Campi vettoriali e forme differenziali

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Firenze, 14/04/2020

Campi vettoriali e Forme differenziali

- Campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^2)$

$\underline{F} = (F_1, F_2, F_3) = \underline{i}\, F_1 + \underline{j}\, F_2 + \underline{k}\, F_3$ $\quad \{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ base standard di $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{\underbrace{(x, y, z)}_{\underline{x} =} \longmapsto \underbrace{\underline{i}\, F_1(\underline{x}) + \underline{j}\, F_2(\underline{x}) + \underline{k}\, F_3(\underline{x})}_{= \underline{F}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^3} \in \mathbb{R}^3}$$

- Forme differenziali

Campi vettoriali e Forme differenziali

- Campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$)

$$\underline{F} = (F_1, F_2, F_3) = \underline{i}\, F_1 + \underline{j}\, F_2 + \underline{k}\, F_3 \qquad \{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\} \text{ base standard di } \mathbb{R}^3$$

$$\boxed{\underbrace{(x, y, z)}_{\underline{x} =} \longmapsto \underbrace{\underline{i}\, F_1(\underline{x}) + \underline{j}\, F_2(\underline{x}) + \underline{k}\, F_3(\underline{x})}_{= \underline{F}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^3} \in \mathbb{R}^3}$$

- Forme differenziali

$$\boxed{\omega(\underline{x}) = F_1(\underline{x})\, dx + F_2(\underline{x})\, dy + F_3(\underline{x})\, dz}$$

dove dx è l'applicazione lineare che associa a $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ la sua prima componente $dx(\underline{v}) = v_1$; $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Analogamente $dy(\underline{v}) = v_2$ e $dz(\underline{v}) = v_3$.

Campi vettoriali e Forme differenziali

- Campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$)

$\underline{F} = (F_1, F_2, F_3) = \underline{i}\, F_1 + \underline{j}\, F_2 + \underline{k}\, F_3$ $\quad \{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ base standard di $\mathbb{R}^3$

$$\underbrace{(x,y,z)}_{\underline{x}\,=} \longmapsto \underbrace{\underline{i}\, F_1(\underline{x}) + \underline{j}\, F_2(\underline{x}) + \underline{k}\, F_3(\underline{x})}_{=\, \underline{F}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^3} \in \mathbb{R}^3$$

- Forme differenziali

$$\omega(\underline{x}) = F_1(\underline{x})\, dx + F_2(\underline{x})\, dy + F_3(\underline{x})\, dz$$

dove dx è l'applicazione lineare che associa a $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ la sua prima componente $dx(\underline{v}) = v_1$
$\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Analogamente $dy(\underline{v}) = v_2$ e $dz(\underline{v}) = v_3$.

$\{dx, dy, dz\}$ base per $(\mathbb{R}^3)^* =$ spazio duale di $\mathbb{R}^3$

$= \{ L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \text{lineari} \} = \{ a_1\, dx + a_2\, dy + a_3\, dz,\ a_i \in \mathbb{R} \}$

$= \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \{ dx, dy, dz \}$

Campi vettoriali e Forme differenziali

- Campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^2)$

$$\underline{F} = (F_1, F_2, F_3) = \underline{i}\,F_1 + \underline{j}\,F_2 + \underline{k}\,F_3 \qquad \{\underline{i},\underline{j},\underline{k}\} \text{ base standard di } \mathbb{R}^3$$

$$\underbrace{(x,y,z)}_{\underline{x}=} \longmapsto \underbrace{\underline{i}\,F_1(\underline{x}) + \underline{j}\,F_2(\underline{x}) + \underline{k}\,F_3(\underline{x})}_{=\underline{F}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^3} \in \mathbb{R}^3$$

- Forme differenziali

$$\omega(\underline{x}) = F_1(\underline{x})\,dx + F_2(\underline{x})\,dy + F_3(\underline{x})\,dz$$

dove dx è l'applicazione lineare che associa a $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ la sua prima componente $dx(\underline{v}) = v_1$ ($\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$). Analogamente $dy(\underline{v}) = v_2$ e $dz(\underline{v}) = v_3$.

$\{dx, dy, dz\}$ base per $(\mathbb{R}^3)^* =$ spazio duale di $\mathbb{R}^3$

$= \{L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \text{lineari}\} = \{a_1\,dx + a_2\,dy + a_3\,dz,\ a_i \in \mathbb{R}\}$

$= \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{dx, dy, dz\}$

$$\boxed{\underbrace{(x,y,z)}_{\underline{x}=} \longmapsto \underbrace{F_1(\underline{x})\,dx + F_2(\underline{x})\,dy + F_3(\underline{x})\,dz}_{=\omega(\underline{x}) \in (\mathbb{R}^3)^*} = \omega(\underline{x}) \in (\mathbb{R}^3)^*}$$

Campi vettoriali e Forme differenziali

- Campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$)

$$\underline{F} = (F_1, F_2, F_3) = \underline{i}\, F_1 + \underline{j}\, F_2 + \underline{k}\, F_3 \quad \{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\} \text{ base standard di } \mathbb{R}^3$$

$$\underbrace{(x, y, z)}_{\underline{x} =} \longmapsto \underbrace{\underline{i}\, F_1(\underline{x}) + \underline{j}\, F_2(\underline{x}) + \underline{k}\, F_3(\underline{x})}_{= \underline{F}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^3} \in \mathbb{R}^3$$

- Integrale di linea di seconda specie

$$\boxed{L_\gamma(\underline{F}) = \int_\gamma F \cdot dr = \int_\gamma F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz}$$

- Forme differenziali

$$\omega(\underline{x}) = F_1(\underline{x})\, dx + F_2(\underline{x})\, dy + F_3(\underline{x})\, dz$$

dove dx è l'applicazione lineare che associa a $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ le sue prime componente $dx(\underline{v}) = v_1$, $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Analogamente $dy(\underline{v}) = v_2$ e $dz(\underline{v}) = v_3$.

$\{dx, dy, dz\}$ base per $(\mathbb{R}^3)^* =$ spazio duale di $\mathbb{R}^3$

$= \{ L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \text{lineari} \} = \{ a_1\, dx + a_2\, dy + a_3\, dz,\ a_i \in \mathbb{R} \}$

$= \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \{ dx, dy, dz \}$

$$\underbrace{(x, y, z)}_{\underline{x} =} \longmapsto \underbrace{F_1(\underline{x})\, dx + F_2(\underline{x})\, dy + F_3(\underline{x})\, dz}_{= \omega(\underline{x}) \in (\mathbb{R}^3)^*} = \omega(\underline{x}) \in (\mathbb{R}^3)^*$$

- Integrale di linea di una forma

$$\boxed{\int_\gamma \omega = \int_\gamma F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz}$$

Campi vettoriali e Forme differenziali

- Campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^2)$

$\underline{F} = (F_1, F_2, F_3) = \underline{i}\, F_1 + \underline{j}\, F_2 + \underline{k}\, F_3$ $\quad \{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ base standard di $\mathbb{R}^3$

$$\underbrace{(x,y,z)}_{\underline{x}=} \longmapsto \underbrace{\underline{i}\, F_1(\underline{x}) + \underline{j}\, F_2(\underline{x}) + \underline{k}\, F_3(\underline{x})}_{=\underline{F}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^3} \in \mathbb{R}^3$$

- Integrale di linea di seconda specie

$$L_\gamma(\underline{F}) = \int_\gamma F \cdot dr = \int_\gamma F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$$

- $\boxed{\text{Campo irrotazionale: } \operatorname{rot} \underline{F} = \underline{0}}$

- Forme differenziali

$$\omega(\underline{x}) = F_1(\underline{x})\, dx + F_2(\underline{x})\, dy + F_3(\underline{x})\, dz$$

dove dx è l'applicazione lineare che associa a $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ la sua prima componente $dx(\underline{v}) = v_1$ ($\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$). Analogamente $dy(\underline{v}) = v_2$ e $dz(\underline{v}) = v_3$.

$\{dx, dy, dz\}$ base per $(\mathbb{R}^3)^*$ = spazio duale di $\mathbb{R}^3$

$= \{L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \text{lineari}\} = \{a_1\, dx + a_2\, dy + a_3\, dz,\ a_i \in \mathbb{R}\}$

$= \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \{dx, dy, dz\}$

$$\underbrace{(x,y,z)}_{\underline{x}=} \longmapsto \underbrace{F_1(\underline{x})\, dx + F_2(\underline{x})\, dy + F_3(\underline{x})\, dz}_{=\omega(\underline{x}) \in (\mathbb{R}^3)^*} = \omega(\underline{x}) \in (\mathbb{R}^3)^*$$

- Integrale di linea di una forma

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$$

- $\boxed{\text{Forma chiusa: } \operatorname{rot}(F_1, F_2, F_3) = \underline{0} \ (\Leftrightarrow \operatorname{rot} \underline{F} = \underline{0})}$

Campi vettoriali e Forme differenziali

- Campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^2)$

$$\underline{F} = (F_1, F_2, F_3) = \underline{i}\, F_1 + \underline{j}\, F_2 + \underline{k}\, F_3 \qquad \{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\} \text{ base standard di } \mathbb{R}^3$$

$$\underbrace{(x,y,z)}_{\underline{x}=} \longmapsto \underbrace{\underline{i}\, F_1(\underline{x}) + \underline{j}\, F_2(\underline{x}) + \underline{k}\, F_3(\underline{x})}_{= \underline{F}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^3} \in \mathbb{R}^3$$

- Integrale di linea di seconda specie

$$L_\gamma(\underline{F}) = \int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_\gamma F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$$

- Campo irrotazionale: $\operatorname{rot} \underline{F} = \underline{0}$

- $\boxed{\text{Campo conservativo: } \exists\, U \text{ t.c. } \underline{F} = \nabla U \iff \begin{cases} U_x = F_1 \\ U_y = F_2 \\ U_z = F_3 \end{cases}}$

- Forme differenziali

$$\omega(\underline{x}) = F_1(\underline{x})\, dx + F_2(\underline{x})\, dy + F_3(\underline{x})\, dz$$

dove dx è l'applicazione lineare che associa a $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ la sua prima componente $dx(\underline{v}) = v_1$; $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Analogamente $dy(\underline{v}) = v_2$ e $dz(\underline{v}) = v_3$.

$\{dx, dy, dz\}$ base per $(\mathbb{R}^3)^* =$ spazio duale di $\mathbb{R}^3$

$$= \{L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \text{ lineari}\} = \{a_1\, dx + a_2\, dy + a_3\, dz,\ a_i \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{dx, dy, dz\}$$

$$\underbrace{(x,y,z)}_{\underline{x}=} \longmapsto \underbrace{F_1(\underline{x})\, dx + F_2(\underline{x})\, dy + F_3(\underline{x})\, dz}_{= \omega(\underline{x}) \in (\mathbb{R}^3)^*} = \omega(\underline{x}) \in (\mathbb{R}^3)^*$$

- Integrale di linea di una forma

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$$

- Forma chiusa: $\operatorname{rot}(F_1, F_2, F_3) = \underline{0}$ $(\iff \operatorname{rot} \underline{F} = \underline{0})$

- Forma esatta: $\exists\, f$ tale che $df = \omega$ cioè: $\boxed{\omega = f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz \iff F_1 = f_x,\ F_2 = f_y,\ F_3 = f_z}$ ∎