

# Geometria e Algebra Computazionale

## CL in Matematica, 2019/20

### Esercizi da portare all'esame

Si prepari un file m2 che permetta di risolvere due tra i seguenti problemi:

1. Si trovino le lunghezze al quadrato delle bisettrici di un triangolo di lati lunghi rispettivamente  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Si provi che un triangolo con due bisettrici uguali è isoscele ( si può utilizzare eventualmente il comando *factor* ) . Si trovino in aritmetica approssimata le lunghezze dei lati e l'area di un triangolo con bisettrici lunghe rispettivamente 2, 3, 4 e si verifichi che tale triangolo è unico.
2. i) Si trovi l'equazione implicita  $p(x, y) = 0$  della curva  $C_1$  di  $\mathbb{C}^2$  che è la chiusura dell'immagine della parametrizzazione razionale

$$\begin{cases} x &= \frac{2+3t+t^3}{1+t^3} \\ y &= \frac{2+t+3t^3}{1+t^2} \end{cases}$$

ii) Si provi che il punto  $(2, 2)$  è nonsingolare per  $C_1$  e si trovi l'equazione della retta tangente nel punto  $(2, 2)$ .

iii) si trovi l'ideale dei punti singolari di  $C_1$ .

iv) si trovi in aritmetica approssimata le coordinate dei punti singolari e dei flessi di  $C_1$ .

3. Si consideri il polinomio di grado 8  $f_a(x) = \prod_{i=1}^4 (x - i)^2 + ax$  al variare del parametro reale  $a$ .
  - i) Si trovi il discriminante  $d(a)$  di  $f_a$  rispetto a  $x$ . Si calcoli in aritmetica esatta il numero di radici reali e la relativa molteplicità di  $d(a)$ .
  - ii) Si calcoli in aritmetica approssimata le radici  $a_i$  di  $d(a)$ .
  - iii) Si calcoli al variare di  $a \in \mathbb{R}$  il numero di radici reali di  $f_a$  (*Suggerimento: tale numero è costante nelle componenti connesse di  $\mathbb{R} \setminus \cup_i \{a_i\}$* ).

4. Si decomponga l'algebra  $\mathbb{C}[x]/((x+1)(x+2)^2(x+3)^3)$  come somma diretta di tre anelli locali  $A_1, A_2, A_3$  e si trovino polinomi rappresentanti dei tre rispettivi elementi unità  $e_1, e_2, e_3$ . Si trovi un polinomio  $g(x)$  tale che

$$\begin{cases} g(-1) = 3 \\ g(-2) = 2, g'(-2) = 0 \\ g(-3) = 1, g'(-3) = 0, g''(-3) = 0 \end{cases}$$