Equazioni di Maxwell

Denotiamo con $\hat{A}$ il potenziale vettore magnetico, un campo vettoriale su $\mathbb{R}^3$, dipendente dal tempo, tale che

$\text{rotore}(\hat{A}) = B$ campo magnetico.

Ricordiamo

$$C^\infty(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\sim} \Omega^0(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\sim} \Omega^3(\mathbb{R}^3)$$

$$f \longmapsto f \longmapsto f\,dx\,dy\,dz$$

$$\mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\sim} \Omega^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\sim} \Omega^2(\mathbb{R}^3)$$

$$f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + f_3 \frac{\partial}{\partial z} \longmapsto f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz \longmapsto f_1\,dy\,dz - f_2\,dx\,dz + f_3\,dx\,dy$$

$$\Omega^0 \xrightarrow[d]{\text{grad}} \Omega^1 \xrightarrow[d]{\text{rotore}} \Omega^2 \xrightarrow[d]{\text{div}} \Omega^3$$

Denotiamo con φ il potenziale elettrico, φ è una funzione di x, y, z, t.

Interpretando $\hat{A} = A_1 dx + A_1 dy + A_3 dz$

$$\boxed{B = d\hat{A}}$$

Il campo elettrico

$$\boxed{E = -d\varphi - \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}}$$

Consideriamo su $\mathbb{R}^4$ il fibrato vettoriale $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}$, con gruppo di struttura $U(1)$.

La forma

$$\boxed{A = -\varphi\, dt + \hat{A}}$$

è una forma di connessione

per vale fibrato.

La curvatura, in questo caso,

è data da

rispetto a tutte le variabili

$$\boxed{F = dA = E \wedge dt + B}$$

se la scriviamo come 2-forma

più esattamente

$$\begin{array}{c|cccc} & dt & dx & dy & dz \\ \hline dt & 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ dx & E_1 & 0 & B_1 & -B_2 \\ dy & E_2 & -B_1 & 0 & B_3 \\ dz & E_3 & B_2 & -B_3 & 0 \end{array}$$

F è una 2-forma sullo spazio di Minkowski $\mathbb{R}^4$, con la metrica di Minkowski

$$ds^2 = \underset{t}{(dx^0)^2} - \underset{x}{(dx^1)^2} - \underset{y}{(dx^2)^2} - \underset{z}{(dx^3)^2}$$

Operatore $*$ di Hodge

$$* : \Omega^p(\mathbb{R}^4) \longrightarrow \Omega^{4-p}(\mathbb{R}^4)$$

se $\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_p} \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$

$$(*\alpha)_{j_1 \dots j_{4-p}} = \pm \alpha^{i_1 \dots i_p}$$

dove $\{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_p\}$ è una permutazione di $\{0, 1, 2, 3\}$ la cui parità determina il segno sopra e

$$\alpha^{i_1 \dots i_p} = g^{i_1 k_1} g^{i_2 k_2} \dots g^{i_p k_p} \alpha_{k_1 \dots k_p}$$

con

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$**(p\text{-forma}) = (-1)^{p+1} (p\text{-forma})$$

in particolare $*^2 = -id$ sulle 2-forme.

Le equazioni di Maxwell

$$\boxed{\begin{cases} dF = 0 \\ (*d*)(F) = J \end{cases}}$$

$\rho(\underline{x})$ = densità di carica $\in C^\infty(\mathbb{R}^4)$

$\underline{j}(\underline{x})$ = densità di correnti

$$J = -\rho\, dx^0 + j_1 dx^1 + j_2 dx^2 + j_3 dx^3$$

alcuni riferimenti:

https://www.math.ucla.edu/~vsv/papers/paper.pdf
https://www.ams.org/journals/bull/1979-01-02/S0273-0979-1979-14596-8/S0273-0979-1979-14596-8.pdf
http://math.uchicago.edu/~may/REU2017/REUPapers/Ling.pdf

Contesto generale

- Lo spazio delle connessioni è uno spazio affine di dimensione infinita:

Sia $P \xrightarrow{G} M$ un G-fibrato principale sulla varietà M.

Siano ω e $\omega' \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ due connessioni su P, con H e H' le relative distribuzioni orizzontali.

Sia $\tau = \omega - \omega'$

- τ è zero sui vettori verticali
- sia $\{U_\alpha, s_\alpha\}$ banalizzazione

locali di P, allora

$$\tau_\alpha = s_\alpha^* \tau = s_\alpha^* \omega - s_\alpha^* \omega' = \omega_\alpha - \omega'_\alpha$$

come cambia?

$$\tau_\beta = \omega_\beta - \omega_\beta' = g_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta}$$

$$- g_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha' g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta}$$

$$= g_{\alpha\beta}^{-1} \tau_\alpha g_{\alpha\beta}$$

Dunque $\{\tau_\alpha\}$ definisce un elemento $\tau \in \Omega^1(M, \mathrm{Ad}\,P)$

dove $\mathrm{Ad}\,P = P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$

quindi lo spazio delle connessioni:

$$\underbrace{\mathcal{A} = \omega + \Omega^1(M, \mathrm{Ad}P)}_{\text{spazio affine.}}$$

spazio vettoriale di dim ∞ in particolare contraibile

- gruppo delle trasformazioni di gauge $\mathcal{G}$.

Una trasformazione di gauge è un diffeomorfismo

$$\phi : P \longrightarrow P$$

G - equivariante.

Si ha dunque

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & P \arrow[dl, "\pi"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

- $\mathcal{G}$ agisce su $\mathcal{A}$:

localmente abbiamo

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\psi_\alpha"'] & \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[d, "\psi_\alpha"] \\
U_\alpha \times G \arrow[r, "\tilde{\Phi}_\alpha"] \arrow[r, bend left=60] & U_\alpha \times G
\end{tikzcd}$$

$\tilde{\Phi}_\alpha$ è G equivariante a destra, quindi su G, $\forall\, x \in U_\alpha$, una traslazione sinistra

che indichiamo con $\phi_\alpha(x)$:

$$\tilde{\phi}_\alpha(x, h) = (x, \phi_\alpha(x) h)$$

con $\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow G$

si trova che

$$\phi_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(x)\, \phi_\beta(x)\, g^{-1}_{\alpha\beta}(x)$$

Dunque $\{\phi_\alpha\}$ definisce

$$\phi \in \Omega^0(M, P \times_c G)$$

ossia

$$\mathcal{G} = \Omega^0(M, P \times_c G)$$

- azione di $\phi \in \mathcal{G}$ su $\mathcal{A}$

1. $H \subset TP$

$\phi : P \longrightarrow P$

$$\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$H \longmapsto \phi_* H$$

2. $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$

$$\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$\omega \longmapsto (\phi^{-1})^* \omega$$

3. $\{U_\alpha, s_\alpha\}$ $\quad s_\beta = g_{\beta\alpha} s_\alpha$ $\quad \{\omega_\alpha\}$

$$\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$\{\omega_\alpha\} \longmapsto \phi_\alpha \omega_\alpha \phi_\alpha^{-1} - d\phi_\alpha \phi_\alpha^{-1}$$

NOTA: le funzioni di transizione sono trasformazioni di gauge locali

NOTAZIONE: spesso le ω_α vengono denotate con A_α.

- Sia M varietà Riemanniana o pseudoriemanniana.

È definito l'operatore $*$ di Hodge

$$* : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{n-p}(M)$$

se la metrica ha segnatura (s,t)

$$*^2 : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^p(M)$$

$$*^2 = (-1)^t (-1)^{p(n-p)}\, id$$

- Ricordiamo che, date $\{A_\alpha\}$ le curvature $\{F_\alpha\}$ definisce un elemento

$$F_A \in \Omega^2(M, \overline{Ad(P)}^{\,P \times_{Ad} \mathfrak{g}})$$

campo di gauge (gauge field-strength)

Definiamo

$$|F_A|^2 = tr(F_A \wedge * F_A) \in \Omega^n(M)$$

Funzionale di Yang-Mills o lagrangiana di Yang-Mills

$$S_{YM}(A) = \int_M |F_A|^2$$

compatta

$$S_{YM} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

S_{YM} è invariante per l'azione del gruppo di gauge $\mathcal{G}$:

gruppo di simmetrie per la lagrangiana

NOTA x $\phi \in \mathcal{G}$ $\phi(x) \in G$ dipende da $x \in M$

$\boxed{\text{SIMMETRIA LOCALE}}$

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{G}} \xrightarrow{S_{YM}} \mathbb{R}$$

una connessione di Yang-Mills è un punto critico del funzionale di Yang-Mills.

La classe [A] è un punto critico se

$$\boxed{\begin{aligned} D_A * F_A &= 0 \\ D_A\, F_A &= 0 \end{aligned}}$$

equazioni di Yang-Mills

ricordiamo che $F_A \in \Omega^2(M, Ad(P))$ e A definisce una connessione, che indichiamo con D_A, sul fibrato vettoriale associato $Ad = P \times_{Ad} \mathfrak{g}$

$$D_A : \Omega^p(M, AdP) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M, AdP)$$

Se $M = \mathbb{R}^4$ con la metrica di Minkowski

$G = U(1)$

ritroviamo le equazioni di Maxwell omogenee.
Elettromagnetismo classico come teoria di gauge abeliana.

Se G è non abeliano, ad esempio $SU(n)$, la teoria di Yang-Mills fornisce un esempio di teoria di gauge non abeliana.

Le teorie di gauge sono rilevanti in diversi campi della fisica teorica, ad esempio per lo studio della dinamica delle particelle elementari.

https://empg.maths.ed.ac.uk/Activities/GT/

https://en.m.wikipedia.org/wiki/Gauge_theory