Integrali di linea di seconda specie. Lavoro e campi conservativi

Integrali di linea di seconda specie. Lavoro e campi conservativi

Luca Bisconti



Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Il contenuto ha una finalità esclusivamente didattica, e viene rilasciato in uso agli

Creative Commons BY-NC-ND

Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate



Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: Luca Bisconti

· Veolismo come ci alcole il lavoro L un ampo consevetivo. Nel seguito A serà un experte connesso.

Lemma

Sie F = VV un campo Conservativo in A e sie V une wave regolare (2 troth) comtanute in A e prometivante de r=r(+) | t e [e, b]. Sieno p=r(e) e q=r(b) yli estremi delle Coux.

Allow it lews to E lungo
$$Y \stackrel{?}{\sim} lets le: \int_{Y} \underline{f} \cdot \underline{f} = U(\underline{g}) - U(\underline{f}).$$

· Veolismo come si alche il buoro L un ampo Gusevetiro. Nel seguito A sessi un zverte Gunesso.

Lemma

Sie $F = \nabla U$ un compo conservativo in $A \in Sie V$ une were rejohere (2 troth) contenute in A e prometivate le Y = Y(F) | E = E(F) | E = E(F

· In questo 650 il 12000 de pende solo dagli estremi dal Cammino e non della forma del modesimo In particolare, sa la caux à chins (r=q) =) le circuitezione di un campo conservation è molle

· Veolismo come si alcole il buoro L un aunyo Consevetivo. Nel seguito A sessi un experte Connesso.

Lemma

· In questo 650 il 120000 disperede solo degli estremi del commino e mon delle forma del medesimo In particohere, se la conve à chiese (r=q)= le circuitezione di un compo conservation è mille $L_Y(E)=\oint_Y E \cdot dx=0$.

$$(D) \overline{ \left[\int_{\gamma} \Gamma \cdot \dot{\xi}_{C} = \int_{\epsilon}^{1} \overline{\nabla U(xv)} \cdot \underline{Y}^{\dagger}(r) \, \dot{\xi}_{E} = \int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{4r} \, U(\underline{Y}(r)) \, \dot{\xi}_{F} = U(\underline{Y}cv) \, \Big|_{\epsilon}^{1} = U(\underline{Y}cv) - U(\underline{Y}(2)) = U(\underline{Y}) - U(\underline{Y}) \right] }$$

· Veolismo come si alcole il buoro L un aunyo Consevetivo. Nel seguito A sessi un experte Connesso.

Lemma

Six $F = \nabla U$ un campo conservativo in A e six V une wave regolare (2 troth) contenute in A e parametrizate la $Y = Y(H) + E(E_1 + J)$. Six on P = Y(E) + C of P(E) + C estremi delle coux. Allow it leaves by F = V(Y) + V(Y).

Allow :\ lewso & E lungo $Y \stackrel{?}{\sim} lets le: \int_{Y} \underline{F} \cdot l_{\underline{F}} = U(\underline{g}) - U(\underline{Y}).$

· In questo 650 il 12000 de prende solo degli estremi del Cemmino e non delle forma del modesimo In particolare, se la cense è chiese (r=q)= le circuitezione di un cango conservation è mille $L_Y(E)=\oint_Y E\cdot dx=0$.

Dimostrazione (essumiemo imizielmente YEC')

$$(I) \int_{\gamma} \int_{\Gamma} d\tau = \int_{\epsilon}^{1} \underbrace{\nabla U(r e)} \cdot \underline{r}^{1}(r) dt = \int_{\epsilon}^{1} \underbrace{\frac{1}{4r}} U(r (r)) dr = U(r e) \Big|_{\epsilon}^{1} = U(r (4)) - U(r (2)) = U(9) - U(9).$$

. MiGrab de se bo $U:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (oppure $U:A \to \mathbb{R}$) e $\underline{Y}(t):[eq2] \to \mathbb{R}^2$ se consider $U(\underline{Y}(t))$ ellower $\frac{1}{dt}U(\underline{Y}(t))=\nabla U(\underline{Y}(t))\cdot \underline{Y}(t)$ (Deriverione di Armeioni Composte) prodotto scalare

Se
$$\underline{r}$$
 now \hat{c} c' me solo c' e trelt', allow $c: pub$ soldividere $[e_1k]$ nell'unisue $k: n$ intervalli.

Ctj, t_{jn} $\int_{j=1,...,n}^{j=1,...,n} con t_1 = 2$ e $t_n = b$ con \underline{r} e c' $[c_1, t_{jn}]$. Applicando le formula (\underline{r}) sol ojui intervalli :

$$\int_{\underline{r}} \underline{f} \cdot d\underline{r} = \sum_{j=1}^{m} \int_{t_j}^{t_{jn}} \underline{f} \cdot d\underline{r} = \sum_{j=1}^{m} \left[U(\underline{r}(t_{jn}) - U(\underline{r}(t_j))] = U(q) - U(r) \right]$$

$$\sum_{j=1}^{m-1} \int_{\underline{f}} \underline{f} \cdot d\underline{r} = \sum_{j=1}^{m} \left[U(\underline{r}(t_{jn}) - U(\underline{r}(t_{jn})) - U(\underline{r}(t_{jn})) \right] = U(q) - U(r)$$

Se I mon è c' me solo c'e talti, allor a può suddividere [eit] mell'unione di n intervalli [tj, tin] j=1,..., u on t1=2 e tx= b ou r c c'[tj, tjn]. Appliando la formula (x) $\lambda = \bigcap_{i=1}^{k} \lambda^{i}.$ $\lambda = \bigcap_{i=1}^{k} \lambda^{i}.$ $\lambda = \bigcap_{i=1}^{k} \lambda^{i}.$ $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \left[\sum_{i=1}^{k} \left[$ 5-1 J F . 25

Esemplis: Se [e, L] lo posso woldividere in the intervalli [ti, tin] j=1,-,4 60 YE C [ty, tjm] . Y = Y, UY, UY, 60 2- 1- 1(h), 1= 1(t), 1=1(t), 1=1(t)

Se \underline{r} now \hat{c} \hat{c} me solo \hat{c} \hat{c} to the \hat{k} , allow \hat{c} pure solodivider $[e_1 L]$ nell'unique \hat{L} in intervallice $[e_1 L]$ nell'unique $[e_1 L]$ nell'

Esemplis: St [e, L] lo posso woldividere in the intervalli [t;,tin] j=1,-,4

Con recliti,tin] a Y=Y,UY,UY, Con 20 9= r(t,), P=r(t,), P=r(t,), Y=r(t,)

$$\begin{array}{ll} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & \\ & & & \\ &$$

. In roaltà, le Gustizione de la circuitezione di un compo vettoriele sie mulle lungo ogni.

Cueve semplica e chiusz Contenute in A (erzteritte i compi consenetivi come seque del prossimo visultato.

Se
$$\underline{r}$$
 now e^{λ} c' me solo c' e tratti, allow e^{λ} può suddividere [e,1] nell'unisue λ in intervalli.

Cti, t_{in} \underline{J} \underline{j} =1,..., n con \underline{t} , \underline{t} $\underline{t$

Esemple: Se [e, k] lo posso coddividere in the intervalli Ct_1 , t_1 , t_2] J=1,-,4Con $T\in C^{\dagger}[Ct_1]$, t_2 , $T\in Y$

. In roalts', le anolizione de la circuitezione di un ampo vettoriele sie mulle lungo ogni

conve semplia e chiesz Gentemute in A (2rztteritte i ampi Gusenetivi ame segue del

comunque presidue

pouti ti c to in (e, b) on elmono uno dei lue interno =) I(t,) + I(t)

11

Tronema (beatterizzazione dei bempi consenstivi)

Sie FEC'(A), A eperto Gamesso. Allon le tre seguenti affermezioni sono equintenti:

(1.) For oyn: coppie 1: wave regolar's talk Y_i a Y_i contens to in A a avent (o stass) punts inivide a (o stass) punt finale, allow: $\int_{Y_i} \underline{\Gamma} \cdot d\underline{r} = \int_{\Gamma} \underline{\Gamma} \cdot d\underline{r} \quad \left(L_{Y_i}(\underline{\Gamma}) = L_{Y_i}(\underline{\Gamma}) \right)$

(2.) Per oyui Y regolar (2 trasti), semplia, chiusa e contenute in A, ellora) F. dr =0

(3) $E \rightarrow GMSENZTINO, OWLDO (SEETE <math>D \in C^2(A)$ $f. (. <math>\nabla U = F.$

Teorema (Gantherizzazione dei Gempi Consantivi)

Sie FEC'(A), A specto Comesso. Allon le tre segrenti affernazioni sono equintenti:

(1.) Per office is conserved to the property of the property

(3) $E \stackrel{*}{\sim} Conservation, owns exists <math>U \in C^2(A)$ t.c. $\nabla U = \underline{F}$.

Dimostra sione

Teorema (Gantherizzazione dei Gempi Consantivi)

Sie FEC'(A), A experto Gamesso. Allow le tre segrenti affermezioni sono equinlenti:

(1.) Per ojn: coppie 12 conse rejolari e talli Y_1 < Y_2 contenute in A e aventi (o stesso punto inivisie e (o stesso punto finale), allow: $\int_{Y_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{Y_2} \underline{F}$

(3) $E \stackrel{*}{\sim} Conservation, owns exists <math>U \in C^2(A)$ t.c. $\nabla U = \underline{F}$.

Dimosta sione

Faccions rester (3) => (2.), (2.)=> (1), (1)=>(3)

• L'implicazione (3) => (2) già vista nel lemme precodecete $\left(L_{\gamma}(E) = U(P_{im}) - U(P_{im})_i \text{ se } P_{im} = P_{im} \right)$ $Y \rightarrow \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i} \\ Y_{i} \\ Y_{i} \end{array}}^{Y_{i}} \Rightarrow L_{\gamma}(E) = 2 \cdot \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) = 2 \end{array}}_{Y_{i}} + \underbrace{\begin{array}{c} Y_{i}(E) = 2 \\ Y_{i}(E) =$

Trovema (Gentlerizzazione dei Guipi Consenstivi)

Sie F E C'(A), A experto Commesso. Allow le tre seguenti affermezioni sono equislenti:

(1.) Per oyn: coppie Σ corse regolari e trathi Y_i e Y_a contenute in A e aventi (, stess) purpoint initiale e (o stess) purp finishe, allow: $\int_{Y_i} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{T_a} \underline{F} \cdot d\underline{r} \quad \left(L_{Y_i}(\underline{F}) = L_{Y_a}(\underline{F}) \right)$

(3) E à Guservation, owere essate DEC2(A) t.C.
$$\nabla U = \underline{F}$$
.

Dimosta sione

Feccieus restre (3) => (2.) , (2.) => (1), (1)=>(3)

- . L'implicazione (3.) \Rightarrow (2) gie viste nel lemme precadecete $\Big(L_{\gamma}(E) = U(P_{fin}) U(P_{fin})_i$ se $P_{fin} = P_{fin} = P_{fin}$
- . Per l'implicazione (2) =>(1.) Siemo Y, e Yz contenute in A e con lo slesso punt initàle
 e finale, per il respo disgionte. Se combiamo l'orientazione la Yz

e considerismo -
$$V_2$$
 elloro V_1 $U\left(-Y_2\right)$ è une (nue semplia, chisa, regolare a halti e contenute in A (ricooliemo UL $\int_{-Y_2}^{T_2} E \, dx = -\int_{T_2}^{T_2} dx$),

e considerizmo -
$$V_z$$
 elloro $V_1 \cup (-Y_z)$ è une conve semplia, chiasa, regolare a halli e contenute in A (richoliemo the $\int_{-Y_z}^{-1} F \cdot dx = -\int_{-Y_z}^{-1} F \cdot dx$),

Adesso visuolo le (2.) e l'edolitivitè bell'integelu li linee si le che

- e consisterizmo Ve allora Y v (-Yz) è une conse semplia, chiesa, regolare a halti
- e contenute in A (rigorliens the JF. dr = -JF. dr),

$$o = \int \stackrel{L}{E} \cdot q\vec{x} = \int \stackrel{L}{E} \cdot p\vec{x} + \int \stackrel{L}{E} \cdot \vec{q}\vec{x} = \int \stackrel{L}{E} \cdot \vec{q}\vec{x} - \int \stackrel{L}{E} \cdot \vec{q}\vec{x} - \int \stackrel{L}{E} \cdot \vec{q}\vec{x} = \int \stackrel{L}{E} \cdot \vec{q}\vec{x}$$

· Aolesso veolizmo (1.) => (3.)

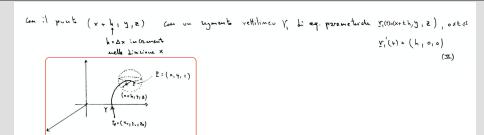
Fissions $P_{-}(x_1, x_2, z_3) \in A$ e considerium $P_{-}(x_1, x_1, z_3) \in A$. Six Y one where orientite regulare (a talk) de $P_{-}(x_1, x_2, z_3) \in A$ for the $P_{-}(x_1, x_2, z_3) \in A$. Six $P_{-}(x_1, x_2, z_3) \in A$ to a $P_{-}(x_1, x_2, z_3) \in A$. Six $P_{-}(x_1, x_2, z_3) \in A$ to a $P_{-}(x_1, x_2, z_3) \in A$. Six $P_{-}(x_1, x_2, z_3) \in A$ to a $P_{-}(x_1, x_2, z_3) \in A$. Six $P_{-}(x_1, x_2, z_3) \in A$ to a $P_{-}(x_1, x_2, z_3) \in A$. Six $P_{-}(x_1, x_2, z_3) \in A$ to a $P_{-}(x_1, x_2, z_3) \in A$. Six $P_{-}(x_1, x_2, z_3) \in A$ to a $P_{-}(x_1, x_2, z_3) \in A$. Six $P_{-}(x_1, x_2, z_3) \in A$ to a $P_{-}(x_1, x_2, z_3) \in A$. Six $P_{-}(x_1, x_2, z_3) \in A$.

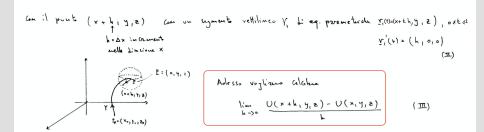
e consisterizmo - la ellora Y v(-Y2) è une come semplia, chisa, regolare a tratti

$$0 = \int \frac{\lambda' \cap (\lambda'')}{L \cdot q \lambda} = \int \frac{\lambda'}{L \cdot p \lambda} + \int \frac{\lambda'}{L} \cdot q \lambda = \int \frac{\lambda'}{L \cdot q \lambda} - \int \frac{\lambda'}{L \cdot q \lambda} \Rightarrow \int \frac{\lambda'}{L \cdot q \lambda} = \int \frac{\lambda'}{L \cdot q \lambda}$$

· Aolesso veolismo (1.) => (3.)

Voyliamo Domoshor ch U è effettivamente un potenziale d' F (cirè $\frac{\partial U}{\partial x} = F_1$, $\frac{\partial U}{\partial y} = F_2$, $\frac{\partial U}{\partial z} = F_3$ in A) (&|Glizmo, usemble le blimasme, le binate proxete $\frac{\partial U}{\partial x}(x)$); per perb congiumgiamo P=(x,y,z)





Con il pour te
$$(x + b_1, y_1 z)$$
 con un injurent vettilimes Y_i to eq. parametricul $Y_i(t) = (x + b_1 y_1 z)$, osted hear information $X_i(t) = (x + b_1 y_1 z)$ and the limiting $X_i(t) = (x + b_1 y_1 z)$.

Adverse voytians algebra $X_i(t) = (x + b_1 y_1 z) =$

Con il pour
$$(x + b_1 | y_1 z)$$
 Con un segmento vettilimeo Y_i di eq. paremetreda $Y_i(t)=(x+th_1y_1,z)$, o et el $h \cdot \Delta x$ increment $Y_i(t) = (h_1 \circ_i \circ_i)$

Adesso voylizmo (alchum X)

To (x_1, y_1, z)

To (x_1, y_1, z)
 (x_1, y_2, z)
 (x_2, y_3, z)
 (x_4, y_1, z)
 (x_5, y_2, z)
 (x_5, y_3, z)
 (x_5, y_5, z)
 $(x_5, y_5,$

grazie alla (II)

Con il pour
$$(x + h_1, y_1 z)$$
 Con un sugments vettilinco Y_i is eq. parametricul $Y_i(t) = (x + h_1, y_1, z)$, ost of h. Δx increments
$$Y_i(t) = (h_1, o_1, o_1)$$
 (III)

Adverse voylizero calcher

$$(x + h_1, y_1 z) = U(x + h_1, y_1 z) - U(x + y_1 z) + \int_{\mathbb{R}^n} (F_i(x + e h_1, y_1 e)h_i + F_i \cdot o_i + F_i \cdot o_i) dx$$

Osservizero che : $U(x + h_1, y_1 z) = U(x + y_1 z) + \int_{\mathbb{R}^n} (F_i(x + e h_1, y_1 e)h_i + F_i \cdot o_i + F_i \cdot o_i) dx$

= U(x, y, z) + J, F, (x+2, y, z) bdp

Can il pour to
$$(x + b_1 | y_1 \ge)$$
 can un exposent vettilise $(x + b_1 | y_1 \ge)$, osted $(x + b_1 | y_1 \ge)$ can un exposent vettilise $(x + b_1 | y_1 \ge)$, osted $(x + b_1 | y_1 \ge)$. Osted $(x + b_1 | y_1 \ge)$.

Adesso voglizzas (alcohae)

$$(x + b_1 | y_1 \ge)$$

$$(x + b$$

Con il pount
$$(x + b_1, y_1 z)$$
 can un aymente vellilimo $(x + b_1, y_1 z)$, ostel $(x + b_1, y_1 z)$ can un aymente vellilimo $(x + b_1, y_1 z)$, ostel $(x + b_1, y_1 z)$ can un aymente vellilimo

Allon le (III) divente: $\lim_{k\to\infty} \frac{\left(\bigcup_{x,y\in\mathbb{Z}}(x,y,z)+\int_{x}^{x}f_{x}(x+\epsilon,y,z)dx\right)-\bigcup_{x,y\in\mathbb{Z}}(x,y,z)}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\int_{x}^{x}f_{x}(x+\epsilon,y,z)dx}{k} = \lim_{x\to\infty} \frac{\int_{x}^{x}f_{x}(x+\epsilon,y,z)dx}{k} = \lim_$