

Campi vettoriali e forme differenziali

Luca Bisconti



Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Il contenuto ha una finalità esclusivamente didattica, e viene rilasciato in uso agli studenti e alle studentesse sotto licenza:

Creative Commons BY-NC-ND

Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate



Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: **Luca Bisconti**

Campi vettoriali e Forme differenziali

• Campo vettoriale in \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^n)

$$\mathbb{F} = (F_1, F_2, F_3) = \hat{i} F_1 + \hat{j} F_2 + \hat{k} F_3 \quad \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\} \text{ base standard di } \mathbb{R}^3$$

$$\underbrace{(x, y, z)}_{\mathbb{R}^3} \longmapsto \underbrace{\hat{i} F_1(x) + \hat{j} F_2(x) + \hat{k} F_3(x)}_{= \mathbb{F}(x) \in \mathbb{R}^3} \in \mathbb{R}^3$$

• Forme differenziali

Campi vettoriali e Forme differenziali

• Campo vettoriale in \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^n)

$$\underline{F} = (F_1, F_2, F_3) = \hat{i} F_1 + \hat{j} F_2 + \hat{k} F_3 \quad \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\} \text{ base standard di } \mathbb{R}^3$$

$$\underbrace{(x, y, z)}_{\underline{x}} \longmapsto \underbrace{\hat{i} F_1(x) + \hat{j} F_2(x) + \hat{k} F_3(x)}_{\underline{F}(x)} \in \mathbb{R}^3$$

• Forme differenziali

$$\omega(x) = F_1(x) dx + F_2(x) dy + F_3(x) dz$$

dove dx è l'applicazione lineare che associa a $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ la sua prima componente $dx(\underline{v}) = v_1$,
 analogamente $dy(\underline{v}) = v_2$ e $dz(\underline{v}) = v_3$.

$$\begin{aligned} \{dx, dy, dz\} \text{ base per } (\mathbb{R}^3)^* &= \text{Spazio duale di } \mathbb{R}^3 \\ &= \{L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ lineari}\} = \{e_1 dx + e_2 dy + e_3 dz, e_i \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Span}_{\mathbb{R}} \{dx, dy, dz\} \end{aligned}$$

Campi vettoriali e Forme differenziali

• Campo vettoriale in \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^L)

$$\underline{F} = (F_1, F_2, F_3) = \hat{i} F_1 + \hat{j} F_2 + \hat{k} F_3 \quad \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\} \text{ base standard di } \mathbb{R}^3$$

$$\underbrace{(x, y, z)}_{\underline{x}} \longmapsto \underbrace{\hat{i} F_1(x) + \hat{j} F_2(x) + \hat{k} F_3(x)}_{= \underline{F}(x)} \in \mathbb{R}^3$$

• Forme differenziali

$$\omega(x) = F_1(x) dx + F_2(x) dy + F_3(x) dz$$

dove dx è l'applicazione lineare che associa a $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ le sue prime componenti $dx(\underline{v}) = v_1$, $dy(\underline{v}) = v_2$ e $dz(\underline{v}) = v_3$. Analogamente $dy(\underline{v}) = v_2$ e $dz(\underline{v}) = v_3$.

$$\begin{aligned} \{dx, dy, dz\} \text{ base per } (\mathbb{R}^3)^* &= \text{Spazio duale di } \mathbb{R}^3 \\ = \{L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ lineari}\} &= \{e_1 dx + e_2 dy + e_3 dz, e_i \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Span}_{\mathbb{R}} \{dx, dy, dz\} \end{aligned}$$

$$\underbrace{(x, y, z)}_{\underline{x}} \longmapsto \underbrace{F_1(x) dx + F_2(x) dy + F_3(x) dz}_{= \omega(x) \in (\mathbb{R}^3)^*} \omega(x) \in (\mathbb{R}^3)^*$$

Campi vettoriali e Forme differenziali

• Campo vettoriale in \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^L)

$$\underline{F} = (F_1, F_2, F_3) = \hat{i} F_1 + \hat{j} F_2 + \hat{k} F_3 \quad \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\} \text{ base standard di } \mathbb{R}^3$$

$$\underbrace{(x, y, z)}_{\underline{x}} \mapsto \underbrace{\hat{i} F_1(x) + \hat{j} F_2(x) + \hat{k} F_3(x)}_{= \underline{F}(x) \in \mathbb{R}^3} \in \mathbb{R}^3$$

• Integrale di linea di seconda specie

$$\int_{\gamma} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

• Forme differenziali

$$\omega(x) = F_1(x) dx + F_2(x) dy + F_3(x) dz$$

dove dx è l'applicazione lineare che associa a $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ la sua prima componente $dx(\underline{v}) = v_1$, (v_1, v_2, v_3) . Analogamente $dy(\underline{v}) = v_2$ e $dz(\underline{v}) = v_3$.

$\{dx, dy, dz\}$ base per $(\mathbb{R}^3)^*$ = Spazio duale di \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} = \{L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ lineari}\} &= \{a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz, a_i \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Span}_{\mathbb{R}} \{dx, dy, dz\} \end{aligned}$$

$$\underbrace{(x, y, z)}_{\underline{x}} \mapsto \underbrace{F_1(x) dx + F_2(x) dy + F_3(x) dz}_{= \omega(x) \in (\mathbb{R}^3)^*} \omega(x) \in (\mathbb{R}^3)^*$$

• Integrale di linea di una forma

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

Campi vettoriali e Forme differenziali

- Campo vettoriale in \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^L)

$$\mathbb{F} = (F_1, F_2, F_3) = \hat{i} F_1 + \hat{j} F_2 + \hat{k} F_3 \quad \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\} \text{ base standard di } \mathbb{R}^3$$

$$\underbrace{(x, y, z)}_{\mathbb{R}^3} \mapsto \underbrace{\hat{i} F_1(x) + \hat{j} F_2(x) + \hat{k} F_3(x)}_{\mathbb{F}(x) \in \mathbb{R}^3} \in \mathbb{R}^3$$

- Integrali di linea di seconda specie

$$\int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

- Campo irrotazionale: $\text{rot } \mathbb{F} = \mathbf{0}$

- Forme differenziali

$$\omega(x) = F_1(x) dx + F_2(x) dy + F_3(x) dz$$

dove dx è l'applicazione lineare che associa a $\mathbb{F} \in \mathbb{R}^3$ le sue prime componenti $dx(\mathbb{F}) = v_1$, (v_1, v_2, v_3) . Analogamente $dy(\mathbb{F}) = v_2$ e $dz(\mathbb{F}) = v_3$.

$\{dx, dy, dz\}$ base per $(\mathbb{R}^3)^* = \text{Spazio duale di } \mathbb{R}^3$
 $= \{L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ lineari}\} = \{a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz, a_i \in \mathbb{R}\}$
 $= \text{Span}_{\mathbb{R}} \{dx, dy, dz\}$

$$\underbrace{(x, y, z)}_{\mathbb{R}^3} \mapsto \underbrace{F_1(x) dx + F_2(x) dy + F_3(x) dz}_{\omega(x) \in (\mathbb{R}^3)^*} \omega(x) \in (\mathbb{R}^3)^*$$

- Integrali di linea di una forma

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

- Forme chiuse: $\text{rot}(F_1, F_2, F_3) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \text{rot } \mathbb{F} = \mathbf{0}$

Campi vettoriali e Forme differenziali

• Campo vettoriale in \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^L)

$$\underline{F} = (F_1, F_2, F_3) = \hat{i} F_1 + \hat{j} F_2 + \hat{k} F_3 \quad \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\} \text{ base standard di } \mathbb{R}^3$$

$$\underbrace{(x, y, z)}_{\underline{x}} \mapsto \underbrace{\hat{i} F_1(x) + \hat{j} F_2(x) + \hat{k} F_3(x)}_{= \underline{F}(x) \in \mathbb{R}^3} \in \mathbb{R}^3$$

• Integrali di linea di seconda specie

$$\int_{\gamma} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

• Campo irrotazionale: $\text{rot } \underline{F} = \underline{0}$

• Campo conservativo: $\exists U$ l.c. $\underline{F} = \nabla U$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U_x = F_1 \\ U_y = F_2 \\ U_z = F_3 \end{cases}$$

• Forma esatta: $\exists f$ tale che $df = \omega$ cioè:

$$\omega = f_x dx + f_y dy + f_z dz \Leftrightarrow F_1 = f_x, F_2 = f_y, F_3 = f_z$$

• Forme differenziali

$$\omega(x) = F_1(x) dx + F_2(x) dy + F_3(x) dz$$

dove dx è l'applicazione lineare che associa a $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ le sue prime componenti $dx(\underline{v}) = v_1$, (v_1, v_2, v_3) . Analogamente $dy(\underline{v}) = v_2$ e $dz(\underline{v}) = v_3$.

$\{dx, dy, dz\}$ base per $(\mathbb{R}^3)^* = \text{Spazio duale di } \mathbb{R}^3$
 $= \{L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ lineari}\} = \{a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz, a_i \in \mathbb{R}\}$
 $= \text{Span}_{\mathbb{R}} \{dx, dy, dz\}$

$$\underbrace{(x, y, z)}_{\underline{x}} \mapsto \underbrace{F_1(x) dx + F_2(x) dy + F_3(x) dz}_{= \omega(x) \in (\mathbb{R}^3)^*} \omega(x) \in (\mathbb{R}^3)^*$$

• Integrali di linea di una forma

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

• Forma chiusa: $\text{rot}(F_1, F_2, F_3) = \underline{0} \Leftrightarrow \text{rot } \underline{F} = \underline{0}$