Campi conservativi, campi irrotazionali e insiemi semplicemente connessi

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: **Luca Bisconti**

Firenze, 14/04/2020

Campi Conservativi

- Osserviamo che l'implicazione 1) $\Rightarrow$ 3.) del teorema che caratterizza i campi conservativi indica un modo per costruire una funzione potenziale di un campo $\underline{F}$, qualora questo risulti conservativo

Campi Conservativi

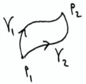
Osserviamo che l'implicazione 1.) $\Rightarrow$ 3.) del teorema che caratterizza i campi conservativi indica un modo per costruire una funzione potenziale di un campo $\underline{F}$, qualora questo risulti conservativo

Teorema (Caratterizzazione dei campi conservativi)

Sia $\underline{F} \in C^1(A)$, A aperto connesso. Allora le tre seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1.) Per ogni coppia di curve regolari a tratti γ_1 e γ_2 contenute in A e aventi lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale, allora:

$$\int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} \qquad \left(L_{\gamma_1}(\underline{F}) = L_{\gamma_2}(\underline{F}) \right)$$



(2.) Per ogni γ regolare (a tratti), semplice, chiusa e contenuta in A, allora

$$\oint_{\gamma} \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0$$

(3.) $\underline{F}$ è conservativo, ovvero esiste $U \in C^2(A)$ t.c. $\nabla U = \underline{F}$.

Campi Conservativi

- Osserviamo che l'implicazione 1) ⇒ 3.) del teorema che caratterizza i campi conservativi indica un modo per costruire una funzione potenziale di un campo $\underline{F}$, qualora questo risulti conservativo.

L'idea è la seguente: si fissa un punto P_0 in A e poi lo si congiunge con una γ qualsiasi (meglio se scelta in maniera opportuna), purché contenuta in A, con un punto generico $P=(x,y,z) \in A$. Allora un potenziale $U(x,y,z)$, che in particolare si annulla in P_0, è dato da $U(x,y,z) = \int_{\gamma} F \cdot dr = L_{\gamma}(\underline{F})$

γ ← ha per estremi P_0 e $P=(x,y,z)$

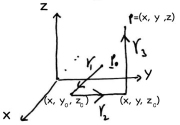
Campi Conservativi

Osserviamo che l'implicazione 1) $\Rightarrow$ 3.) del teorema che caratterizza i campi conservativi indica un modo per costruire una funzione potenziale di un campo $\underline{F}$, qualora questo risulti conservativo. L'idea è la seguente: si fissa un punto P_0 in A e poi lo si congiunge con una γ qualsiasi (meglio se scelta in maniera opportuna), purché contenuta in A, con un punto generico $P=(x,y,z) \in A$. Allora un potenziale $U(x,y,z)$, che in particolare si annulla in P_0, è dato da

$$U(x,y,z) = \int_{\gamma} F \cdot dr = L_\gamma(\underline{F})$$

$\gamma \leftarrow$ ha per estremi P_0 e $P=(x,y,z)$

- Metodo per il calcolo del potenziale $U(x,y,z) = L_\gamma(\underline{F})$: scegliamo γ come una spezzata formata da segmenti paralleli agli assi coordinati (e contenuta nell'aperto connesso A):



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$

$\gamma_1 \to \underline{r}_1(t) = (t, y_0, z_0)$ $t \in [x_0, x]$

$\gamma_2 \to \underline{r}_2(s) = (x, s, z_0)$, $s \in [y_0, y]$

$\gamma_3 \to \underline{r}_3(\ell) = (x, y, \ell)$, $\ell \in [z_0, z]$

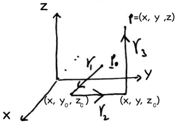
Campi Conservativi

Osserviamo che l'implicazione 1) $\Rightarrow$ 3.) del teorema che caratterizza i campi conservativi indica un modo per costruire una funzione potenziale di un campo $\underline{F}$, qualora questo risulti conservativo. L'idea è la seguente: si fissa un punto P_0 in A e poi lo si congiunge con una γ qualsiasi (meglio se scelta in maniera opportuna), purché contenuta in A, con un punto generico $P=(x,y,z)\in A$. Allora un potenziale $U(x,y,z)$, che in particolare si annulla in P_0, è dato da

$$U(x,y,z) = \int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} = L_\gamma(\underline{F})$$

γ ha per estremi P_0 e $P=(x,y,z)$

- Metodo per il calcolo del potenziale $U(x,y,z) = L_\gamma(\underline{F})$: scegliamo γ come una spezzata formata da segmenti paralleli agli assi coordinati (e contenuta nell'aperto connesso A):



$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

$$\boxed{U(x,y,z)=\int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_{x_0}^{x} F_1(t,y_0,z_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} F_2(x,t,z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} F_3(x_0,y_0,t)\,dt}$$

$\gamma_1 \to \underline{r}_1(t) = (t, y_0, z_0)$, $\quad t\in[x_0,x]$

$\gamma_2 \to \underline{r}_2(s) = (x, s, z_0)$, $\quad s\in[y_0,y]$

$\gamma_3 \to \underline{r}_3(\ell) = (x, y, \ell)$, $\quad \ell\in[z_0,z]$

- Osservazione: Il teorema implica che se $\exists$ una curva chiusa, semplice, regolare (a tratti) con $\gamma \subset A$ tale che $L_\gamma(\underline{F}) = \oint_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} \neq 0 \Rightarrow \underline{F}$ non è conservativo.

- <u>Osservazione</u>: Il teorema implica che se $\exists$ una curva chiusa, semplice, regolare (a tratti) con $\gamma \subset A$ tale che $L_\gamma(\underline{F}) = \oint_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} \neq 0 \Rightarrow \underline{F}$ non è conservativo.

- <u>osservazione</u>: Se $\underline{F}$ è conservativo $\Rightarrow \underline{F} = \nabla U$ e dunque $\text{rot}\, \underline{F} = \text{rot}(\nabla U) = \underline{0} \Rightarrow$ un campo conservativo è <u>sempre</u> <u>irrotazionale</u>. Se $\text{rot}\, \underline{F} \neq 0$ in $A \Rightarrow \underline{F}$ non è conservativo.
<u>Non vale il viceversa</u>: può essere $\text{rot}\, \underline{F}(P) = \underline{0}$ $\forall$ punto $P \in A$ ma $\underline{F}$ non conservativo in A (condizione non sufficiente)

- Osservazione: Il teorema implica che se $\exists$ una curva chiusa, semplice, regolare (a tratti) con $\gamma \subset A$ tale che $L_\gamma(\underline{F}) = \oint_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} \neq 0 \Rightarrow \underline{F}$ non è conservativo.

- osservazione: se $\underline{F}$ è conservativo $\Rightarrow \underline{F} = \nabla U$ e dunque $\text{rot}\, \underline{F} = \text{rot}(\nabla U) = \underline{0} \Rightarrow$ un campo conservativo è sempre irrotazionale. Se $\text{rot}\, \underline{F} \neq 0$ in $A \Rightarrow \underline{F}$ non è conservativo.

  Non vale il viceversa: può essere $\text{rot}\, \underline{F}(P) = \underline{0}$ $\forall$ punto $P \in A$ ma $\underline{F}$ non conservativo in A (condizione non sufficiente)

Esempio

Consideriamo il campo $\boxed{\underline{F}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)}$ che ha rotore nullo ma non è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ ← $\underline{F}$ è definito qui

In questo caso (abbiamo un campo piano) $\text{rot}(\underline{F}) = \underline{0} \Leftrightarrow \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$ poiché siamo in $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \text{rot}\, \underline{F} = \underline{0} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}}$$

- Osservazione: Il teorema implica che se $\exists$ una curva chiusa, semplice, regolare (a tratti) con $\gamma \subset A$ tale che $L_\gamma(\underline{F}) = \oint_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} \neq 0 \Rightarrow \underline{F}$ non è conservativo.

- osservazione: se $\underline{F}$ è conservativo $\Rightarrow \underline{F} = \nabla U$ e dunque $\text{rot}\,\underline{F} = \text{rot}(\nabla U) = \underline{0} \Rightarrow$ un campo conservativo è sempre irrotazionale. Se $\text{rot}\,\underline{F} \neq 0$ in $A \Rightarrow \underline{F}$ non è conservativo.

  Non vale il viceversa: può essere $\text{rot}\,\underline{F}(P) = \underline{0}$ $\forall$ punto $P \in A$ ma $\underline{F}$ non conservativo in A (condizione non sufficiente)

Esempio

Consideriamo il campo $\underline{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ che ha rotore nullo ma non è conservativo in $\underline{\underline{\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}}} \leftarrow \underline{F}$ è definito qui

In questo caso (abbiamo un campo piano) $\text{rot}(\underline{F}) = \underline{0} \Leftrightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ poiché siamo in $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \text{rot}\,\underline{F} = \underline{0} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$$

Tuttavia $\underline{F}$ non è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$. Calcoliamo la circuitazione di $\underline{F}$ lungo la circonferenza unitaria centrata nell'origine $\underline{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ $t \in [0, 2\pi]$

$\uparrow$ eq. parametriche

$$\boxed{L_\gamma(\underline{F}) = \oint_\gamma \underline{F}\, d\underline{r} = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-\sin(t), \cos(t))}_{\underline{F}(\underline{r}(t))} \cdot \underbrace{(-\sin(t), \cos(t))}_{\underline{r}'(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \neq 0 \Rightarrow \underline{F} \text{ non è conservativo!}}$$

$\underline{r}'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$

- Segue da quanto visto che la condizione di irrotazionalità non è sufficiente a garantire che E sia conservativo. La ragione di questo fatto è legata alle proprietà topolgiche dell'aperto A in cui il campo E è irrotazionale.

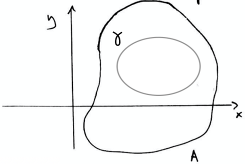
- Segue da quanto visto che la condizione di irrotazionalità non è sufficiente a garantire che E sia conservativo. La ragione di questo fatto è legata alle proprietà topologiche dell'aperto A in cui il campo E è irrotazionale.

- La nozione chiave è quella di aperto semplicemente connesso. Ricordiamo che una proprietà fondamentale per un insieme aperto e connesso A, è quella che, presi due punti in A, oltre $\exists$ un arco di curva continua che congiunge questi due punti tutto contenuto in A.

- Segue da quanto visto che la condizione di irrotazionalità non è sufficiente a garantire che E sia conservativo. La ragione di questo fatto è legata alle proprietà topologiche dell'aperto A in cui il campo E è irrotazionale.
- La nozione chiave è quella di aperto <u>semplicemente connesso</u>. Ricordiamo che una proprietà fondamentale per un insieme aperto e connesso A, è quella che, presi due punti in A, allora $\exists$ un arco di curva continua che congiunge questi due punti tutto contenuto in A.

<u>Definizione</u> (intuitiva) Un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ($A \subseteq \mathbb{R}^2$) si dice <u>SEMPLICEMENTE CONNESSO</u> se:

1. A è connesso
2. Presa una qualunque curva semplice chiusa contenuta in A, allora essa può essere ridotta ad un unico punto mediante una deformazione continua, senza mai uscire da A

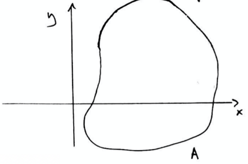


- Segue da quanto visto che la condizione di irrotazionalità non è sufficiente a garantire che F sia conservativo. La ragione di questo fatto è legata alle proprietà topologiche dell'aperto A in cui il campo F è irrotazionale.

- La nozione chiave è quella di aperto <u>semplicemente connesso</u>. Ricordiamo che una proprietà fondamentale per un insieme aperto e connesso A, è quella che, presi due punti in A, allora $\exists$ un arco di curva continua che congiunge questi due punti tutto contenuto in A.

<u>Definizione</u> (intuitiva) Un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ($A \subseteq \mathbb{R}^2$) si dice <u>SEMPLICEMENTE CONNESSO</u> se:

1. A è connesso
2. Presa una qualunque curva semplice chiusa contenuta in A, allora essa può essere ridotta ad un unico punto mediante una deformazione continua, senza mai uscire da A

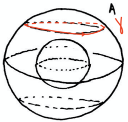


- <u>In $\mathbb{R}^2$ sono semplicemente connessi</u>: i dischi, ellissi ("pieni") semipiani e tutte le figure piane che si possono ottenere da questi deformandoli con continuità; sono semplicemente connessi $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2$ privato di una semiretta...
- In $\mathbb{R}^2$ i semplicemente connessi sono "privi di buchi"

- In $\mathbb{R}^3$ sono semplicemente connessi: palle, ellissoidi ("pieni"), semispazi, $\mathbb{R}^3$ privato di un punto, $\mathbb{R}^3$ privato di un numero finito di punti, una sfera cava, una corona sferica ...

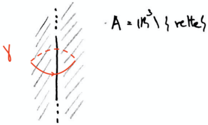
- In $\mathbb{R}^3$ sono semplicemente connessi: palle, ellissoidi ("pieni"), semispazi, $\mathbb{R}^3$ privato di un punto, $\mathbb{R}^3$ privato di un numero finito di punti, una sfera cava, una corona sferica ...

- In $\mathbb{R}^3$: semplicemente connessi sono "privi di manici"

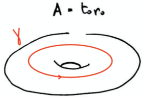


sì, sfera cava

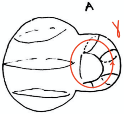
sì



No, $\mathbb{R}^3 \setminus \{retta\}$



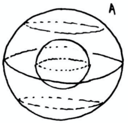
No



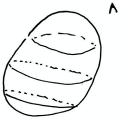
No, corpo con manico

- In $\mathbb{R}^3$ sono semplicemente connessi: palle, ellissoidi ("pieni"), semispazi, $\mathbb{R}^3$ privato di un punto, $\mathbb{R}^3$ privato di un numero finito di punti, una sfera cava, una corona sferica ...

- In $\mathbb{R}^3$: semplicemente connessi sono "privi di manici"



si, sfera cava



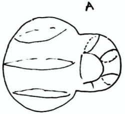
sì

$A = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{retta}\}$

No, $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{retta}\}$

A = toro

No



No, corpo con manici

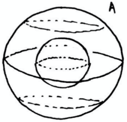
Teorema: Sia $\underline{F} \in C^1(A)$ irrotazionale in $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ($A \subseteq \mathbb{R}^2$). Se A è semplicemente connesso allora il campo $\underline{F}$ è conservativo in A.

- osservazione: Se A non è semplicemente connesso e $\mathrm{rot}\,\underline{F} = \underline{0}$ in tutto A non si può trarre conclusioni

- In $\mathbb{R}^3$ sono semplicemente connessi: palle, ellissoidi ("pieni"), semispazi, $\mathbb{R}^3$ privato di un punto, $\mathbb{R}^3$ privato di un numero finito di punti, una sfera cava, una corona sferica ...

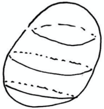
- In $\mathbb{R}^3$: semplicemente connessi sono "privi di manici"

A



sì, sfera cava

A



sì

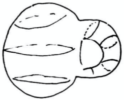
$A = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{retta}\}$

No, $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{retta}\}$

A = toro

No

A



No, corpo con manici

<u>Teorema</u>: Sia $\underline{F} \in C^1(A)$ irrotazionale in $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ($A \subseteq \mathbb{R}^2$). Se A è semplicemente connesso allora il campo $\underline{F}$ è conservativo in A.

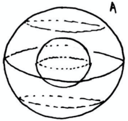
- <u>Osservazione</u>: Se A non è semplicemente connesso e $\text{rot}\,\underline{F} = \underline{0}$ in tutto A <u>non</u> si può trarre conclusioni

- Se $\nabla \times \underline{F} = \text{rot}\,\underline{F} = \underline{0}$ in un aperto A qualunque (anche non connesso) allora $\forall\, p \in A$ $\exists$ un intorno sferico di p tutto contenuto in A ($B_R(p) \subseteq A$) e $B_R(p)$ è semplicemente connesso $\Rightarrow$ $\underline{F}$ è conservativo in $B_R(p)$

- In $\mathbb{R}^3$ sono semplicemente connessi: palle, ellissoidi ("pieni"), semispazi, $\mathbb{R}^3$ privato di un punto, $\mathbb{R}^3$ privato di un numero finito di punti, una sfera cava, una corona sferica ...

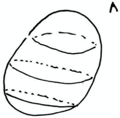
- In $\mathbb{R}^3$: semplicemente connessi sono "privi di manici"

A



si, sfera cava

A



si

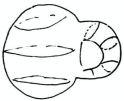
$A = \mathbb{R}^3 \setminus \{retta\}$

No, $\mathbb{R}^3 \setminus \{retta\}$

A = toro

No

A



No, corpo con manico

<u>Teorema</u>: Sia $\underline{F} \in C^1(A)$ irrotazionale in $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ($A \subseteq \mathbb{R}^2$). Se A è semplicemente connesso allora il campo $\underline{F}$ è conservativo in A.

questo vale per ogni punto p in A e in ogni intorno $B_R(p)$ contenuto in A, allora il campo F si dice localmente conservativo in A

- Se $\nabla \times \underline{F} = \text{rot}\, \underline{F} = 0$ in un aperto A qualunque (anche non connesso) allora $\forall\, p \in A\ \exists$ un intorno sferico di p tutto contenuto in A ($B_R(p) \subseteq A$) e $B_R(p)$ è semplicemente connesso $\Rightarrow \underline{F}$ è conservativo in $B_R(p)$