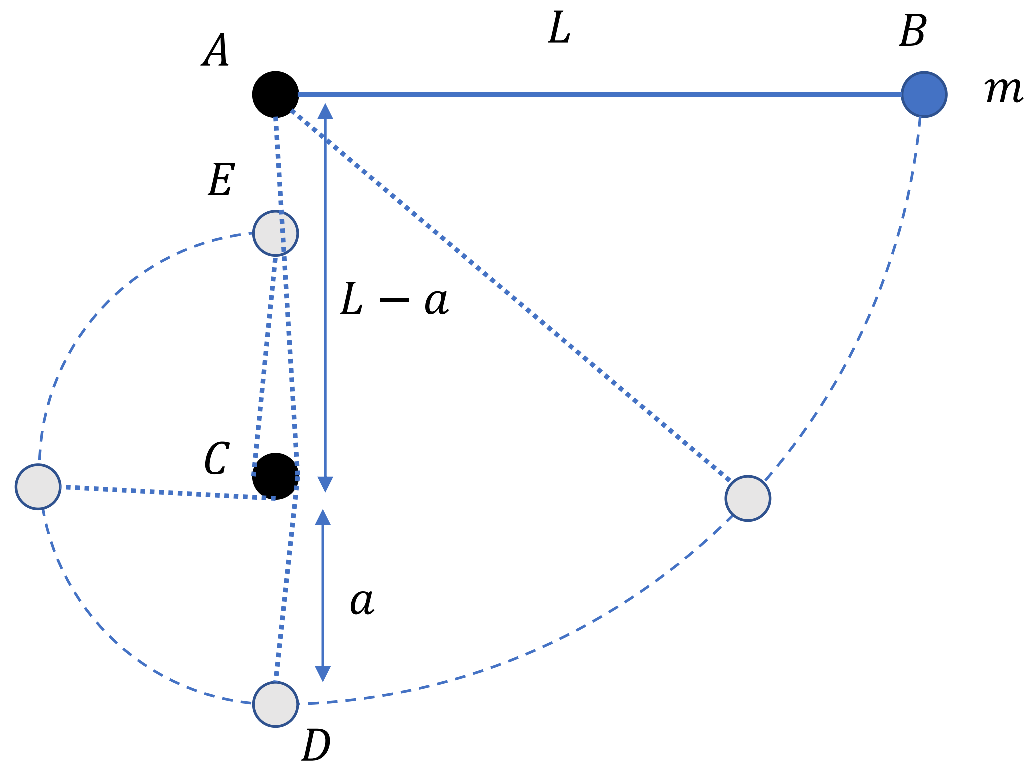
Compito Fisica 1 ETL 15/4/2020

Franco Bagnoli

Esercizio 1 (12 pt)



Il sistema è composto da un filo senza massa di lunghezza L, a cui è appesa una massa puntiforme m.

Il filo ruota senza attrito intorno al punto A e la massa m viene lasciata andare dalla posizione orizzontale B.

Sulla verticale sotto al punto A, ad una distanza $L-a$ da questo c'è un piolo C (di dimensioni trascurabili) attorno a cui può avvolgersi il filo.

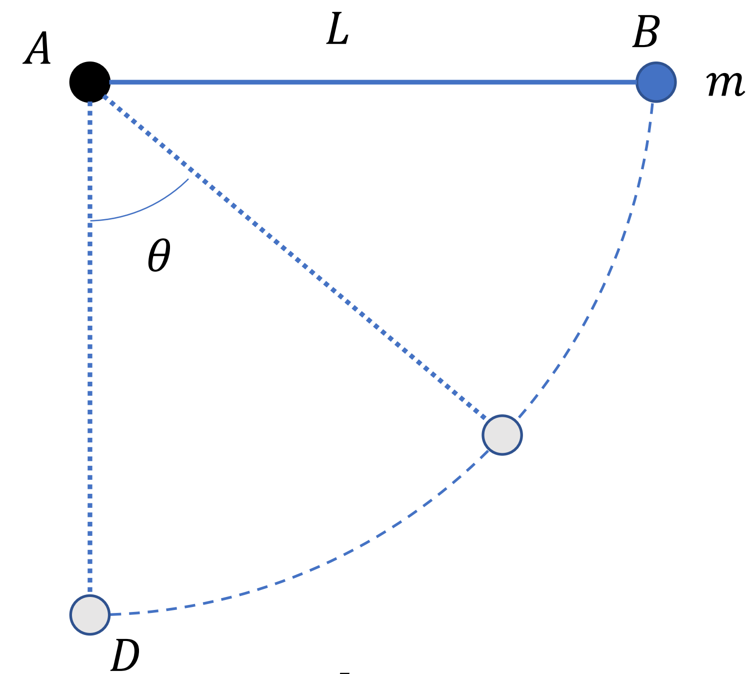
Domande esercizio 1

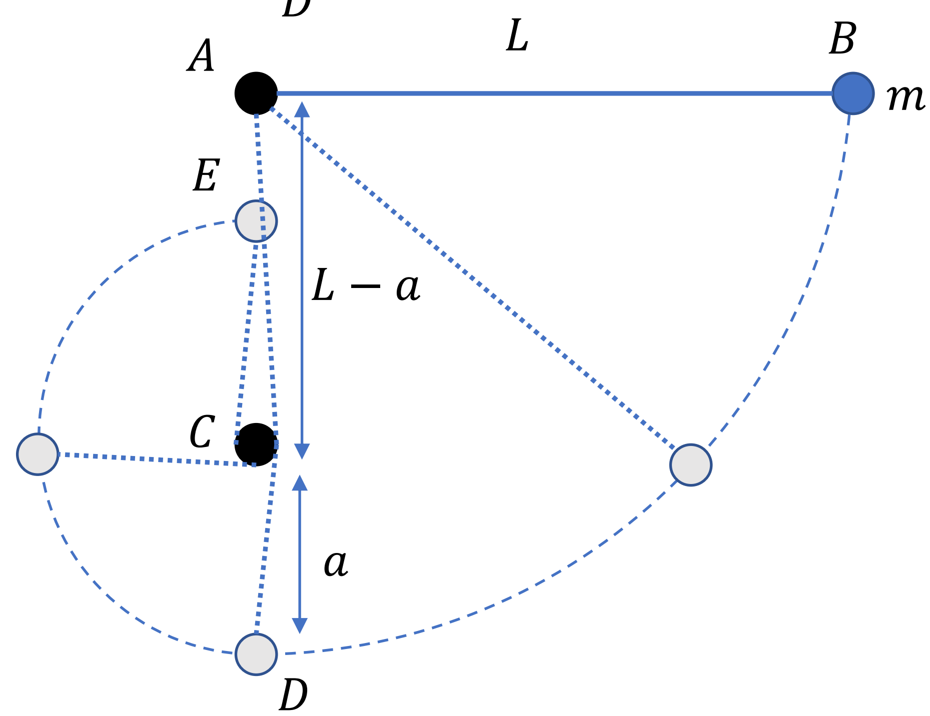
a) Scrivere l'equazione di moto dell'angolo $\theta(t)$ formato dal filo e dalla verticale dalla posizione iniziale B fino alla posizione verticale D. Che tipo di moto è?

b) Determinare la velocità v_D della massa in tale posizione.

c) Quando il filo arriva in posizione verticale (massa m in posizione D), questo si scontra con il piolo C.

Determinare il massimo valore di a per cui il filo comincia ad avvolgersi intorno al piolo rimanendo teso





Soluzione es. 1

a) Dalla conservazione dell'energia

$$-mgL\cos(\theta) + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 = \text{cost.} = 0$$

otteniamo

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2\text{g}}{\text{L}}\cos(\theta)$$

derivando ed eliminando la soluzione $\dot{\theta} = 0$ abbiamo

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin(\theta)$$

che descrive il moto di un pendolo. La stessa equazione si può ottenere dalla seconda cardinale con polo in A: il "momento d'inerzia" del punto è mL^2 e il momento della forza di gravità è $-mgL\sin(\theta)$

b) La velocità v_D è data da

$$v_D^2 = L^2\dot{\theta}_D^2 = 2gL; \quad v_D = \sqrt{2gL}\,.$$

Soluzione es. 1

c) Il problema è lo stesso del giro della morte, perché il filo sia teso occorre che ci sia una tensione $\tau \geq 0$ (come la reazione vincolare nel caso del giro). Mettendosi nel sistema di riferimento della massa m abbiamo che la forza centrifuga nella posizione E, mv_E^2/a, deve compensare τ e la forza di gravità (oppure, nel sistema fisso, si può dire che le forze $\tau + mg$ danno una accelerazione centripeta v_E^2/a).

Dalla conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}mv_E^2 - mg(L-2a) = 0$$

abbiamo

$$v_E^2 = 2\mathrm{g}(\mathrm{L} - 2a)$$

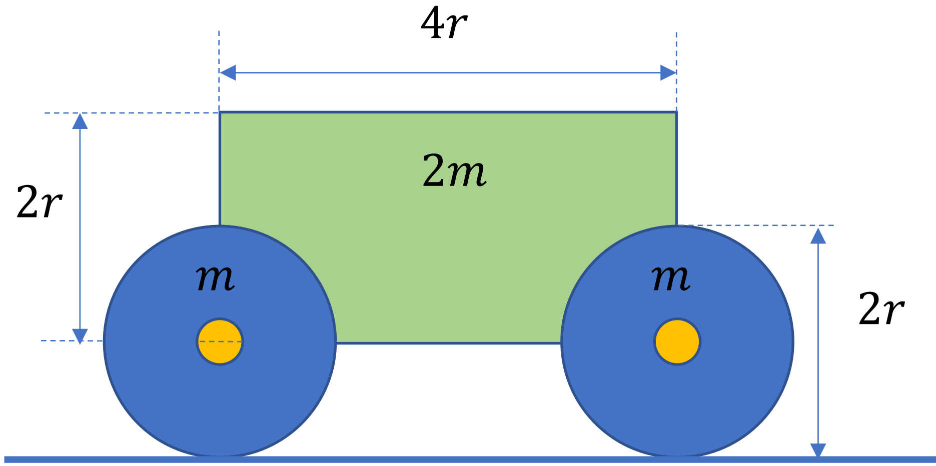
e da

$$\frac{mv_E^2}{a} - \tau - mg = 0$$

con $\tau \geq 0$ si ha

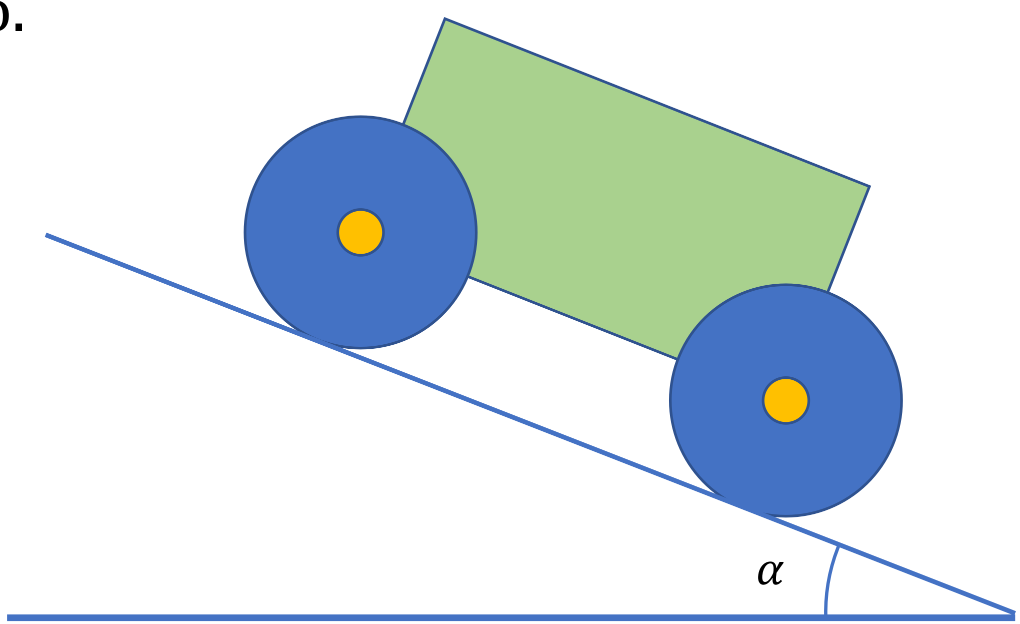
$$a \leq \frac{2}{5}L.$$

Esercizio 2 (12 pt)



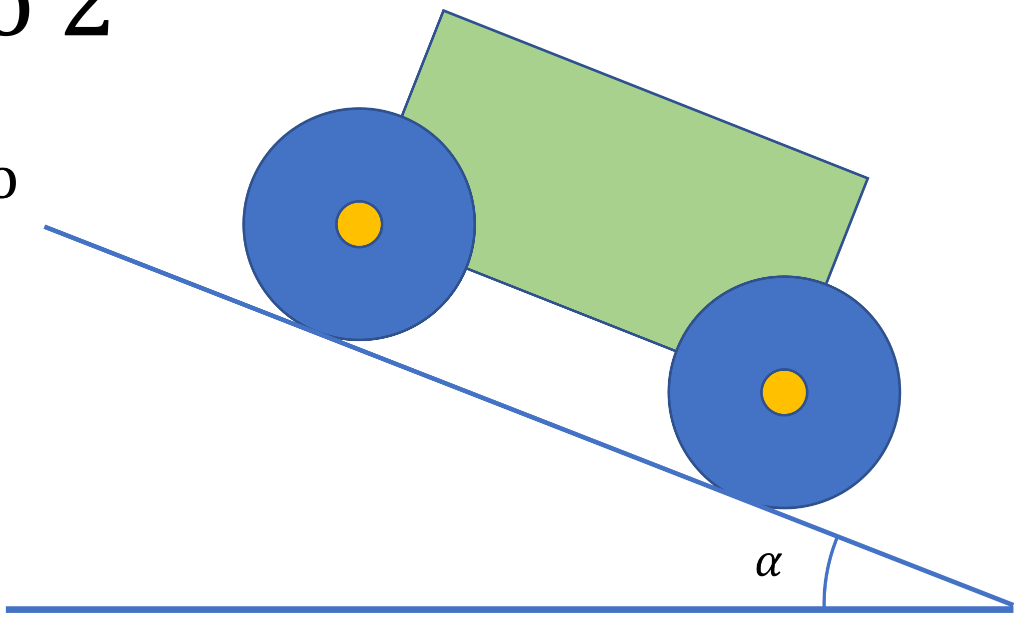
Un carrello è schematizzato (in 2D) come formato da due dischi di raggio r e massa m e da un rettangolo di lati $2r \times 4r$ di massa $2m$. I dischi ruotano intorno ai vertici del rettangolo.

Il carrello scende lungo un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale.



Inizialmente le ruote sono libere di ruotare e rotolano senza strisciare, in un secondo momento vengono istantaneamente bloccate (frenata improvvisa) e slittano con un coefficiente di attrito dinamico μ.

Domande esercizio 2



a) Determinare la velocità v del centro di massa del carrello dopo che questo ha percorso un tratto L lungo il piano inclinato partendo da fermo.

b) Ad un certo punto le ruote vengono bloccate, rendendo il carrello un blocco unico (che slitta con coefficiente di attrito μ). Determinare l'accelerazione a (lungo il piano inclinato) del centro di massa del carrello.

c) Sempre con le ruote bloccate, determinare l'inclinazione α in maniera che le ruote posteriori quasi si sollevino dal piano.

Soluzione es. 2

a) Usiamo la conservazione dell'energia. Se il centro di massa scende di un tratto L, l'energia potenziale diminuisce di $4mgL\sin(\alpha)$.

La relazione tra velocità v del carrello e velocità angolare ω delle ruote, se queste non slittano è

$$v = \omega\, r.$$

L'energia traslazionale del carrello è $K_c = \frac{1}{2} \cdot 4m \cdot v^2$, quella rotazionale di una ruota è $K_r = \frac{1}{2} I\, \omega^2 = \frac{1}{4} mr^2\omega^2 = \frac{1}{4} mv^2$.

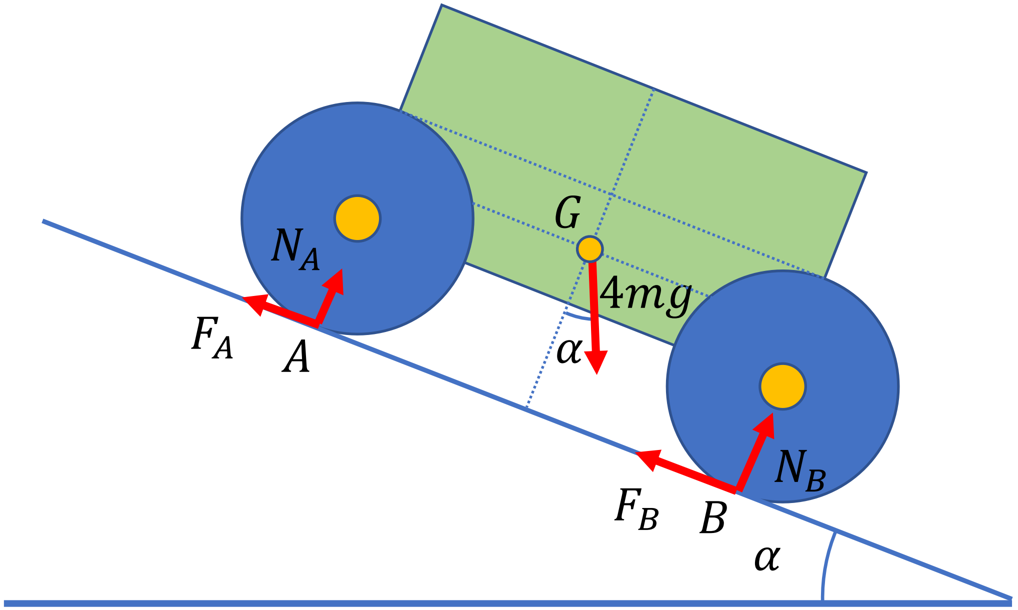
Quindi

$$\left(2 + \frac{1}{2}\right) mv^2 = \frac{5}{2} mv^2 = 4mgL\sin(\alpha)$$

$$v^2 = \frac{8}{5} gL\sin(\alpha)\,.$$

Soluzione es. 2

b) Il centro di massa del sistema è nel mezzo del carrello a una altezza da terra pari $h = 3/2r$.



Le forze sono schematizzate nella figura a lato.

Dalla prima cardinale otteniamo

$$N_A + N_B - 4mg\cos(\alpha) = 0$$
$$4mg\sin(\alpha) - F_A - F_B = 4ma$$

Dalla seconda cardinale con polo in A abbiamo

$$4rN_B - 4mgr\left(2\cos(\alpha) + \frac{3}{2}\sin(\alpha)\right) = 0$$

e con polo in B

$$-4rN_A + 4mgr\left(2\cos(\alpha) - \frac{3}{2}\sin(\alpha)\right) = 0$$

Soluzione es. 2

ovvero

$$N_B = mg\left(2\cos(\alpha) + \frac{3}{2}\sin(\alpha)\right)$$
$$N_A = mg\left(2\cos(\alpha) - \frac{3}{2}\sin(\alpha)\right)$$

che torna con la prima equazione della slide precedente.

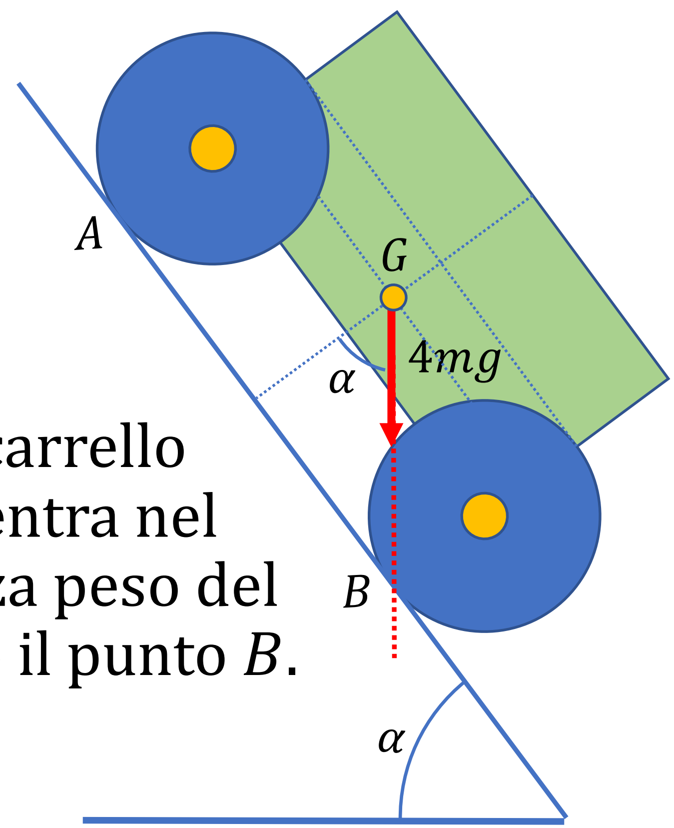
Quindi, dato che $F_A = \mu N_A$ e $F_B = \mu N_B$

$$a = g\,(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha))\,.$$

c) Se adesso imponiamo $N_A = 0$ otteniamo

$$\tan(\alpha) = \frac{4}{3},$$

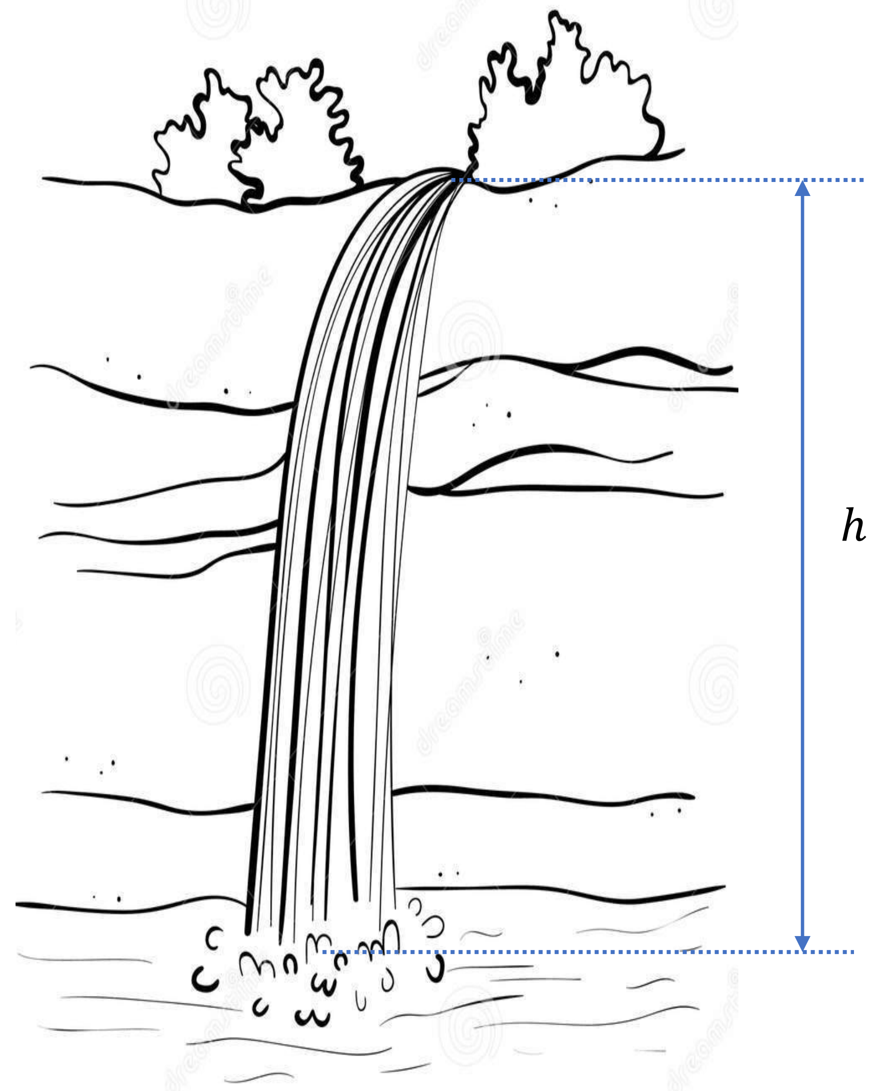
che è anche l'inclinazione "critica" per un carrello fermo (infatti il coefficiente di attrito non entra nel calcolo), e corrisponde al caso in cui la forza peso del centro di massa del carrello è diretta verso il punto B.



Esercizio 3 (12 pt)

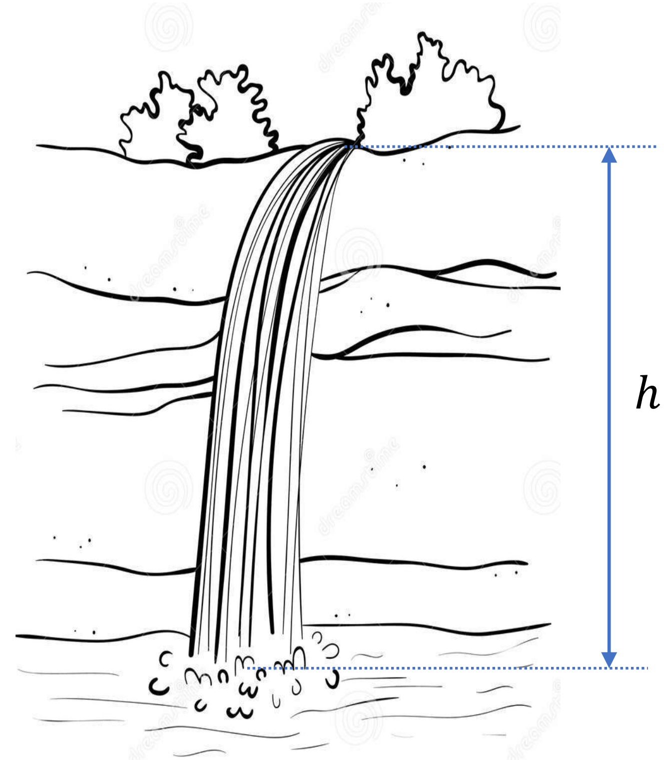
Prima di elaborare il suo famoso esperimento per misurare l'equivalente meccanico del calore (ovvero esprimere una caloria in J), Joule aveva tentato di misurare la differenza di temperatura dell'acqua prima e dopo che era caduta giù da una cascata.

Questo esercizio richiede calcoli numerici che però sono semplicissimi e si possono fare senza calcolatrice.



Domande esercizio 3

Supponiamo di avere una cascata alta $h = 120$ m. Approssimando $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$, il calore specifico dell'acqua con $c_V = 4000$ J/kg K e la temperatura ambiente con $T = 300$ K, determinare:



a) L'aumento ΔT di una unità di massa dell'acqua tra prima e dopo la caduta.

b) Il rapporto $L_{\mathrm{termico}}/L_{\mathrm{idraulico}}$ tra il lavoro ottenibile da una macchina di Carnot che sfrutti questa differenza di temperatura rispetto a quello ottenibile usando una turbina idraulica ideale (perfetta, senza sprechi).

c) La variazione $\Delta S/\Delta m$ di entropia dell'ambiente per unità di massa dovuta all'innalzamento di temperatura dell'acqua.

Soluzioni es. 3

a) L'energia potenziale dell'acqua si converte in energia cinetica e quindi in calore Q. Per una unità Δm di massa l'energia è quindi $\Delta E = \Delta m\, gh$. L'innalzamento di temperatura dell'acqua è dato da

$$Q = \Delta m\, gh = c_V \Delta m\, \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{gh}{c_V} = \frac{10 \cdot 120}{4000}\ K = \ 0.3\ K$$

b) Una turbina ideale converte tutta l'energia in ingresso in lavoro. Il rapporto tra lavoro estratto ed energia in ingresso per una macchina termica è rendimento η. Quindi il rapporto richiesto è proprio $\eta = \ \Delta T / T$ per una macchina di Carnot:

$$\frac{L_{\text{termico}}}{L_{\text{idraulico}}} = \eta = \frac{\Delta T}{T} = \frac{gh}{T c_V} = \frac{0.3}{300} = \frac{1}{1000} = 0.001$$

c) Per l'entropia,

$$\Delta S = \int_T^{T+\Delta T} \frac{dQ}{T} = \Delta m\, c_V \int_T^{T+\Delta T} \frac{dT}{T} = \Delta m\, c_V \ln \frac{T + \Delta T}{T}$$

$$= \Delta m\, c_V \ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right) \simeq \Delta m\, c_V \frac{\Delta T}{T}$$

e quindi

$$\frac{\Delta S}{\Delta m} \simeq \ \frac{c_V \Delta T}{T} = c_V \eta = \frac{4000}{1000}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot\ \mathrm{K}} = 4\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot\ \mathrm{K}}$$