Superfici parametriche

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: **Luca Bisconti**

Firenze, 14/04/2020

superfici in forma parametrica

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e connesso; $D = A \cup \partial A$ dove ∂A è la frontiera di A.

Consideriamo la mappa $\underline{S} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cioè $\underline{S}(u,v) = \big(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\big)$, $(u,v) \in D$

che può anche essere riscritta con la notazione

$$\boxed{\underline{S} : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in D} \qquad (\mathrm{I})$$

superfici in forma parametrica

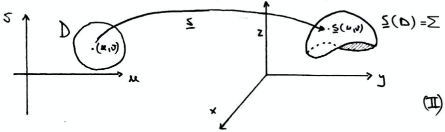
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e connesso; $D = A \cup \partial A$ dove ∂A è la frontiera di A.

Consideriamo la mappa $\underline{S} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cioè $\underline{S}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ (u,v) \in D$

che può anche essere riscritta con la notazione

$$\underline{S} : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in D \qquad \text{(I)}$$

Al variare di (u,v) in D, il punto $\underline{S}(u,v)$ descrive un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$



Chiamiamo superficie Σ l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^3$ di seguito:

$$\text{(II)} \quad \boxed{\Sigma = \{ \underline{S}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) : (u,v) \in D \}}$$

Le relazioni (I) sono le equazioni parametriche di una superficie Σ (o parametrizzazione della superficie Σ, come si vede anche dalla (II)). D è detto dominio di base della superficie e i parametri u, v sono anche chiamati coordinate di Gauss della superficie.

superfici in forma parametrica

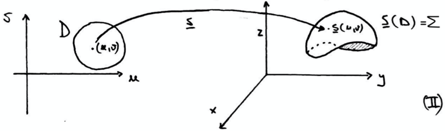
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e connesso; $D = A \cup \partial A$ dove ∂A è la frontiera di A.

Consideriamo la mappa $\underline{S} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cioè $\underline{S}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in D$

che può anche essere riscritta con la notazione

$$\underline{S} : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in D \qquad (I)$$

Al variare di (u,v) in D, il punto $\underline{S}(u,v)$ descrive un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$



Chiamiamo superficie Σ l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^3$ di seguito:

$$(II) \quad \Sigma = \{ \underline{S}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) : (u,v) \in D \}$$

Le relazioni (I) sono le equazioni parametriche di una superficie Σ (o parametrizzazione della superficie Σ, come si vede anche dalla (II)). D è detto dominio di base della superficie e i parametri u, v sono anche chiamati coordinate di Gauss della superficie.

(1.) Assumiamo che $\underline{S}$ abbia derivate parziali continue in D, ovvero che le funzioni $x(u,v)$, $y(u,v)$ e $z(u,v)$ abbiano derivate parziali continue in D (allora x, y, z sono anche funzioni continue)

superfici in forma parametrica

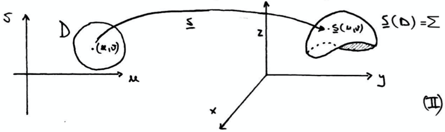
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e connesso; $D = A \cup \partial A$ dove ∂A è la frontiera di A.

Consideriamo la mappa $\underline{S} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cioè $\underline{S}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in D$

che può anche essere scritta con la notazione

$$\underline{S} : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in D \qquad (I)$$

Al variare di (u,v) in D, il punto $\underline{S}(u,v)$ descrive un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$



Chiamiamo superficie Σ l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^3$ di seguito:

$$(II) \quad \Sigma = \{ \underline{S}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) : (u,v) \in D \}$$

Le relazioni (I) sono le equazioni parametriche di una superficie Σ (o parametrizzazione della superficie Σ, come si vede anche dalla (II)). D è detto dominio di base della superficie e i parametri u, v sono anche chiamati coordinate di Gauss della superficie.

(1.) Assumiamo che $\underline{S}$ abbia derivate parziali continue in D, ovvero che le funzioni $x(u,v)$, $y(u,v)$ e $z(u,v)$ abbiano derivate parziali continue in D (allora x, y, z sono anche funzioni continue)

(2.) Assumiamo poi che la matrice Jacobiana $\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}\right)$ abbia sempre rango 2 (caratteristica 2) $\forall (u,v) \in A$

Superfici parametriche

La matrice jacobiana si scrive anche come:

$$\boxed{\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}\right) = \begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \\ z_u(u,v) & z_v(u,v) \end{pmatrix}}$$

Superfici parametriche

La matrice jacobiana si scrive anche come:

$$\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}\right) = \begin{pmatrix} \underset{\underset{\underline{S}_u(u,v)}{\parallel}}{\boxed{\begin{matrix} x_u(u,v)\\ y_u(u,v)\\ z_u(u,v)\end{matrix}}} & \underset{\underset{\underline{S}_v(u,v)}{\parallel}}{\boxed{\begin{matrix} x_v(u,v)\\ y_v(u,v)\\ z_v(u,v)\end{matrix}}} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \underline{S}_u(u,v) & \underline{S}_v(u,v) \end{pmatrix}$$

↑ ha per colonne le derivate parziali di $\underline{S}(u,v)$

Superfici parametriche

La matrice jacobiana si scrive anche come:

$$\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}\right) = \begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \\ \underset{\underset{\underline{S}_u(u,v)}{\parallel}}{z_u(u,v)} & \underset{\underset{\underline{S}_v(u,v)}{\parallel}}{z_v(u,v)} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \underline{S}_u(u,v) & \underline{S}_v(u,v) \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ ha per colonne le derivate parziali di $\underline{S}(u,v)$

La seconda richiesta significa che <u>almeno uno</u> dei seguenti determinanti è non nullo:

$$\boxed{\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}} \; ; \; \boxed{\det\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right) = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}} \; ; \; \boxed{\det\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right) = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}}$$

La matrice jacobiana si scrive anche come:

$$\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}\right) = \begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \\ z_u(u,v) & z_v(u,v) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \underline{S}_u(u,v) & \underline{S}_v(u,v) \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \shortparallel & \shortparallel \\ \underline{S}_u(u,v) & \underline{S}_v(u,v) \end{matrix} \qquad \uparrow$$

ha per colonne le derivate parziali di $\underline{S}(u,v)$

La seconda richiesta significa che <u>almeno uno</u> dei seguenti determinanti è non nullo:

$$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \; ; \quad \det\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right) = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} \; ; \quad \det\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right) = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}$$

Quindi tale condizione implica che in ogni punto $(u,v) \in A$ vale che:

$$\boxed{\left(\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}\right)^2 > 0} \qquad \text{(III)}$$

La matrice jacobiana si scrive anche come:

$$\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}\right) = \begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \\ z_u(u,v) & z_v(u,v) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \underline{S}_u(u,v) & \underline{S}_v(u,v) \end{pmatrix}$$

$$\underset{\underline{S}_u(u,v)}{\shortparallel} \qquad \underset{\underline{S}_v(u,v)}{\shortparallel}$$

ha per colonne le derivate parziali di $\underline{S}(u,v)$

La seconda richiesta significa che <u>almeno uno</u> dei seguenti determinanti è non nullo:

$$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \; ; \; \det\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right) = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} \; ; \; \det\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right) = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}$$

Quindi tale condizione implica che in ogni punto $(u,v) \in A$ vale che:

$$\left(\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}\right)^2 > 0 \qquad \text{(III)}$$

(3.) Inoltre si richiede che $\forall (u_1,v_1), (u_2,v_2) \in A$ con $(u_1,v_1) \neq (u_2,v_2)$ si ha che $S(u_1,v_1) \neq \underline{S}(u_2,v_2)$

Una superficie Σ le cui equazioni parametriche soddisfano le precedenti proprietà si chiama superficie regolare.

- L'insieme dei punti della frontiera di Σ che sono i corrispondenti dei punti della frontiera ∂A di A, si chiama bordo della superficie Σ e si indica con $\partial\Sigma$.

- L'insieme dei punti della frontiera di Σ che sono i corrispondenti dei punti della frontiera ∂A di A, si chiama bordo della superficie Σ e si indica con $\partial\Sigma$.

- Fornendo le equazioni parametriche $\underline{S} = \underline{S}(u,v)$ della superficie parametrica e regolare Σ

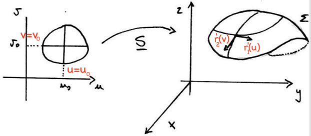
$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \right)$$

allora le linee (curve) coordinate, sulla superficie, hanno equazioni

$$\boxed{\begin{cases} \underline{r}_1(u) = \underline{S}(u, v_0) \\ \underline{r}_2(v) = \underline{S}(u_0, v) \end{cases}} \quad (u_0, v_0) \in A$$

e i relativi vettori tangenti sono: (in $\underline{S}(u_0,v_0)$)

$$\boxed{\begin{cases} \underline{r}_1'(u_0) = \underline{S}_u(u_0, v_0) \\ \underline{r}_2'(v_0) = \underline{S}_v(u_0, v_0) \end{cases}}$$



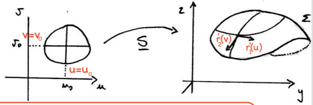
- L'insieme dei punti della frontiera di Σ che sono i corrispondenti dei punti della frontiera ∂A di A, si chiama bordo della superficie Σ e si indica con $\partial\Sigma$.

- Tornando alle equazioni parametriche $\underline{S}=\underline{S}(u,v)$ della superficie parametrica e regolare Σ

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \right)$$

allora le linee (curve) coordinate, sulla superficie, hanno equazioni $\begin{cases} \underline{r}_1(u) = \underline{S}(u, v_0) \\ \underline{r}_2(v) = \underline{S}(u_0, v) \end{cases}$ $(u_0,v_0)\in A$

e i relativi vettori tangenti sono: (in $\underline{S}(u_0,v_0)$) $\begin{cases} \underline{r}_1'(u_0) = \underline{S}_u(u_0,v_0) \\ \underline{r}_2'(v_0) = \underline{S}_v(u_0,v_0) \end{cases}$



- Poiché $\underline{S}$ è derivabile con derivate parziali continue (si potrebbe comunque richiedere che $\underline{S}$ sia differenziabile) allora $\underline{r}_1'(u_0)$ e $\underline{r}_2'(v_0)$ sono ben definiti. Il piano tangente a Σ, in $\underline{S}(u_0,v_0)$, da un punto di vista geometrico è l'unico piano che contiene entrambi questi vettori.

Superfici parametriche

- L'insieme dei punti della frontiera di Σ che sono i corrispondenti dei punti della frontiera ∂A di A, si chiama bordo della superficie Σ e si indica con $\partial \Sigma$.

- Tornando alle equazioni parametriche $\underline{S} = \underline{S}(u, v)$ della superficie parametrica e regolare Σ

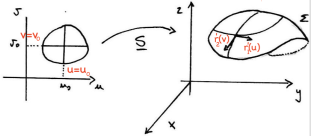
$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \right)$$

allora le linee (curve) coordinate, sulla superficie, hanno equazioni

$$\begin{cases} \underline{r}_1(u) = \underline{S}(u, v_0) \\ \underline{r}_2(v) = \underline{S}(u_0, v) \end{cases} \quad (u_0, v_0) \in A$$

e i relativi vettori tangenti sono: (in $\underline{S}(u_0, v_0)$)

$$\begin{cases} \underline{r}_1'(u_0) = \underline{S}_u(u_0, v_0) \\ \underline{r}_2'(v_0) = \underline{S}_v(u_0, v_0) \end{cases}$$



- Poiché $\underline{S}$ è derivabile con derivate parziali continue (si potrebbe comunque richiedere che $\underline{S}$ sia differenziabile) allora $\underline{r}_1'(u_0)$ e $\underline{r}_2'(v_0)$ sono ben definiti. Il piano tangente a Σ, in $\underline{S}(u_0, v_0)$, da un punto di vista geometrico è l'unico piano che contiene entrambi questi vettori.

- Tale piano tangente risulta ben definito se i due vettori $\underline{r}_1'(u_0)$, $\underline{r}_2'(v_0)$ sono entrambi non nulli e non paralleli: Queste due condizioni si possono esprimere simultaneamente

prosegue

richiedendo che :

$$\underline{0} \neq \underline{r}_1'\overset{(IV)}{(u_0)} \times \underline{r}_2'(v_0) = \underline{S}_u(u_0,v_0) \times \underline{S}_v(u_0,v_0) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\underset{\substack{\uparrow \\ \underline{u}_0=(u_0,v_0)}}{=} \begin{vmatrix} y_u(\underline{u}_0) & z_u(\underline{u}_0) \\ y_v(\underline{u}_0) & z_v(\underline{u}_0) \end{vmatrix} \underline{i} - \begin{vmatrix} x_u(\underline{u}_0) & z_u(\underline{u}_0) \\ x_v(\underline{u}_0) & z_v(\underline{u}_0) \end{vmatrix} \underline{j} + \begin{vmatrix} x_u(\underline{u}_0) & y_u(\underline{u}_0) \\ x_v(\underline{u}_0) & y_v(\underline{u}_0) \end{vmatrix} \underline{k} \neq 0} \quad (V)$$

richiedendo che: $\underline{0} \neq \overset{(\mathrm{IV})}{\underline{r}_1'(u_0)} \times \underline{r}_2'(v_0) = \underline{S}_u(u_0,v_0) \times \underline{S}_v(u_0,v_0) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}$

$$\underset{\underline{u}_0=(u_0,v_0)}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{vmatrix} y_u(\underline{u}_0) & z_u(\underline{u}_0) \\ y_v(\underline{u}_0) & z_v(\underline{u}_0) \end{vmatrix} \underline{i} - \begin{vmatrix} x_u(\underline{u}_0) & z_u(\underline{u}_0) \\ x_v(\underline{u}_0) & z_v(\underline{u}_0) \end{vmatrix} \underline{j} + \begin{vmatrix} x_u(\underline{u}_0) & y_u(\underline{u}_0) \\ x_v(\underline{u}_0) & y_v(\underline{u}_0) \end{vmatrix} \underline{k} \neq 0 \quad (\mathrm{V})$$

(V) $\Longleftrightarrow$ la matrice jacobiana $\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}\right)(\underline{u}_0)$ ha caratteristica 2 $\Longleftrightarrow$ $\underset{\uparrow}{(\mathrm{III})}$ valutata in $\underline{u}_0=(u_0,v_0)$.

questa formula rappresenta

$\|(\underline{S}_u \times \underline{S}_v)(\underline{u}_0)\|^2$

richiedendo che :

$$\underline{0} \neq \overset{(IV)}{\underline{r}_1'(u_0) \times \underline{r}_2'(v_0)} = \underline{S}_u(u_0,v_0) \times \underline{S}_v(u_0,v_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \underline{u}_0=(u_0,v_0)}}{=} \begin{vmatrix} y_u(\underline{u}_0) & z_u(\underline{u}_0) \\ y_v(\underline{u}_0) & z_v(\underline{u}_0) \end{vmatrix} \underline{i} - \begin{vmatrix} x_u(\underline{u}_0) & z_u(\underline{u}_0) \\ x_v(\underline{u}_0) & z_v(\underline{u}_0) \end{vmatrix} \underline{j} + \begin{vmatrix} x_u(\underline{u}_0) & y_u(\underline{u}_0) \\ x_v(\underline{u}_0) & y_v(\underline{u}_0) \end{vmatrix} \underline{k} \neq 0 \quad (V)$$

(V) $\Longleftrightarrow$ la matrice jacobiana $\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}\right)(\underline{u}_0)$ ha caratteristica 2 $\Longleftrightarrow$ $\underset{\uparrow}{(III)}$ valutata in $\underline{u}_0=(u_0,v_0)$.

queste formule rappresenta

$\|(\underline{S}_u \times \underline{S}_v)(\underline{u}_0)\|^2$

Il vettore $\underline{S}_u(\underline{u}_0) \times \underline{S}_v(\underline{u}_0)$ è ortogonale al piano che contiene i vettori $\underline{S}_u(\underline{u}_0)$ e $\underline{S}_v(\underline{u}_0)$, cioè è ortogonale al piano tangente a Σ in $S(\underline{u}_0)=S(u_0,v_0)$.

Superfici parametriche

richiedendo che:
$$\underline{0} \neq \overset{(\mathrm{IV})}{\underline{r}_1'(u_0) \times \underline{r}_2'(v_0)} = \underline{S}_u(u_0,v_0) \times \underline{S}_v(u_0,v_0) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}$$

$$\underset{\underset{\underline{u}_0=(u_0,v_0)}{\uparrow}}{=} \begin{vmatrix} y_u(\underline{u}_0) & z_u(\underline{u}_0) \\ y_v(\underline{u}_0) & z_v(\underline{u}_0) \end{vmatrix} \underline{i} - \begin{vmatrix} x_u(\underline{u}_0) & z_u(\underline{u}_0) \\ x_v(\underline{u}_0) & z_v(\underline{u}_0) \end{vmatrix} \underline{j} + \begin{vmatrix} x_u(\underline{u}_0) & y_u(\underline{u}_0) \\ x_v(\underline{u}_0) & y_v(\underline{u}_0) \end{vmatrix} \underline{k} \neq 0 \quad (\mathrm{V})$$

(V) $\Leftrightarrow$ la matrice jacobiana $\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}\right)(\underline{u}_0)$ ha caratteristica 2 $\Leftrightarrow$ $\underset{\uparrow}{(\mathrm{III})}$ valutata in $\underline{u}_0=(u_0,v_0)$.

queste formule rappresenta
$\|(\underline{S}_u \times \underline{S}_v)(\underline{u}_0)\|^2$

- Il vettore $\underline{S}_u(\underline{u}_0) \times \underline{S}_v(\underline{u}_0)$ è ortogonale al piano che contiene i vettori $\underline{S}_u(\underline{u}_0)$ e $\underline{S}_v(\underline{u}_0)$, cioè è ortogonale al piano tangente a Σ in $S(\underline{u}_0)=S(u_0,v_0)$.

- Il vettore $\underline{S}_u(u,v) \times \underline{S}_v(u,v)$ si chiama vettore normale alla superficie Σ e il suo versore corrispondente è:
$$\underline{n} = \frac{\underline{S}_u \times \underline{S}_v}{\|\underline{S}_u \times \underline{S}_v\|} \qquad \|\underline{S}_u \times \underline{S}_v\| = \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2}$$

- Si noti che il verso di $\underline{n}$ dipende dall'ordine con cui consideriamo i parametri (u,v) e quindi dall'ordine con cui effettuiamo il prodotto vettoriale.