Integrali di linea di seconda specie. Lavoro e circuitazione

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: **Luca Bisconti**

Firenze, 14/04/2020

Integrale di linea di un campo vettoriale

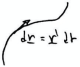
- Se consideriamo un campo vettoriale (3D) $\underline{F}$ che rappresenta una forza costante allora il lavoro compiuto da $\underline{F}$ dovuto a uno spostamento $\underline{r}$ è dato da $\boxed{L = \underline{F} \cdot \underline{r}}$.

Integrale di linea di un campo vettoriale

- Se consideriamo un campo vettoriale (3D) $\underline{F}$ che rappresenta una forza costante allora il lavoro compiuto da $\underline{F}$ dovuto a uno spostamento $\underline{r}$ è dato da $L = \underline{F} \cdot \underline{r}$.

- Più in generale, se abbiamo un campo vettoriale $\underline{F}$ (non necessariamente costante), allora il lavoro infinitesimo di $\underline{F}$ dovuto a uno spostamento infinitesimo $\boxed{d\underline{r} = dx\,\underline{i} + dy\,\underline{j} + dz\,\underline{k}}$ è per definizione:

$$\boxed{dL = \underline{F} \cdot d\underline{r} = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz}$$

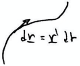


<u>Integrale di linea di un campo vettoriale</u>

- Se consideriamo un campo vettoriale (3D) $\underline{F}$ che rappresenta una forza costante allora il lavoro compiuto da $\underline{F}$ dovuto a uno spostamento $\underline{r}$ è dato da $L = \underline{F} \cdot \underline{r}$.

- Più in generale, se abbiamo un campo vettoriale $\underline{F}$ (non necessariamente costante), allora il lavoro infinitesimo di $\underline{F}$ dovuto a uno spostamento infinitesimo $d\underline{r} = dx\,\underline{i} + dy\,\underline{j} + dz\,\underline{k}$ è per definizione:

$$dL = \underline{F} \cdot d\underline{r} = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$$



Allora, se γ è un arco di curva regolare (regolare a tratti) parametrizzata da $\underline{r}(t) = \underline{i}\,x(t) + \underline{j}\,y(t) + \underline{k}\,z(t)$, $t \in [a,b]$ $\Longrightarrow$ definiamo l'integrale di linea (o lavoro) di $\underline{F}$ lungo γ l'integrale:

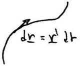
$$\boxed{L_\gamma(\underline{F}) := \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_a^b \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)\,dt = \int_a^b \Big(F_1(\underline{r}(t))\,x'(t) + F_2(\underline{r}(t))\,y'(t) + F_3(\underline{r}(t))\,z'(t) \Big)\,dt} \qquad (I)$$

Integrale di linea di un campo vettoriale

- Se consideriamo un campo vettoriale (3D) $\underline{F}$ che rappresenta una forza costante allora il lavoro compiuto da $\underline{F}$ dovuto a uno spostamento $\underline{r}$ è dato da $L = \underline{F} \cdot \underline{r}$.

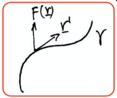
- Più in generale, se abbiamo un campo vettoriale $\underline{F}$ (non necessariamente costante), allora il lavoro infinitesimo di $\underline{F}$ dovuto a uno spostamento infinitesimo $d\underline{r} = dx\,\underline{i} + dy\,\underline{j} + dz\,\underline{k}$ è per definizione:

$$dL = \underline{F} \cdot d\underline{r} = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$$



Allora, se γ è un arco di curva regolare (regolare a tratti) parametrizzata da $\underline{r}(t) = \underline{i}\,x(t) + \underline{j}\,y(t) + \underline{k}\,z(t)$, $t \in [a,b]$ $\Longrightarrow$ definiamo l'integrale di linea (o lavoro) di $\underline{F}$ lungo γ l'integrale:

$$L_\gamma(\underline{F}) := \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_a^b \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)\,dt = \int_a^b \Big(F_1(\underline{r}(t))\,x'(t) + F_2(\underline{r}(t))\,y'(t) + F_3(\underline{r}(t))\,z'(t) \Big)\,dt \qquad (I)$$



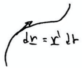
- L'integrale di linea in (I) si chiama integrale di linea di seconda specie

Integrale di linea di un campo vettoriale

- Se consideriamo un campo vettoriale (3D) $\underline{F}$ che rappresenta una forza costante allora il lavoro compiuto da $\underline{F}$ dovuto a uno spostamento $\underline{r}$ è dato da $L = \underline{F} \cdot \underline{r}$.

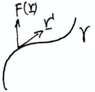
- Più in generale, se abbiamo un campo vettoriale $\underline{F}$ (non necessariamente costante), allora il lavoro infinitesimo di $\underline{F}$ dovuto a uno spostamento infinitesimo $d\underline{r} = dx\,\underline{i} + dy\,\underline{j} + dz\,\underline{k}$ è per definizione:

$$dL = \underline{F} \cdot d\underline{r} = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$$



Allora, se γ è un arco di curva regolare (regolare a tratti) parametrizzata da $\underline{r}(t) = \underline{i}\,x(t) + \underline{j}\,y(t) + \underline{k}\,z(t)$ $t \in [a,b]$ $\Rightarrow$ definiamo l'integrale di linea (o lavoro) di $\underline{F}$ lungo γ l'integrale:

$$L_\gamma(\underline{F}) := \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_a^b \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)\,dt = \int_a^b \Big(F_1(\underline{r}(t))\,x'(t) + F_2(\underline{r}(t))\,y'(t) + F_3(\underline{r}(t))\,z'(t) \Big)\,dt \quad (I)$$



- L'integrale di linea in (I) si chiama integrale di linea di seconda specie

Infatti:

se ho $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ allora $\boxed{\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(\underline{r}(s))\,\|\underline{r}'(s)\|\,ds}$ Integrale di linea di 1ª specie

se ho $\underline{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ allora $\boxed{\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz \Leftrightarrow (I)}$ Integrale di linea di 2ª specie osservazione: se γ è regolare a tratti, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ (diciamo che per esempio è l'unione di γ_i regolari $i=1,2$) allora vale che $\boxed{L_\gamma(F) = L_{\gamma_1}(F) + L_{\gamma_2}(F)}$

<u>osservazione</u>: se γ è regolare a tratti, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ (diciamo che per esempio è l'unione di γ_i regolari $i=1,2$) allora vale che $L_\gamma(F) = L_{\gamma_1}(F) + L_{\gamma_2}(F)$

- L'integrale di linea di prima specie è invariante per cambiamenti di parametrizzazione curva anche quando la nuova parametrizzazione ne cambia l'orientazione (cambia il verso di percorrenza della curva) osservazione: se γ è regolare a tratti, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ (diciamo che per esempio è l'unione di γ_i regolari $i=1,2$) allora vale che $L_\gamma(\underline{F}) = L_{\gamma_1}(\underline{F}) + L_{\gamma_2}(\underline{F})$

- L'integrale di linea di prima specie è invariante per cambiamenti di parametrizzazione curve anche quando la nuova parametrizzazione ne cambia l'orientazione (cambia il verso di percorrenza della curva)
- L'integrale di seconda specie, invece, cambia di segno se si cambia il verso di percorrenza della curva mentre invece continua ad essere invariante per cambiamenti di parametro che non alterano l'orientazione della curva

Allora se ho una curva γ e con $-\gamma$ indichiamo la curva percorsa in senso opposto segue che $\boxed{L_{-\gamma}(\underline{F}) = -L_\gamma(\underline{F})}$

<u>osservazione</u>: se γ è regolare a tratti, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ (diciamo che per esempio è l'unione di γ_i regolari $i=1,2$) allora vale che $L_\gamma(\underline{F}) = L_{\gamma_1}(\underline{F}) + L_{\gamma_2}(\underline{F})$

- L'integrale di linea di prima specie è invariante per cambiamenti di parametrizzazione curve anche quando la nuova parametrizzazione ne cambia l'orientazione (cambia il verso di percorrenza della curva)
- L'integrale di seconda specie, invece, cambia di segno se si cambia il verso di percorrenza della curva mentre invece continua ad essere invariante per cambiamenti di parametro che non alterano l'orientazione della curva

Allora se ho una curva γ e con $-\gamma$ indichiamo la curva percorsa in senso opposto segue che $L_{-\gamma}(\underline{F}) = -L_\gamma(\underline{F})$

<u>Esempio</u>

$\boxed{\underline{F} = (-y, x),\ F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,}$ calcoliamo il lavoro di $\underline{F}$ lungo la circonferenza di centro l'origine e di raggio 1 sia nel caso in cui sia percorsa in senso orario che antiorario:

1. $\underline{r}(t) = (\cos(t), \sin(t)),\ t \in [0, 2\pi]$ <u>(senso antiorario)</u> $\Rightarrow L_\gamma(\underline{F}) = \int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy = \int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{r}'\,dt$
$= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t)\cdot(-\sin t, \cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi$

2. $\underline{\gamma}(t) = (\cos(t), -\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ (senso orario)

$\Rightarrow L_\gamma(\underline{F}) = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{\gamma}'(t)\, dt =$

$= \int_0^{2\pi} (\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, -\cos t)\, dt = -\int_0^{2\pi} 1\, dt = -2\pi$

$\underline{F} = (-y, x)$

$\boxed{\text{Si vede che } L_{-\gamma}(\underline{F}) = -L_\gamma(\underline{F})}$

∎

2. $\underline{r}(t) = (\cos(t), -\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ (senso orario) $\Rightarrow L_\gamma(\underline{F}) = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{r}'(t)\, dt =$

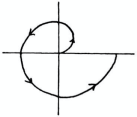
$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{(\sin t, \cos t)}_{\underline{F} = (-y, x)} \cdot (-\sin t, -\cos t)\, dt = -\int_0^{2\pi} 1\, dt = -2\pi$$

Si vede che $L_{-\gamma}(\underline{F}) = -L_\gamma(\underline{F})$

■

Esempio

$\boxed{\underline{F}(x,y) = (-y, x)}$, γ spirale piana percorsa in senso antiorario: $\underline{r}(t) = (t\cos(t), t\,\text{sen}(t))$, $t \in [0, 2\pi]$



Allora $\underline{r}'(t) = (\cos(t) - t\,\text{sen}(t), \text{sen}(t) + t\cos(t))$ e quindi $L_\gamma(\underline{F})$ diventa:

$$\boxed{\begin{aligned} L_\gamma(\underline{F}) &= \int_0^{2\pi} \overbrace{(-t\sin(t), t\cos(t)) \cdot (\cos(t) - t\,\text{sen}(t), \text{sen}(t) + t\cos(t))}^{F(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\cancel{-t\sin(t)\cos(t)} + t^2\sin^2(t) + \cancel{t\cos(t)\text{sen}(t)} + t^2\cos^2(t)\right) = \int_0^{2\pi} t^2\, dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\pi^3. \end{aligned}}$$

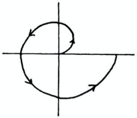
2. $\underline{r}(t) = (\cos(t), -\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ (senso orario) $\Rightarrow L_\gamma(\underline{F}) = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{r}'(t)\, dt =$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{(\sin t, \cos t)}_{\underline{F} = (-y, x)} \cdot (-\sin t, -\cos t)\, dt = -\int_0^{2\pi} 1\, dt = -2\pi$$

Si vede che $L_{-\gamma}(\underline{F}) = -L_\gamma(\underline{F})$ ∎

<u>Esempio</u>

$\underline{F}(x,y) = (-y, x)$, γ spirale piana percorsa in senso antiorario: $\underline{r}(t) = (t\cos(t), t\,\text{sen}(t))$, $t \in [0, 2\pi]$



Allora $\underline{r}'(t) = (\cos(t) - t\,\text{sen}(t), \text{sen}(t) + t\cos(t))$ e quindi $L_\gamma(\underline{F})$ diventa:

$$L_\gamma(\underline{F}) = \int_0^{2\pi} \overbrace{(-t\sin(t), t\cos(t)) \cdot (\cos(t) - t\,\text{sen}(t), \text{sen}(t) + t\cos(t))}^{F(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-t \cancel{\sin(t)\cos(t)} + t^2 \sin^2(t) + t \cancel{\cos(t)\,\text{sen}(t)} + t^2 \cos^2(t)\right) = \int_0^{2\pi} t^2\, dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\pi^3.$$

Con l'altra notazione:

$$\boxed{\begin{aligned} L_\gamma(\underline{F}) &= \int_\gamma F_1\, dx + F_2\, dy = \int_0^{2\pi} \Big(\underbrace{-t\sin(t)}_{F_1}\underbrace{(\cos(t) - t\sin(t))}_{x'(t)} + \underbrace{t\cos(t)}_{F_2}\underbrace{(\sin(t) + t\cos(t))}_{y'(t)}\Big) dt \\ &= \int_0^{2\pi} t^2\, dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\pi^3. \quad \blacksquare \end{aligned}}$$

2. $\underline{r}(t) = (\cos(t), -\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ (senso orario) $\Rightarrow L_\gamma(\underline{F}) = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{r}'(t)\, dt =$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, -\cos t)\, dt = -\int_0^{2\pi} 1\, dt = -2\pi$$

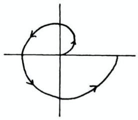
$\underline{F} = (-y, x)$

Si vede che $L_{-\gamma}(\underline{F}) = -L_\gamma(\underline{F})$

■

Esempio

$\underline{F}(x,y) = (-y, x)$, γ spirale piana percorsa in senso antiorario: $\underline{r}(t) = (t\cos(t), t\,\mathrm{sen}(t))$, $t \in [0, 2\pi]$



Allora $\underline{r}'(t) = (\cos(t) - t\,\mathrm{sen}(t), \mathrm{sen}(t) + t\cos(t))$ e quindi $L_\gamma(\underline{F})$ diventa:

$$L_\gamma(\underline{F}) = \int_0^{2\pi} \overbrace{(-t\sin(t), t\cos(t)) \cdot (\cos(t) - t\,\mathrm{sen}(t), \mathrm{sen}(t) + t\cos(t))}^{F(r(t)) \cdot r'(t)}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-t\sin(t)\cancel{\cos(t)} + t^2\sin^2(t) + t\cos(t)\cancel{\mathrm{sen}(t)} + t^2\cos^2(t)\right) = \int_0^{2\pi} t^2\, dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\pi^3.$$

Con l'altra notazione: $L_\gamma(\underline{F}) = \int_\gamma F_1\, dx + F_2\, dy = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-t\sin(t))}_{F_1}\underbrace{(\cos(t) - t\sin(t))}_{x'(t)} + \underbrace{t\cos(t)}_{F_2}\underbrace{(\sin(t) + t\cos(t))}_{y'(t)}\, dt$

$$= \int_0^{2\pi} t^2\, dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\pi^3.$$ ■

Definizione

Se γ è una curva chiusa $\Rightarrow$ il lavoro di $\underline{F}$ lungo γ si chiama CIRCUITAZIONE e $L_\gamma F =: \oint_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r}$

Campi vettoriali conservativi

- Se ripensiamo all'esempio relativo al calcolo del lavoro di $F(x,y) = (-y, x)$ lungo la circonferenza unitaria, osserviamo subito che in generale la circuitazione di un campo vettoriale non è nulla.
  Esistono però campi vettoriali speciali (detti conservativi) per i quali la circuitazione - lungo una qualsiasi curva regolare a tratti e chiusa - è nulla.

Campi vettoriali conservativi

- Se ripensiamo all'esempio relativo al calcolo del lavoro di $F(x,y) = (-y, x)$ lungo la circonferenza unitaria, osserviamo subito che in generale la circuitazione di un campo vettoriale non è nulla. Esistono però campi vettoriali speciali (detti conservativi) per i quali la circuitazione - lungo una qualsiasi curva regolare a tratti e chiusa - è nulla.

Definizione (Campo vettoriale conservativo)

Un campo $\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\left(A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \right)$, $F \in C^1(A)$, si dice conservativo se esiste una funzione $U : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $U \in C^2(A)$ tale che $\nabla U = \underline{F}$ in A

Cioè $\dfrac{\partial U}{\partial x} = F_1$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = F_2$, $\dfrac{\partial U}{\partial z} = F_3$ in A

Campi vettoriali Conservativi

- Se ripensiamo all'esempio relativo al calcolo del lavoro di $F(x,y) = (-y, x)$ lungo la circonferenza unitaria, osserviamo subito che in generale la circuitazione di un campo vettoriale non è nulla. Esistono però campi vettoriali speciali (detti conservativi) per i quali la circuitazione - lungo una qualsiasi curva regolare a tratti e chiusa - è nulla.

Definizione (Campo vettoriale Conservativo)

Un campo $\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $(A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2)$, $F \in C^1(A)$, si dice conservativo se esiste una funzione $U : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $U \in C^2(A)$ tale che $\nabla U = \underline{F}$ in A

Cioè $\dfrac{\partial U}{\partial x} = F_1$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = F_2$, $\dfrac{\partial U}{\partial z} = F_3$ in A

- U si dice potenziale di $\underline{F}$ in A, mentre $-U =: V =: E_{Pot}$ rappresenta l'energia potenziale associata a $\underline{F}$
- Il potenziale U di F, se $\exists$, è univocamente definito nell'aperto A a meno di una costante additiva, purché A sia connesso.

Campi vettoriali conservativi

- Se ripensiamo all'esempio relativo al calcolo del lavoro di $\underline{F}(x,y) = (-y, x)$ lungo la circonferenza unitaria, osserviamo subito che in generale la circuitazione di un campo vettoriale non è nulla. Esistono però campi vettoriali speciali (detti conservativi) per i quali la circuitazione - lungo una qualsiasi curva regolare a tratti e chiusa - è nulla.

Definizione (campo vettoriale conservativo)

Un campo $\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $(A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2)$, $\underline{F} \in C^1(A)$, si dice conservativo se esiste una funzione $U : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $U \in C^2(A)$ tale che $\nabla U = \underline{F}$ in A

Cioè $\dfrac{\partial U}{\partial x} = F_1$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = F_2$, $\dfrac{\partial U}{\partial z} = F_3$ in A

- U si dice potenziale di $\underline{F}$ in A, mentre $-U =: V =: E_{pot}$ rappresenta l'energia potenziale associata a $\underline{F}$

- Il potenziale U di $\underline{F}$, se $\exists$, è univocamente definito nell'aperto A a meno di una costante additiva, purché A sia connesso.

- L'aggettivo "conservativo" deriva dal fatto che, se una particella è in moto lungo una curva γ (con parametrizzazione $\underline{r}(t)$) sotto l'azione di una forza $\boxed{\underline{F} = \nabla U}$, allora l'energia meccanica totale della particella si conserva lungo il moto, ovvero si conserva
$$\boxed{E_{tot} = E_{cin} + E_{pot} = \tfrac{1}{2} m v^2 - U}$$

dove m è la massa della particella e $\boxed{v = v(t) = \| \underline{r}'(t) \|}$ è la velocità scalare della particella stessa.

$$\begin{cases} \boxed{E_{cin} = \frac{1}{2} m \| \underline{r}' \|^2 \quad \text{Energia cinetica} \quad \left(E_{cin} = \frac{1}{2} m \, \underline{r}' \cdot \underline{r}' \right)} \\ \boxed{E_{pot} = -U \quad \text{Energia potenziale}} \end{cases}$$

dove m è la massa della particella e $v = v(t) = \| \underline{r}'(t) \|$ è la velocità scalare della particella stessa.

$$\begin{cases} E_{cin} = \frac{1}{2} m \| \underline{r}' \|^2 & \text{Energia cinetica } \left(E_{cin} = \frac{1}{2} m\, \underline{r}' \cdot \underline{r}' \right) \\ E_{pot} = -U & \text{Energia potenziale} \end{cases}$$

notazioni

Sia $\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ l'equazione di moto del punto. $\boxed{\text{Se indichiamo con } \underline{v}(t) := \underline{r}'(t)}$

$\boxed{\text{allora } |\underline{v}|^2 = \underline{r}' \cdot \underline{r}' = v^2}$, inoltre $\boxed{\underline{a} = \underline{r}''(t)}$ e per la seconda legge della dinamica

velocità scalare al quadrato

si ha che $\boxed{\underline{F} = m \underline{a} = m \underline{r}''}$

dove m è la massa della particella e $v = v(t) = \|\underline{r}'(t)\|$ è la velocità scalare della particella stessa.

$$\begin{cases} E_{cin} = \frac{1}{2} m \|\underline{r}'\|^2 & \text{Energia cinetica} \quad \left(E_{cin} = \frac{1}{2} m\, \underline{r}' \cdot \underline{r}' \right) \\ E_{pot} = -U & \text{Energia potenziale} \end{cases}$$

Sia $\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ l'equazione di moto del punto. Se indichiamo con $\underline{v}(t) := \underline{r}'(t)$

allora $|\underline{v}|^2 = \underline{r}' \cdot \underline{r}' = v^2$, inoltre $\underline{a} = \underline{r}''(t)$ e per la seconda legge della dinamica

velocità scalare al quadrato

si ha che $\underline{F} = m\underline{a} = m\underline{r}''$

Adesso $\boxed{E_{tot}^{(t)} =: E(t) = \frac{1}{2} m\, \underline{r}'(t) \cdot \underline{r}'(t) - U(\underline{r}(t))}$

funzione del tempo t

e vale che $\boxed{\frac{d}{dt} E(t) = \left(\frac{1}{2} m\, \underline{r}''(t) \cdot \underline{r}'(t) + \frac{1}{2} m\, \underline{r}'(t) \cdot \underline{r}''(t) \right) - \nabla U(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)}$

dove m è la massa della particella e $v = v(t) = \| \underline{r}'(t) \|$ è la velocità scalare della particella stessa.

$$\begin{cases} E_{cin} = \frac{1}{2} m \|\underline{r}'\|^2 & \text{Energia cinetica } \left(E_{cin} = \frac{1}{2} m\, \underline{r}' \cdot \underline{r}' \right) \\ E_{pot} = -U & \text{Energia potenziale} \end{cases}$$

Sia $\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ l'equazione di moto del punto. Se indichiamo con $\underline{v}(t) := \underline{r}'(t)$

allora $|\underline{v}|^2 = \underline{r}' \cdot \underline{r}' = v^2$, inoltre $\underline{a} = \underline{r}''(t)$ e per la seconda legge della dinamica

$\uparrow$ velocità scalare al quadrato

si ha che $\underline{F} = m\underline{a} = m\underline{r}''$

Adesso $E_{tot}^{(t)} =: E(t) = \frac{1}{2} m\, \underline{r}'(t) \cdot \underline{r}'(t) - U(\underline{r}(t))$

$\uparrow$ funzione del tempo t

e vale che
$$\frac{d}{dt} E(t) = \left(\frac{1}{2} m\, \underline{r}''(t) \cdot \underline{r}'(t) + \frac{1}{2} m\, \underline{r}'(t) \cdot \underline{r}''(t) \right) - \nabla U(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= m\, \underline{r}''(t) \cdot \underline{r}'(t) - \nabla U(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) = \underbrace{m\, \underline{r}''(t)}_{= \underline{F}(\underline{r}(t))} \cdot \underline{r}'(t) - \underline{F} \cdot \underline{r}'(t) \\ &= \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) - \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) = 0 \end{aligned}}$$

dove m è la massa della particella e $v = v(t) = \|\underline{r}'(t)\|$ è la velocità scalare della particella stessa.

$$\begin{cases} E_{cin} = \frac{1}{2} m \|\underline{r}'\|^2 & \text{Energia cinetica } \left(E_{cin} = \frac{1}{2} m\, \underline{r}' \cdot \underline{r}' \right) \\ E_{pot} = -U & \text{Energia potenziale} \end{cases}$$

Sia $\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ l'equazione di moto del punto. Se indichiamo con $\underline{v}(t) := \underline{r}'(t)$ allora $|\underline{v}|^2 = \underline{r}' \cdot \underline{r}' = v^2$ (velocità scalare al quadrato), inoltre $\underline{a} = \underline{r}''(t)$ e per la seconda legge della dinamica si ha che $\underline{F} = m\underline{a} = m\underline{r}''$

Adesso $E_{tot}^{(t)} =: \underset{\substack{\uparrow \\ \text{funzione del tempo } t}}{E(t)} = \frac{1}{2} m\, \underline{r}'(t) \cdot \underline{r}'(t) - U(\underline{r}(t))$

e vale che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= \left(\frac{1}{2} m\, \underline{r}''(t) \cdot \underline{r}'(t) + \frac{1}{2} m\, \underline{r}'(t) \cdot \underline{r}''(t) \right) - \nabla U(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) \\ &= m\, \underline{r}''(t) \cdot \underline{r}'(t) - \nabla U(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) = \underbrace{m\, \underline{r}''(t)}_{= \underline{F}(\underline{r}(t))} \cdot \underline{r}'(t) - \underline{F} \cdot \underline{r}'(t) \\ &= \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) - \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) = 0 \end{aligned}$$

Allora $E'(t) = 0 \ \forall t$, quindi $\boxed{E(t) = E_{tot}(t) = \text{Costante}}$ (non varia al variare di t).