Integrali di linea di seconda specie. Lavoro e campi conservativi

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Firenze, 14/04/2020

Campi Conservativi

- Vediamo come si calcola il lavoro di un campo conservativo. Nel seguito A sarà un aperto connesso.

Lemma

Sia $\underline{F} = \nabla U$ un campo conservativo in A e sia γ una curva regolare (a tratti) contenuta in A e parametrizzata da $\underline{r} = \underline{r}(t)$, $t \in [a,b]$. Siano $p = \underline{r}(a)$ e $q = \underline{r}(b)$ gli estremi della curva.

Allora il lavoro di $\underline{F}$ lungo γ è dato da:

$$\boxed{\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = U(q) - U(p).}$$

Campi Conservativi

- Vediamo come si calcola il lavoro di un campo conservativo. Nel seguito A sarà un aperto connesso.

Lemma

Sia $\underline{F} = \nabla U$ un campo conservativo in A e sia γ una curva regolare (a tratti) contenuta in A e parametrizzata da $\underline{r} = \underline{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Siano $p = \underline{r}(a)$ e $q = \underline{r}(b)$ gli estremi della curva.

Allora il lavoro di $\underline{F}$ lungo γ è dato da:

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = U(q) - U(p).$$

- In questo caso il lavoro dipende solo dagli estremi del cammino e non dalla forma del medesimo. In particolare, se la curva è chiusa ($p = q$) $\Rightarrow$ la circuitazione di un campo conservativo è nulla

$$\boxed{L_\gamma(\underline{F}) = \oint_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \underline{0}.}$$

Campi conservativi

- Vediamo come si calcola il lavoro di un campo conservativo. Nel seguito A sarà un aperto connesso.

Lemma

Sia $\underline{F} = \nabla U$ un campo conservativo in A e sia γ una curva regolare (a tratti) contenuta in A e parametrizzata da $\underline{r} = \underline{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Siano $p = \underline{r}(a)$ e $q = \underline{r}(b)$ gli estremi della curva.

Allora il lavoro di $\underline{F}$ lungo γ è dato da: $\displaystyle\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = U(q) - U(p)$.

- In questo caso il lavoro dipende solo dagli estremi del cammino e non dalla forma del medesimo. In particolare, se la curva è chiusa ($p = q$) $\Rightarrow$ la circuitazione di un campo conservativo è nulla

$$L_\gamma(\underline{F}) = \oint_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \underline{0}.$$

Dimostrazione (assumiamo inizialmente $\gamma \in C^1$)

$$\text{(I)} \quad \boxed{\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_a^b \underbrace{\nabla U(\underline{r}(t))}_{\underline{F}(\underline{r}(t))} \cdot \underline{r}'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt} U(\underline{r}(t))\, dt = U(\underline{r}(t))\Big|_a^b = U(\underline{r}(b)) - U(\underline{r}(a)) = U(q) - U(p).}$$

Campi Conservativi

- Vediamo come si calcola il lavoro di un campo conservativo. Nel seguito A sarà un aperto connesso.

Lemma

Sia $F = \nabla U$ un campo conservativo in A e sia γ una curva regolare (a tratti) contenuta in A e parametrizzata da $\underline{r} = \underline{r}(t)$, $t \in [a,b]$. Siano $p = \underline{r}(a)$ e $q = \underline{r}(b)$ gli estremi della curva.

Allora il lavoro di F lungo γ è dato da: $\displaystyle\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = U(q) - U(p)$.

- In questo caso il lavoro dipende solo dagli estremi del cammino e non dalla forma del medesimo. In particolare, se la curva è chiusa ($p = q$) $\Rightarrow$ la circuitazione di un campo conservativo è nulla

$$L_\gamma(\underline{F}) = \oint_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \underline{0}.$$

Dimostrazione (assumiamo inizialmente $\gamma \in C^1$)

$$(\mathrm{I}) \quad \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_a^b \underbrace{\nabla U(\underline{r}(t))}_{\underline{F}(\underline{r}(t))} \cdot \underline{r}'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt} U(\underline{r}(t))\, dt = U(\underline{r}(t))\Big|_a^b = U(\underline{r}(b)) - U(\underline{r}(a)) = U(q) - U(p).$$

- Ricordo che se ho $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (oppure $U : A \to \mathbb{R}$) e $\underline{r}(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ se considero $U(\underline{r}(t))$ allora $\dfrac{d}{dt} U(\underline{r}(t)) = \nabla U(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)$ (Derivazione di funzioni composte)

prodotto scalare

Se $\underline{r}$ non è C^1 ma solo C^1 a tratti, allora si può suddividere $[a,b]$ nell'unione di n intervalli $[t_j, t_{j+1}]$ $j=1,\dots,n$ con $t_1 = a$ e $t_n = b$ con $\underline{r} \in C^1[t_j, t_{j+1}]$.

Se $\underline{r}$ non è C^1 ma solo C^1 a tratti, allora si può suddividere $[a,b]$ nell'unione di n intervalli $[t_j, t_{j+1}]$ $j=1,..,n$ con $t_1 = a$ e $t_n = b$ con $\underline{r} \in C^1[t_j, t_{j+1}]$. Applicando la formula (I) ad ogni intervallo:

$$\gamma = \bigcup_{j=1}^{n-1} \gamma_j$$

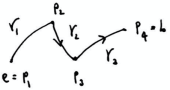
$$\boxed{\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \underline{F} \cdot d\underline{r}}_{\sum_{j=1}^{n-1} \int_{\gamma_j} \underline{F} \cdot d\underline{r}} = \sum_{j=1}^{n} \left[U(\underline{r}(t_{j+1})) - U(\underline{r}(t_j)) \right] = U(q) - U(p)}$$

Se $\underline{r}$ non è C^1 ma solo C^1 a tratti, allora si può suddividere $[a,b]$ nell'unione di n intervalli $[t_j, t_{j+1}]$ $j=1,\dots,n$ con $t_1 = a$ e $t_n = b$ con $\underline{r}\in C^1[t_j,t_{j+1}]$. Applicando la formula (I) ad ogni intervallo:

$$\int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \underline{F}\cdot d\underline{r}}_{\sum_{j=1}^{n-1}\int_{\gamma_j}\underline{F}\cdot d\underline{r}} = \sum_{j=1}^{n}\left[U(\underline{r}(t_{j+1})) - U(\underline{r}(t_j))\right] = U(q)-U(p)$$

$$\gamma = \bigcup_{j=1}^{n-1}\gamma_j$$

Esempio: se $[a,b]$ lo posso suddividere in tre intervalli $[t_j,t_{j+1}]$ $j=1,..,4$ con $\underline{r}\in C^1[t_j,t_{j+1}]$ e $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3$ con $a=P_1=\underline{r}(t_1)$, $P_2=\underline{r}(t_2)$, $P_3=\underline{r}(t_3)$, $P_4=\underline{r}(t_4)$



Allora

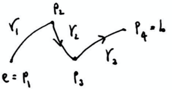
$$\boxed{\begin{aligned} L_\gamma(\underline{F}) &= \int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_1}\underline{F}\cdot d\underline{r} + \int_{\gamma_2}\underline{F}\cdot d\underline{r} + \int_{\gamma_3}\underline{F}\cdot d\underline{r} \\ &= \left(\cancel{U(P_2)} - U(P_1)\right) + \left(\cancel{U(P_3)} - \cancel{U(P_2)}\right) + \left(U(P_4) - \cancel{U(P_3)}\right) \\ &= U(P_4) - U(P_1). \end{aligned}}$$

Se $\underline{r}$ non è C^1 ma solo C^1 a tratti, allora si può suddividere $[a,b]$ nell'unione di n intervalli $[t_j, t_{j+1}]$ $j=1,..,n$ con $t_1 = a$ e $t_n = b$ con $\underline{r} \in C^1[t_j, t_{j+1}]$. Applicando le formule (I) ad ogni intervallo:

$$\int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \underline{F}\cdot d\underline{r}}_{\sum_{j=1}^{n-1} \int_{\gamma_j} \underline{F}\cdot d\underline{r}} = \sum_{j=1}^{n} \left[U(\underline{r}(t_{j+1})) - U(\underline{r}(t_j)) \right] = U(q) - U(p)$$

$$\gamma = \bigcup_{j=1}^{n-1} \gamma_j$$

<u>Esempio</u>: Se $[a,b]$ lo posso suddividere in tre intervalli $[t_j, t_{j+1}]$ $j=1,..,4$ con $\underline{r} \in C^1[t_j, t_{j+1}]$ e $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ con $a = P_1 = \underline{r}(t_1)$, $P_2 = \underline{r}(t_2)$, $P_3 = \underline{r}(t_3)$, $P_4 = \underline{r}(t_4)$



Allora $L_\gamma(\underline{F}) = \int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_1} \underline{F}\cdot d\underline{r} + \int_{\gamma_2} \underline{F}\cdot d\underline{r} + \int_{\gamma_3} \underline{F}\cdot d\underline{r}$

$$= \left(\cancel{U(P_2)} - U(P_1)\right) + \left(\cancel{U(P_3)} - \cancel{U(P_2)}\right) + \left(U(P_4) - \cancel{U(P_3)}\right)$$

$$= U(P_4) - U(P_1).$$

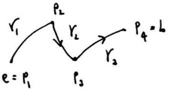
- In realtà, la condizione che la circuitazione di un campo vettoriale sia nulla lungo ogni curva semplice e chiusa contenuta in A caratterizza i campi conservativi come segue dal prossimo risultato.

Se $\underline{r}$ non è C^1 ma solo C^1 a tratti, allora si può suddividere $[a,b]$ nell'unione di m intervalli $[t_j, t_{j+1}]$ $j=1,..,m$ con $t_1 = a$ e $t_m = b$ con $\underline{r} \in C^1[t_j, t_{j+1}]$. Applicando la formula (I) ad ogni intervallo:

$$\int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \underline{F}\cdot d\underline{r}}_{\sum_{j=1}^{m-1}\int_{\gamma_j} \underline{F}\cdot d\underline{r}} = \sum_{j=1}^{m}\left[U(\underline{r}(t_{j+1})) - U(\underline{r}(t_j))\right] = U(q) - U(p)$$

$\gamma = \bigcup_{j=1}^{m-1} \gamma_j$

__Esempio:__ Se $[a,b]$ lo posso suddividere in tre intervalli $[t_j, t_{j+1}]$ $j=1,..,4$ con $\underline{r} \in C^1[t_j, t_{j+1}]$ e $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ con $a = P_1 = \underline{r}(t_1)$, $P_2 = \underline{r}(t_2)$, $P_3 = \underline{r}(t_3)$, $P_4 = \underline{r}(t_4)$



Allora $L_\gamma(\underline{F}) = \int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_1} \underline{F}\cdot d\underline{r} + \int_{\gamma_2} \underline{F}\cdot d\underline{r} + \int_{\gamma_3} \underline{F}\cdot d\underline{r}$

$$= \left(\cancel{U(P_2)} - U(P_1)\right) + \left(\cancel{U(P_3)} - \cancel{U(P_2)}\right) + \left(U(P_4) - \cancel{U(P_3)}\right)$$

$$= U(P_4) - U(P_1).$$

- In realtà, la condizione che la circuitazione di un campo vettoriale sia nulla lungo ogni curva semplice e chiusa contenuta in A caratterizza i campi conservativi come segue dal prossimo risultato.

comunque presi due punti t_1 e t_2 in $[a,b)$ con almeno uno dei due interno $\Rightarrow \underline{r}(t_1) \neq \underline{r}(t_2)$

Teorema (Caratterizzazione dei campi conservativi)

Sia $\underline{F} \in C^1(A)$, A aperto connesso. Allora le tre seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1.) Per ogni coppia di curve regolari a tratti γ_1 e γ_2 contenute in A e aventi lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale, allora:

$$\int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} \qquad \left(L_{\gamma_1}(\underline{F}) = L_{\gamma_2}(\underline{F}) \right)$$

(2.) Per ogni γ regolare (a tratti), semplice, chiusa e contenuta in A, allora $\oint_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0$

(3.) $\underline{F}$ è conservativo, ovvero esiste $U \in C^2(A)$ t.c. $\nabla U = \underline{F}$.

Teorema (Caratterizzazione dei campi conservativi)

Sia $\underline{F} \in C^1(A)$, A aperto connesso. Allora le tre seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1.) Per ogni coppia di curve regolari a tratti γ_1 e γ_2 contenute in A e aventi lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale, allora: $\int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_2} \underline{F} \cdot d\underline{r}$ $\left(L_{\gamma_1}(\underline{F}) = L_{\gamma_2}(\underline{F}) \right)$

(2.) Per ogni γ regolare (a tratti), semplice, chiusa e contenuta in A, allora $\oint_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0$

(3.) $\underline{F}$ è conservativo, ovvero esiste $U \in C^2(A)$ t.c. $\nabla U = \underline{F}$.

Dimostrazione

$\boxed{\text{Facciamo vedere } (3.) \Rightarrow (2.),\ (2.) \Rightarrow (1.),\ (1.) \Rightarrow (3.)}$

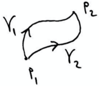
- L'implicazione $(3.) \Rightarrow (2.)$ già vista nel lemma precedente $\left(L_\gamma(\underline{F}) = U(P_{fin}) - U(P_{in}),\ \text{se } P_{fin} = P_{in} \Rightarrow L_\gamma(\underline{F}) = 0 \right)$

<u>Teorema</u> (Caratterizzazione dei campi conservativi)

Sia $\underline{F} \in C^1(A)$, A aperto connesso. Allora le tre seguenti affermazioni sono <u>equivalenti</u>:

(1.) Per ogni coppia di curve regolari a tratti γ_1 e γ_2 contenute in A e aventi lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale, allora:

$$\int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} \qquad \left(L_{\gamma_1}(\underline{F}) = L_{\gamma_2}(\underline{F}) \right)$$



(2.) Per ogni γ regolare (a tratti), semplice, chiusa e contenuta in A, allora

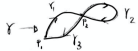
$$\oint_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0$$

(3.) $\underline{F}$ è conservativo, ovvero esiste $U \in C^2(A)$ t.c. $\nabla U = \underline{F}$.

<u>Dimostrazione</u>

Facciamo vedere (3.) $\Rightarrow$ (2.), (2.) $\Rightarrow$ (1.), (1.) $\Rightarrow$ (3.)

- L'implicazione (3.) $\Rightarrow$ (2.) già vista nel lemma precedente $\left(L_\gamma(\underline{F}) = U(P_{fin}) - U(P_{in}),\ \text{se } P_{fin} = P_{in} \Rightarrow L_\gamma(\underline{F}) = 0 \right)$



$\Rightarrow L_{\gamma_2}(\underline{F}) = 0$ e $L_{\gamma_1 \cup \gamma_3}(\underline{F}) = 0 \Rightarrow L_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3}(\underline{F}) = L_\gamma(\underline{F}) = 0$

<u>Teorema</u> (Caratterizzazione dei campi conservativi)

Sia $\underline{F} \in C^1(A)$, A aperto connesso. Allora le tre seguenti affermazioni sono <u>equivalenti</u>:

(1.) Per ogni coppia di curve regolari a tratti γ_1 e γ_2 contenute in A e aventi lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale, allora:

$$\int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} \qquad \left(L_{\gamma_1}(\underline{F}) = L_{\gamma_2}(\underline{F}) \right)$$

(2.) Per ogni γ regolare (a tratti), semplice, chiusa e contenuta in A, allora

$$\oint_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0$$

(3.) $\underline{F}$ è conservativo, ovvero esiste $U \in C^2(A)$ t.c. $\nabla U = \underline{F}$.

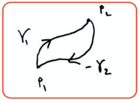
<u>Dimostrazione</u>

Facciamo vedere $(3.) \Rightarrow (2.)$, $(2.) \Rightarrow (1.)$, $(1.) \Rightarrow (3.)$

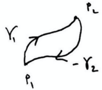
- L'implicazione $(3.) \Rightarrow (2)$ già vista nel lemma precedente $\left(L_\gamma(\underline{F}) = U(P_{fin}) - U(P_{in}),\ \text{se } P_{fin} = P_{in} \Rightarrow L_\gamma(\underline{F}) = 0 \right)$

- Per l'implicazione $(2.) \Rightarrow (1.)$ siano γ_1 e γ_2 contenute in A e con lo stesso punto iniziale e finale, per il resto disgiunte. Se cambiamo l'orientazione di γ_2

e consideriamo $-\gamma_2$ allora $\gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ è una curva semplice, chiusa, regolare a tratti e contenuta in A (ricordiamo che $\int_{-\gamma_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = - \int_{\gamma_2} \underline{F} \cdot d\underline{r}$).



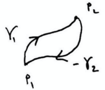
e consideriamo $-\gamma_2$ allora $\gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ è una curva semplice, chiusa, regolare a tratti e contenuta in A (ricordiamo che $\int_{-\gamma_2} \underline{F}\cdot d\underline{r} = -\int_{\gamma_2} \underline{F}\cdot d\underline{r}$).



Adesso usando la (2.) e l'additività dell'integrale di linea si ha che

$$\boxed{0 = \int_{\gamma_1 \cup (-\gamma_2)} \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_1} \underline{F}\cdot d\underline{r} + \int_{-\gamma_2} \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_1} \underline{F}\cdot d\underline{r} - \int_{\gamma_2} \underline{F}\cdot d\underline{r} \Rightarrow \int_{\gamma_1} \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_2} \underline{F}\cdot d\underline{r}}$$

e consideriamo $-\gamma_2$ allora $\gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ è una curva semplice, chiusa, regolare a tratti e contenuta in A (ricordiamo che $\int_{-\gamma_2} \underline{F}\cdot d\underline{r} = -\int_{\gamma_2} \underline{F}\cdot d\underline{r}$).



Adesso usando la (2.) e l'additività dell'integrale di linea si ha che

$$0 = \int_{\gamma_1 \cup (-\gamma_2)} \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_1} \underline{F}\cdot d\underline{r} + \int_{-\gamma_2} \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_1} \underline{F}\cdot d\underline{r} - \int_{\gamma_2} \underline{F}\cdot d\underline{r} \Rightarrow \int_{\gamma_1} \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_2} \underline{F}\cdot d\underline{r}$$

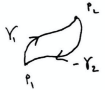
- Adesso vediamo (1.) $\Rightarrow$ (3.)

Fissiamo $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in A$ e consideriamo $P = (x, y, z) \in A$. Sia γ una curva orientata regolare (a tratti) da P_0 a P (estremi della curva γ). Poiché P_0 è fissato, allora l'integrale curvilineo di $\underline{F}$ lungo γ dipende solo da P è quindi ben definita la funzione:

$$\boxed{U(\underbrace{x,y,z}_{P}) = \int_{\gamma} \underline{F}\cdot d\underline{r}}$$

ben definita grazie a (1.)
non c'è dipendenza da γ

e consideriamo $-\gamma_2$ allora $\gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ è una curva semplice, chiusa, regolare a tratti e contenuta in A (ricordiamo che $\int_{-\gamma_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = -\int_{\gamma_2} \underline{F} \cdot d\underline{r}$).



Adesso usando le (2.) e l'additività dell'integrale di linea si ha che

$$0 = \int_{\gamma_1 \cup (-\gamma_2)} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} + \int_{-\gamma_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} - \int_{\gamma_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} \Rightarrow \int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_2} \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

- Adesso vediamo (1.) $\Rightarrow$ (3.)

Fissiamo $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in A$ e consideriamo $P = (x, y, z) \in A$. Sia γ una curva orientata regolare (a tratti) da P_0 a P (estremi della curva γ). Poiché P_0 è fissato, allora l'integrale curvilineo di $\underline{F}$ lungo γ dipende solo da P è quindi ben definita la funzione:

$$U(\underbrace{x, y, z}_{P}) = \int_{\gamma} \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

ben definita grazie a (1.)
non c'è dipendenza da γ

Vogliamo dimostrare che U è effettivamente un potenziale di $\underline{F}$ (cioè $\frac{\partial U}{\partial x} = F_1$, $\frac{\partial U}{\partial y} = F_2$, $\frac{\partial U}{\partial z} = F_3$ in A)

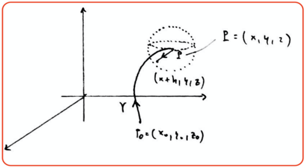
Calcoliamo, usando la definizione, la derivata parziale $\frac{\partial U}{\partial x}(\underline{x})$; per farlo congiungiamo $P = (x, y, z)$

Con il punto $(x+h, y, z)$ con un segmento rettilineo γ_1 di eq. parametriche $\underline{r}_1(t)=(x+th, y, z)$, $0\le t\le 1$

$h=\Delta x$ incremento nella direzione x

$\underline{r}_1'(t) = (h, 0, 0)$

(II)

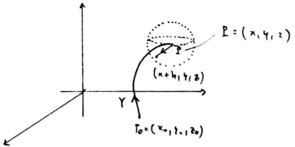


Con il punto $(x+h, y, z)$ con un segmento rettilineo γ_1 di eq. parametriche $\underline{r}_1(t)=(x+th, y, z)$, $0 \le t \le 1$

$h = \Delta x$ incremento nella direzione x

$\underline{r}_1'(t) = (h, 0, 0)$

(II)



Adesso vogliamo calcolare

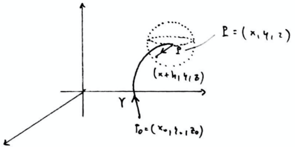
$$\lim_{h \to 0} \frac{U(x+h, y, z) - U(x, y, z)}{h} \qquad \text{(III)}$$

Con il punto $(x+h, y, z)$ con un segmento rettilineo γ_1 di eq. parametrica $\underline{r}_1(t)=(x+th, y, z)$, $0\le t\le 1$

$h=\Delta x$ incremento nella direzione x

$\underline{r}_1'(t) = (h, 0, 0)$

(II)



Adesso vogliamo calcolare

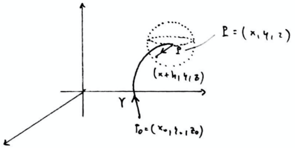
$$\lim_{h\to 0} \frac{U(x+h, y, z) - U(x, y, z)}{h} \qquad (III)$$

Osserviamo che : $\boxed{U(x+h, y, z) - U(x,y,z) = \int_{\gamma_1} \underline{F}\cdot d\underline{r}}$

Con il punto $(x+h, y, z)$ con un segmento rettilineo γ_1 di eq. parametriche $\underline{r}_1(t)=(x+th, y, z)$, $0\le t\le 1$

$h=\Delta x$ incremento nella direzione x

$$\underline{r}_1'(t) = (h, 0, 0) \qquad \text{(II)}$$



Adesso vogliamo calcolare

$$\lim_{h\to 0} \frac{U(x+h, y, z) - U(x, y, z)}{h} \qquad \text{(III)}$$

Osserviamo che:

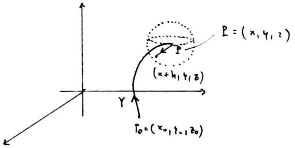
grazie alla (II)

$$\boxed{\begin{aligned} U(x+h, y, z) &= U(x,y,z) + \int_{\gamma_1} \underline{F}\cdot d\underline{r} = U(x,y,z) + \int_0^1 \left(F_1(x+th, y, z)h + F_2\cdot 0 + F_3\cdot 0\right)dt \\ &= U(x,y,z) + \int_0^1 F_1(x+th, y, z)\, h\, dt \end{aligned}}$$

Con il punto $(x+h, y, z)$ con un segmento rettilineo γ_1 di eq. parametriche $\underline{r}_1(t)=(x+th, y, z)$, $0 \le t \le 1$

$h = \Delta x$ incremento nella direzione x

$$\underline{r}_1'(t) = (h, 0, 0) \qquad \text{(II)}$$



Adesso vogliamo calcolare

$$\lim_{h \to 0} \frac{U(x+h, y, z) - U(x, y, z)}{h} \qquad \text{(III)}$$

Osserviamo che: $U(x+h, y, z) = U(x, y, z) + \int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} \underset{\text{grazie alla (II)}}{=} U(x, y, z) + \int_0^1 \left(F_1(x+th, y, z)h + F_2 \cdot 0 + F_3 \cdot 0\right) dt$

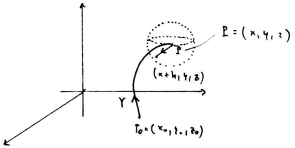
$$= U(x, y, z) + \int_0^1 F_1(x+th, y, z)\, h\, dt$$

$$\boxed{\underset{\tau = th \Rightarrow d\tau = h\,dt}{=} U(x, y, z) + \int_0^h F_1(x+\tau, y, z)\, d\tau} \qquad \text{(IV)}$$

Con il punto $(x+h, y, z)$ con un segmento rettilineo γ_1 di eq. parametrica $\underline{r}_1(t)=(x+th, y, z)$, $0\le t\le 1$

$h = \Delta x$ incremento nella direzione x

$$\underline{r}_1'(t) = (h, 0, 0) \qquad \text{(II)}$$



Adesso vogliamo calcolare

$$\lim_{h\to 0} \frac{U(x+h, y, z) - U(x, y, z)}{h} \qquad \text{(III)}$$

Osserviamo che:

$$U(x+h, y, z) = U(x,y,z) + \int_{\gamma_1} \underline{F}\cdot d\underline{r} \underset{\text{grazie alla (II)}}{=} U(x,y,z) + \int_0^1 \left(F_1(x+th, y, z)h + F_2\cdot 0 + F_3 \cdot 0\right) dt$$

$$= U(x,y,z) + \int_0^1 F_1(x+th, y, z)\, h\, dt$$

$$\underset{\tau = th \Rightarrow d\tau = h\,dt}{=} U(x,y,z) + \int_0^h F_1(x+\tau, y, z)\, d\tau \qquad \text{(IV)}$$

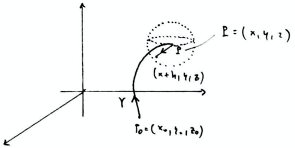
Allora la (III) diventa:

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\left(U(x,y,z) + \int_0^h F_1(x+\tau, y, z)\, d\tau\right)}^{\text{uso (IV)}} - U(x,y,z)}{h}}$$

Con il punto $(x+h, y, z)$ con un segmento rettilineo γ_1 di eq. parametrica $\underline{r}_1(t)=(x+th, y, z)$, $0 \le t \le 1$

$h = \Delta x$ incremento nella direzione x

$$\underline{r}_1'(t) = (h, 0, 0) \qquad \text{(II)}$$



Adesso vogliamo calcolare

$$\lim_{h \to 0} \frac{U(x+h, y, z) - U(x, y, z)}{h} \qquad \text{(III)}$$

Osserviamo che: $U(x+h, y, z) = U(x,y,z) + \int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = U(x,y,z) + \int_0^1 \left(F_1(x+th, y, z)h + F_2 \cdot 0 + F_3 \cdot 0\right) dt$

grazie alla (II)

$$= U(x,y,z) + \int_0^1 F_1(x+th, y, z)\, h\, dt$$

$$\underset{\tau = th \;\Rightarrow\; d\tau = h\,dt}{=} U(x,y,z) + \int_0^h F_1(x+\tau, y, z)\, d\tau \qquad \text{(IV)}$$

Allora la (III) diventa:

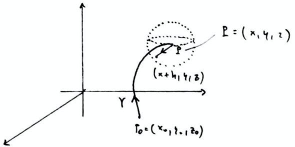
$$\lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{\left(U(x,y,z) + \int_0^h F_1(x+\tau, y, z)\, d\tau\right)}^{\text{uso (IV)}} - U(x,y,z)}{h} = \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{\int_0^h F_1(x+\tau, y, z)\, d\tau}{h}}$$

da L'Hôpital $\longrightarrow$ $\boxed{= \lim_{h \to 0} \frac{F_1(x+h, y, z)}{1} = F_1(x,y,z)}$

Con il punto $(x + h, y, z)$ con un segmento rettilineo γ_1 di eq. parametrica $\underline{r}_1(t)=(x+th, y, z)$, $0 \le t \le 1$

$h = \Delta x$ incremento nella direzione x

$$\underline{r}_1'(t) = (h, 0, 0) \qquad (\mathrm{II})$$



Adesso vogliamo calcolare

$$\lim_{h \to 0} \frac{U(x+h, y, z) - U(x, y, z)}{h} \qquad (\mathrm{III})$$

Osserviamo che: $U(x+h, y, z) = U(x,y,z) + \int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = U(x,y,z) + \int_0^1 \left(F_1(x+th, y, z)h + F_2 \cdot 0 + F_3 \cdot 0\right) dt$

grazie alla (II)

$$= U(x,y,z) + \int_0^1 F_1(x+th, y, z)\, h\, dt$$

$$= U(x,y,z) + \int_0^h F_1(x+\tau, y, z)\, d\tau \qquad (\mathrm{IV})$$

$\tau = th \Rightarrow d\tau = h\, dt$

uso (IV)

limite del rapporto incrementale

Allora la (III) diventa: $$\lim_{h \to 0} \frac{\left(U(x,y,z) + \int_0^h F_1(x+\tau, y, z)\, d\tau\right) - U(x,y,z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_0^h F_1(x+\tau, y, z)\, d\tau}{h}$$

da L'Hôpital $\longrightarrow$ $= \lim_{h \to 0} \frac{F_1(x+h, y, z)}{1} = \boxed{F_1(x,y,z) = \frac{\partial U(P)}{\partial x}}$ ■