare:

- un impulso $u_k = u \delta_k$ è soltanto pe_0 cioè non è pe_n per nessun $n > 0$;
- un segnale costante $u_k = u$, con $u \neq 0$, è pe_1 ;
- un segnale sinusoidale $u_k = a \sin(\omega_0 t + \alpha)$, con $a \neq 0$ e $\omega_0 \neq 0$, è pe_2 ;
- una multisinusoidale $u_k = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \sin(\omega_i k + \alpha_i)$ ($a_i \neq 0$ per $i = 0, 1, \dots, n$, $0 \neq \omega_1 \neq \omega_2 \neq \dots \neq \omega_n$) è pe_{2n+1} ;
- un rumore bianco $u_k \sim wn(0, \sigma_u^2)$ è pe di ogni ordine;
- un processo ARMA $u_k = H(z)e_k$, ottenuto filtrando un rumore bianco e_k con un arbitrario filtro digitale BIBO-stabile $H(z)$, è pe di ogni ordine.

Dalle precedenti argomentazioni, risulta evidente che per avere un insieme di dati informativo rispetto ad una certa classe di modelli (struttura) è sufficiente, nel caso di esperimento ad anello aperto, utilizzare un segnale di ingresso u_k persistentemente eccitante di ordine n sufficientemente elevato dove il valore minimo di n richiesto dipende ovviamente dalla classe di modelli adottata. A titolo esemplificativo, si consideri una struttura polinomiale $\mathcal{M} = BB(n_a, n_b, n_c, n_d, n_f, d)$ per cui risulta

$$\Delta G = G_2 - G_1 = \left(\frac{B_2}{A_2 F_2} - \frac{B_1}{A_1 F_1} \right) z^{-d} = \frac{B_2 A_1 F_1 - B_1 A_2 F_2}{A_1 A_2 F_1 F_2} z^{-d}$$

Tale funzione di trasferimento ha al più $n_a + n_b + n_f - 1$ zeri. Ne consegue che per garantire l'identificabilità sperimentale nel caso di struttura polinomiale a scatola nera, è sufficiente generare un ingresso u_k persistentemente eccitante di ordine n con $n \geq n_a + n_b + n_f$.

10.5 Esempi di analisi asintotica del metodo PEM

Per esemplificare l'analisi asintotica appena esposta si esaminano di seguito alcuni semplici esempi nei quali, specificati il sistema vero \mathcal{S} e la classe \mathcal{M} dei modelli adottata, si cercherà di determinare il modello (o i modelli) a cui può convergere lo stimatore PEM per numero di dati N che tende all'infinito.

Esempio 1 - Identificazione di un segnale MA con un modello AR

Si consideri un segnale a media mobile (MA) del primo ordine (sistema vero)

$$\mathcal{S} : y_k = e_k + c_0 e_{k-1}, \quad e_k = swn(0, \sigma_e^2) \quad (10.5.1)$$

e la classe $\mathcal{M} = AR(n_a = 1)$ dei modelli auto-regressivi del primo ordine caratterizzata dal predittore

$$\hat{y}_{k|\theta} = -a y_{k-1}, \quad \theta = a.$$

L'errore di predizione assume la forma

$$\varepsilon_{k|\theta} = y_k - \hat{y}_{k|\theta} = e_k + c_0 e_{k-1} + a y_{k-1} = e_k + (c_0 + a) e_{k-1} + a c_0 e_{k-2}$$

Pertanto,

$$V_\infty(\theta = a) = E[\varepsilon_{k|\theta}^2] = [1 + (c_0 + a)^2 + a^2 c_0^2] \sigma_e^2$$

da cui

$$\hat{\theta}_\infty = \hat{a}_\infty = \arg \min_a V_\infty(a) = -\frac{c_0}{1 + c_0^2}.$$

Si noti che, in questo caso, $\mathcal{S} \notin \mathcal{M}$ e $\Theta_c = \{\hat{a}_\infty\}$ dove $\hat{a}_\infty = -c_0/(1 + c_0^2)$ è il parametro del miglior approssimante del sistema vero (10.5.1) nella classe $\mathcal{M} = AR(1)$. \square

Esempio 2 - Identificazione di un sistema ARMAX con un modello ARX

Si consideri un sistema $ARMAX(n_a = 1, n_b = 1, n_c = 1, d = 1)$

$$\mathcal{S} : \begin{cases} y_k + a_0 y_{k-1} = b_0 u_{k-1} + e_k + c_0 e_{k-1} \\ e_k = \text{swn}(0, \sigma_e^2), \quad u_k = \text{swn}(0, \sigma_u^2), \quad E[u_k e_k] = 0 \end{cases} \quad (10.5.2)$$

e la classe $\mathcal{M} = ARX(n_a = 1, n_b = 1, d = 1)$ caratterizzata dal predittore

$$\hat{y}_{k|\theta} = -a y_{k-1} + b u_{k-1}, \quad \theta = [a, b]^\top$$

con errore di predizione

$$\varepsilon_{k|\theta} = y_k - \hat{y}_{k|\theta} = (a - a_0) y_{k-1} + (b_0 - b) u_{k-1} + e_k + c_0 e_{k-1}.$$

Si ha, quindi,

$$\begin{aligned} V_\infty(\theta) = E[\varepsilon_{k|\theta}^2] &= (a - a_0)^2 R_y(0) + (b_0 - b)^2 \sigma_u^2 + (1 + c_0^2) \sigma_e^2 + 2c_0(a - a_0) R_{ye}(0) \\ &= (a - a_0)^2 R_y(0) + (b_0 - b)^2 \sigma_u^2 + [1 + c_0^2 + 2c_0(a - a_0)] \sigma_e^2. \end{aligned}$$

Per determinare $\hat{\theta}_\infty$ si devono annullare le derivate di V_∞ rispetto ai parametri a e b :

$$\begin{cases} \frac{\partial V_\infty}{\partial a} = 2(a - a_0) R_y(0) + 2c_0 \sigma_e^2 = 0 & \implies a = \hat{a}_\infty = a_0 - \frac{c_0 \sigma_e^2}{R_y(0)} \\ \frac{\partial V_\infty}{\partial b} = 2(b_0 - b) \sigma_u^2 = 0 & \implies b = \hat{b}_\infty = b_0 \end{cases}$$

dove

$$R_y(0) = \frac{b_0^2}{1 - a_0^2} \sigma_u^2 + \left[1 + \frac{(c_0 - a_0)^2}{1 - a_0^2} \right] \sigma_e^2 = \frac{b_0 \sigma_u^2 + (1 + c_0^2 - 2a_0 c_0) \sigma_e^2}{1 - a_0^2}.$$

Sostituendo la precedente espressione di $R_y(0)$ in \hat{a}_∞ , si ha

$$\hat{a}_\infty = a_0 - \Delta a \quad \text{con} \quad \Delta a = \frac{c_0(1 - a_0^2)}{(1 + c_0^2 - 2c_0a_0) + b_0\sigma_u^2/\sigma_e^2}$$

Si noti che la polarizzazione asintotica Δa tende a zero, e quindi $\hat{\theta}_\infty = [\hat{a}_\infty, \hat{b}_\infty]^\top \rightarrow [a_0, b_0]^\top$, se il rapporto segnale/rumore $\sigma_u^2/\sigma_e^2 \rightarrow \infty$. Anche in questo esempio $\mathcal{S} \notin \mathcal{M}$ e $\Theta_c = \{\hat{\theta}_\infty\}$ contiene un solo elemento. Lo stimatore ARX riesce a stimare correttamente i parametri a_0 e b_0 della funzione di trasferimento ingresso-uscita $G_0(z) = b_0z^{-1}(1 + a_0z^{-1})^{-1}$ per un numero N di dati ed un rapporto segnale/rumore sufficientemente elevati mentre, ovviamente, ignora il parametro c_0 della funzione di trasferimento del disturbo $H_0(z) = (1 + c_0z^{-1})(1 + a_0z^{-1})^{-1}$. \square

Esempio 3 - Ritardo ingresso-uscita errato

Si consideri un sistema $FIR(n_b = 1, d_0 = 1)$

$$\mathcal{S} : \begin{cases} y_k = b_0u_{k-1} + e_k \\ e_k = \text{swn}(0, \sigma_e^2) \end{cases} \quad (10.5.3)$$

avente in ingresso un segnale auto-regressivo u_k , indipendente da e_k , generato tramite

$$u_k = \alpha_0u_{k-1} + w_k, \quad w_k = \text{swn}(0, \sigma_w^2), \quad |\alpha_0| < 1. \quad (10.5.4)$$

Si adotta una classe di modelli $\mathcal{M} = FIR(n_b = 1, d = 2)$ con predittore

$$\hat{y}_{k|\theta} = bu_{k-2}, \quad \theta = b \quad (10.5.5)$$

caratterizzato da un ritardo errato $d = 2 \neq d_0 = 1$. L'errore di predizione risulta

$$\varepsilon_{k|\theta} = y_k - \hat{y}_{k|\theta} = b_0u_{k-1} + e_k - bu_{k-2} = (b_0\alpha_0 - b)u_{k-2} + b_0w_{k-1} + e_k$$

da cui

$$V_\infty(\theta) = V_\infty(b) = E[\varepsilon_{k|\theta}^2] = (b_0\alpha_0 - b)^2 R_u(0) + b_0^2\sigma_w^2 + \sigma_e^2.$$

Pertanto è immediato constatare che

$$\hat{b}_\infty = \arg \min_b V_\infty(b) = b_0\alpha_0, \quad \text{con} \quad V_\infty(\hat{b}_\infty) = \sigma_e^2 + b_0^2\sigma_w^2.$$

Anche in questo esempio $\mathcal{S} \notin \mathcal{M}$, a causa della scelta errata del ritardo. Il predittore

$$\hat{y}_{k|\hat{\theta}_\infty} = b_0\alpha_0u_{k-2}$$

fornisce, fra tutti i predittori della forma (10.5.5), la varianza minima dell'errore di predizione se l'ingresso è della forma (10.5.4). Si verifica che la varianza di tale predittore è

compresa fra la varianza del predittore ottimo $\hat{y}_k = b_0 u_{k-1}$ associato al modello esatto e la varianza dell'uscita; infatti

$$E[(y_k - \hat{y}_k)^2] = \sigma_e^2 \leq E\left[\left(y_k - \hat{y}_{k|\hat{\theta}_\infty}\right)^2\right] = \sigma_e^2 + b_0^2 \sigma_w^2 \leq E[y_k^2] = \sigma_e^2 + \frac{b_0^2}{1 - \alpha_0^2} \sigma_w^2.$$

Si fa notare, quindi, che il modello identificato dipende dall'ingresso u_k utilizzato nell'esperimento. Se ad esempio $u_k = \text{swn}(0, \sigma_u^2)$, si ha

$$V_\infty(b) = (b_0^2 + b^2) \sigma_u^2 + \sigma_e^2$$

ed il modello identificato, per $N \rightarrow \infty$, è quello corrispondente al parametro $b = 0$ a cui è associato il predittore nullo $\hat{y}_{k|0} = 0$. \square

Esempio 4 - Identificazione di un sistema ARMAX con un modello OE

Si consideri un sistema $ARMAX(n_a = 1, n_b = 1, n_c = 1, d = 1)$

$$\mathcal{S} : \begin{cases} y_k + a_0 y_{k-1} = b_0 u_{k-1} + e_k + c_0 e_{k-1} \\ e_k = \text{swn}(0, \sigma_e^2), u_k = \text{swn}(0, \sigma_u^2), E[u_k e_k] = 0 \end{cases} \quad (10.5.6)$$

e la classe $\mathcal{M} = OE(n_b = 1, n_f = 1, d = 1)$ caratterizzata dal predittore

$$\hat{y}_{k|\theta} = \frac{b}{1 + fz^{-1}} u_{k-1}, \quad \theta = [b, f]^\top \in \Theta \triangleq \{[b, f]^\top : -1 < f < 1\}.$$

Si noti che se $c_0 \neq a_0$, allora $\mathcal{S} \notin \mathcal{M}$. Facendo ricorso all'analisi in frequenza,

$$V_\infty(\theta) \propto \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{|\Delta G|^2}{|H|^2} \varphi_u + \frac{|H_0|^2 \sigma_e^2}{|H|^2} \right) d\omega$$

e tenendo conto che per la struttura OE risulta $H(e^{j\omega}, \theta) = 1$, si ha

$$\hat{\theta}_\infty = \arg \min_{\theta \in \Theta} \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta G(e^{j\omega}, \theta)|^2 \varphi_u(\omega) d\omega.$$

È evidente che $\hat{\theta}_\infty$ dipende in modo cruciale dalla scelta dell'ingresso u_k , tramite la densità spettrale $\varphi_u(\omega)$. A tale proposito si considerano i seguenti tre casi di segnale di ingresso.

Caso a) Rumore bianco - Se $u_k = \text{swn}(0, \sigma_u^2) \implies \varphi_u(\omega) = \sigma_u^2$, si ha

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_\infty : \Delta G(e^{j\omega}, \hat{\theta}_\infty) = 0, \forall \omega &\implies G(z, \hat{\theta}_\infty) = \frac{bz^{-1}}{1 + fz^{-1}} = G_0(z) = \frac{b_0 z^{-1}}{1 + a_0 z^{-1}} \\ &\implies \hat{\theta}_\infty = \begin{bmatrix} b_0 \\ a_0 \end{bmatrix} \implies \Theta_c = \left\{ \begin{bmatrix} b_0 \\ a_0 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Caso b) Ingresso costante - Se $u_k = \sigma_u \neq 0 \implies \varphi_u(\omega) = \sigma_u^2 \delta(\omega)$, si ha

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_\infty : \Delta G(e^{j0}, \hat{\theta}_\infty) = 0 &\implies G(1, \hat{\theta}_\infty) = \frac{b}{1+f} = G_0(1) = \frac{b_0}{1+a_0} \\ &\implies \Theta_c = \left\{ \theta = \begin{bmatrix} b \\ f \end{bmatrix} : \frac{b}{1+f} = \frac{b_0}{1+a_0} \right\}. \end{aligned}$$

Caso c) Ingresso sinusoidale - Se $u_k = \sqrt{2}\sigma_u \sin(\omega_0 k + \alpha) \implies \varphi_u(\omega) = \sigma_u^2 \delta(\omega - \omega_0) + \sigma_u^2 \delta(\omega + \omega_0)$, si ha

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_\infty : \Delta G(e^{j\omega_0}, \hat{\theta}_\infty) = 0 &\implies G(e^{j\omega_0}, \hat{\theta}_\infty) = G_0(e^{j\omega_0}) \\ &\implies \Theta_c = \left\{ \theta = \begin{bmatrix} b \\ f \end{bmatrix} : \frac{b}{e^{j\omega_0} + f} = \frac{b_0}{e^{j\omega_0} + a_0} \right\}. \end{aligned}$$

Pertanto se si utilizza in ingresso un rumore bianco si riesce ad identificare correttamente il modello ingresso-uscita, cioè la funzione di trasferimento $G(z)$. Viceversa, l'uso di un ingresso costante consente di stimare correttamente il guadagno in continua ad, analogamente, un ingresso sinusoidale comporta un perfetto accordo del modello identificato con il sistema vero alla frequenza della sinusoide mentre l'errore di modello può risultare arbitrariamente elevato a frequenze diverse da quella in ingresso. \square

10.6 Confronto fra strutture

La scelta di una classe di modelli \mathcal{M} appropriata per il sistema sotto esame rappresenta certamente uno degli aspetti cruciali per il successo dell'identificazione. In particolare si deve scegliere la tipologia di modello adottata (lineare/non lineare, a scatola nera/grigia, ecc.), l'ordine e la parametrizzazione. Dal momento che la parte più critica della procedura di identificazione è l'effettuazione dell'esperimento, che solitamente sottopone il sistema di interesse a condizioni di stress ed in molti casi richiede la sospensione della normale attività di esercizio a cui il sistema è adibito, mentre la fase di elaborazione dei dati sperimentali risulta a costo praticamente nullo, è conveniente utilizzare lo stesso insieme di dati per confrontare varie strutture di tipo, ordine e/o parametrizzazioni diverse. Data la classe di modelli \mathcal{M} con insieme dei parametri ammissibili $\Theta_{\mathcal{M}}$ si denota con

$$\hat{\theta}_N(\mathcal{M}) \triangleq \arg \min_{\theta \in \Theta_{\mathcal{M}}} V_N(\theta, z^N) \quad (10.6.1)$$

il vettore dei parametri ottimo e con

$$V_N(\mathcal{M}) \triangleq \min_{\theta \in \Theta_{\mathcal{M}}} V_N(\theta, z^N) = V_N(\hat{\theta}_N(\mathcal{M}), z^N) \quad (10.6.2)$$

il valore minimo della funzione obiettivo. Ingenuamente si potrebbe pensare di scegliere fra varie classi candidate $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_h$ la classe \mathcal{M}^* che fornisce il valore minimo della funzione obiettivo più basso, vale a dire

$$\mathcal{M}^* = \arg \min_{\mathcal{M} \in \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_h\}} V_N(\mathcal{M}). \quad (10.6.3)$$

Sfortunatamente, questo criterio di scelta privilegia sempre la classe di modelli più ampia (di ordine più elevato). Infatti,

$$\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \implies \hat{\theta}_N(\mathcal{M}_1) \in \Theta_{\mathcal{M}_2} \implies V_N(\mathcal{M}_2) \leq V_N(\mathcal{M}_1).$$

Pertanto se le classi $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \dots \subset \mathcal{M}_h$ sono annidate l'una dentro l'altra il criterio (10.6.3) fornirà sempre $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}_h$ anche se il sistema vero \mathcal{S} appartenesse ad una classe di modelli \mathcal{M}_i di ordine $i < h$ più basso. Questa considerazione suggerisce che il confronto fra classi di modelli basato sulla funzione obiettivo $V_N(\mathcal{M})$ definita in (10.6.2) risulta mal posto. Per ovviare a questo inconveniente si deve ridefinire la funzione obiettivo della classe \mathcal{M} in modo da cercare un compromesso fra qualità del modello (errore di predizione piccolo) e parsimonia (ridotto numero di parametri). A tale proposito si può considerare, in generale, un criterio di selezione della classe dei modelli della forma

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^* &= \arg \min_{\mathcal{M} \in \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_h\}} V(\mathcal{M}) \\ V(\mathcal{M}) &= f\left(N, n_\theta, V_M\left(\hat{\theta}_N(\mathcal{M}), \zeta^M\right)\right) \end{aligned} \quad (10.6.4)$$

dove ζ^M è un insieme di dati, di ampiezza M , usato per la validazione eventualmente diverso dall'insieme di dati z^N , di ampiezza N , usato per l'identificazione. Alcune scelte tipiche della funzione $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ danno luogo ai seguenti ben noti criteri di selezione della classe di modelli.

$$\text{Criterio PE: } V(\mathcal{M}) = PE(\mathcal{M}) = V_M\left(\hat{\theta}_N(\mathcal{M}), \zeta^M\right), \zeta^M \neq z^N$$

$$\text{Criterio FPE: } V(\mathcal{M}) = FPE(\mathcal{M}) = \frac{1 + n_\theta/N}{1 - n_\theta/N} V_M\left(\hat{\theta}_N(\mathcal{M}), \zeta^M\right)$$

$$\text{Criterio AIC: } V(\mathcal{M}) = AIC(\mathcal{M}) = 2 \frac{n_\theta}{N} + \ln V_M\left(\hat{\theta}_N(\mathcal{M}), \zeta^M\right)$$

$$\text{Criterio MDL: } V(\mathcal{M}) = MDL(\mathcal{M}) = \ln(N) \frac{n_\theta}{N} + \ln V_M\left(\hat{\theta}_N(\mathcal{M}), \zeta^M\right).$$

Si noti che il criterio PE non dipende dal numero di parametri ma richiede un insieme dati di validazione diverso da quello usato per l'identificazione (*cross-validazione*). Viceversa gli altri criteri includono esplicitamente una penalizzazione sulla complessità del modello ma, proprio per questo, non richiedono necessariamente un insieme di validazione diverso da quello di identificazione. Si può facilmente verificare, tramite sviluppo di Taylor al primo ordine, che se $n_\theta/N \ll 1$ allora $\ln FPE(\mathcal{M}) \cong AIC(\mathcal{M})$; pertanto i due criteri di selezione FPE e AIC risultano equivalenti per valori del numero di parametri molto inferiori al numero di dati.

Bibliografia

- [1] L. Ljung: *System identification: theory for the user*, Prentice Hall, 1999.
- [2] T. Soderstrom, P. Stoica: *System identification*, Prentice Hall, 1989.
- [3] S. Bittanti: *Identificazione dei modelli e controllo adattativo*, Pitagora, Bologna, 1997.