Superfici orientabili. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: **Luca Bisconti**

Firenze, 14/04/2020

Superficie orientabile

Parametrizzata da: $\underline{r} : [a,b] \to \Sigma$, $\underline{r} = \underline{r}(t)$

Una superficie regolare Σ si dice orientabile se, per ogni curva chiusa regolare (a tratti), semplice, che giace sulla superficie, se seguiamo il versore normale $\underline{n}(\underline{r}(t))$ alla curva, dopo un giro completo ritrovo il versore con lo stesso verso iniziale

(ovvero $\lim_{t \to b^-} \underline{n}(\underline{r}(t)) = \underline{n}(\underline{r}(b)) = \underline{n}(\underline{r}(a))$ ← versore iniziale)

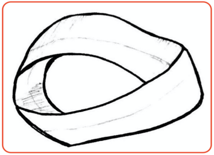
Superficie orientabile

Parametrizzata da: $\underline{r}:[a,b]\to\Sigma$, $\underline{r}=\underline{r}(t)$

Una superficie regolare Σ si dice <u>orientabile</u> se, per ogni curva chiusa regolare (a tratti), semplice, che giace sulla superficie, se seguiamo il versore normale $\underline{n}(\underline{r}(t))$ alla curva, dopo un giro completo ritrovo il versore con lo stesso verso iniziale

(ovvero $\lim_{t\to b^-}\underline{n}(\underline{r}(t))=\underline{n}(\underline{r}(b))=\underline{n}(\underline{r}(a))$ ← versore iniziale)

- Esempio di superficie <u>non</u> orientabile: nastro di Moebius

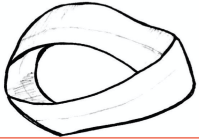


Superficie orientabile

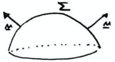
Parametrizzata da: $\underline{r}:[a,b]\to\Sigma$, $\underline{r}=\underline{r}(t)$

Una superficie regolare Σ si dice <u>orientabile</u> se, per ogni curva chiusa regolare (a tratti), semplice, che giace sulla superficie, se seguiamo il versore normale $\underline{n}(\underline{r}(t))$ alla curva, dopo un giro completo ritrovo il versore con lo stesso verso iniziale
(ovvero $\lim_{t\to b^-}\underline{n}(\underline{r}(t))=\underline{n}(\underline{r}(b))=\underline{n}(\underline{r}(a))$ ← versore iniziale)

- Esempio di superficie <u>non</u> orientabile: nastro di Moebius



- L'orientamento di una superficie orientabile è dato dalla scelta di uno dei due versi del versore normale (esempio: verso l'alto o verso il basso, entrante o uscente ...)
(una orientazione di Σ si ottiene scegliendo uno dei suoi lati)

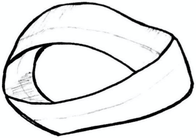


Superficie orientabile

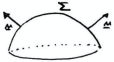
Parametrizzata da: $\underline{r}:[a,b]\to\Sigma$, $\underline{r}=\underline{r}(t)$

Una superficie regolare Σ si dice orientabile se, per ogni curva chiusa regolare (a tratti), semplice, che giace sulla superficie, se seguiamo il versore normale $\underline{n}(\underline{r}(t))$ alla curva, dopo un giro completo ritrovo il versore con lo stesso verso iniziale (ovvero $\lim_{t\to b^-} \underline{n}(r(t)) = \underline{n}(r(b)) = \underline{n}(\underline{r}(a))$ ← versore iniziale)

- Esempio di superficie non orientabile: nastro di Moebius

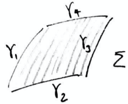


- L'orientamento di una superficie orientabile è dato dalla scelta di uno dei due versi del versore normale (esempio: verso l'alto o verso il basso, entrante o uscente ...)
(una orientazione di Σ si ottiene scegliendo uno dei suoi lati)

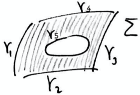


- Bordo di una superficie orientabile Σ:

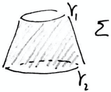
Unione di curve regolari (a tratti), semplici e chiuse tali che un osservatore, posto sulla superficie, che le percorre ha sempre la superficie da una sola parte (destra o sinistra).
Il bordo di Σ è denotato con $\partial\Sigma$.



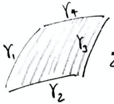
$\Rightarrow \quad \partial\Sigma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$



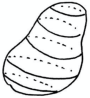
$\Rightarrow \quad \partial\Sigma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \gamma_5$



superficie del tronco di cono $\Rightarrow \quad \partial\Sigma = \gamma_1 \cup \gamma_2$



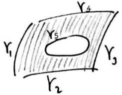
$\Sigma \Rightarrow \partial\Sigma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$



Σ senza bordo (superficie chiusa)

$\partial\Sigma = \phi$

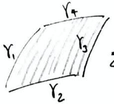
Per una superficie chiusa si parla di normale entrante o uscente



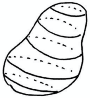
$\Sigma \Rightarrow \partial\Sigma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \gamma_5$

Σ superficie laterale del cono limitato $\quad \partial\Sigma = \gamma$

Σ superficie del tronco di cono $\Rightarrow \partial\Sigma = \gamma_1 \cup \gamma_2$



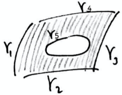
$\Sigma \Rightarrow \partial\Sigma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$



Σ senza bordo (superficie chiusa)

$\partial\Sigma = \emptyset$

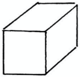
Per una superficie chiusa si parla di normale entrante o uscente



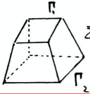
$\Sigma \Rightarrow \partial\Sigma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \gamma_5$

Σ superficie laterale del cono limitato $\quad \partial\Sigma = \gamma$

Σ superficie del tronco di cono $\Rightarrow \partial\Sigma = \gamma_1 \cup \gamma_2$



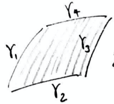
$\partial\Sigma = \emptyset$



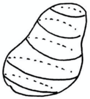
$\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

Superficie regolare a pezzi

- Una superficie si dice regolare a pezzi se esiste un numero finito di curve regolari (a tratti), dette "spigoli", che suddividono la superficie in numero finito di superfici regolari, dette "facce"



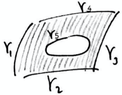
$\Sigma \Rightarrow \partial\Sigma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$



Σ senza bordo (superficie chiusa)

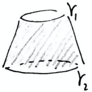
$\partial\Sigma = \emptyset$

Per una superficie chiusa si parla di normale entrante o uscente

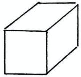


$\Sigma \Rightarrow \partial\Sigma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \gamma_5$

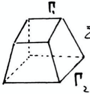
Σ superficie laterale del cono limitato $\quad \partial\Sigma = \gamma$



Σ superficie del tronco di cono $\Rightarrow \partial\Sigma = \gamma_1 \cup \gamma_2$



$\partial\Sigma = \emptyset$



$\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

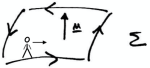
Superficie regolare a pezzi

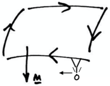
- Una superficie si dice regolare a pezzi se esiste un numero finito di curve regolari (a tratti), dette "spigoli", che suddividono la superficie in numero finito di superfici regolari, dette "facce"
- Il bordo di una superficie regolare a pezzi è dato dall'unione dei bordi delle facce con esclusione degli spigoli tra due facce adiacenti.

- Una superficie regolare a pezzi può essere deformata in modo continuo in una superficie regolare ("smussando" gli spigoli). Se la superficie regolare ottenuta è orientabile allora la superficie regolare a pezzi è orientabile.

- Una superficie regolare a pezzi può essere deformata in modo continuo in una superficie regolare ("smussando" gli spigoli). Se la superficie regolare ottenuta è orientabile allora la superficie regolare a pezzi è orientabile.

- Il bordo di una superficie regolare (a pezzi) orientata si dice <u>orientato positivamente</u> se un osservatore posto sulla superficie, orientato come il versore $\underline{n}$, che ne percorre il bordo ha sempre il lato di Σ scelto come "positivo" alla sua sinistra. Quando il bordo di una superficie è orientato positivamente viene denotato con $\partial^+\Sigma$

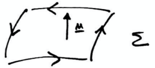


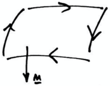


In questo caso si usa la regola della "mano destra"

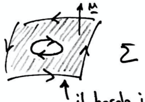
- Una superficie regolare a pezzi può essere deformata in modo continuo in una superficie regolare ("smussando" gli spigoli). Se la superficie regolare ottenuta è orientabile allora la superficie regolare a pezzi è orientabile.

- Il bordo di una superficie regolare (a pezzi) orientata si dice <u>orientato positivamente</u> se un osservatore posto sulla superficie, orientata come il versore $\underline{n}$, che ne percorre il bordo ha sempre il lato di Σ scelto come "positivo" alla sua sinistra. Quando il bordo di una superficie è orientato positivamente viene denotato con $\partial^+\Sigma$





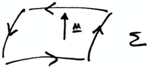
In questo caso si usa la regola della "mano destra"

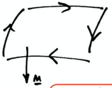


il bordo interno ha verso di percorrenza opposto rispetto a quello esterno

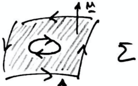
- Una superficie regolare a pezzi può essere deformata in modo continuo in una superficie regolare ("smussando" gli spigoli). Se la superficie regolare ottenuta è orientabile allora la superficie regolare a pezzi è orientabile.

- Il borolo di una superficie regolare (a pezzi) orientata si dice <u>orientato positivamente</u> se un osservatore posto sulla superficie, orientato come il versore $\underline{n}$, che ne percorre il bordo ha sempre il lato di Σ scelto come "positivo" alla sua sinistra. Quando il bordo di una superficie è orientato positivamente viene denotato con $\partial^+\Sigma$

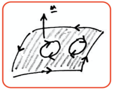




In questo caso si usa la regola della "mano destra"



il bordo interno ha verso di percorrenza opposto rispetto a quello esterno



- $\boxed{\text{La scelta di una orientazione su } \Sigma \text{ ne induce una su } \partial\Sigma.}$

Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata

Consideriamo una situazione proveniente dalla fluidodinamica: $\underline{v} = \underline{v}(t)$ campo di velocità dell'acqua; ci chiediamo quale sia il volume infinitesimo dV d'acqua che attraversa nell'unità di tempo un elemento infinitesimo dS di una certa superficie ideale Σ.

Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata

Consideriamo una situazione proveniente dalla fluidodinamica: $\underline{v} = \underline{v}(t)$ campo di velocità dell'acqua; ci chiediamo quale sia il volume infinitesimo dV d'acqua che attraversa nell'unità di tempo un elemento infinitesimo dS di una certa superficie ideale Σ.

- Considero l'elemento di superficie dS e il suo versore normale $\underline{n}$ (dS è così piccolo che $\underline{n}$ non varia su dS) e assumiamo che $\underline{v}$ su dS sia costante rispetto alle variabili spaziali (poiché dS è infinitesimo).

Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata

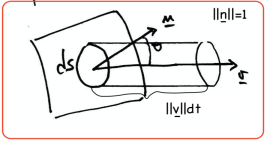
Consideriamo una situazione proveniente dalla fluidodinamica: $\underline{v} = \underline{v}(t)$ campo di velocità dell'acqua; ci chiediamo quale sia il volume infinitesimo dV d'acqua che attraversa nell'unità di tempo un elemento infinitesimo dS di una certa superficie ideale Σ.

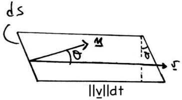
- Considero l'elemento di superficie dS e il suo versore normale $\underline{n}$ (dS è così piccolo che $\underline{n}$ non varia su dS) e assumiamo che $\underline{v}$ su dS sia costante rispetto alle variabili spaziali (poiché dS è infinitesimo).
- Il prodotto scalare $\underline{v}\cdot\underline{n}$ misura l'avanzamento istantaneo in un punto $p \in dS$ rispetto alla superficie e $\underline{v}\cdot\underline{n}\, dS = dV/dt$ = volume infinitesimo d'acqua che fluisce attraverso dS, nell'unità di tempo

Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata

Consideriamo una situazione proveniente dalla fluidodinamica: $\underline{v} = \underline{v}(t)$ campo di velocità dell'acqua; ci chiediamo quale sia il volume infinitesimo dV d'acqua che attraversa nell'unità di tempo un elemento infinitesimo dS di una certa superficie ideale Σ.

- Considero l'elemento di superficie dS e il suo versore normale $\underline{n}$ (dS è così piccolo che $\underline{n}$ non varia su dS) e assumiamo che $\underline{v}$ su dS sia costante rispetto alle variabili spaziali (poiché dS è infinitesimo).
- Il prodotto scalare $\underline{v} \cdot \underline{n}$ misura l'avanzamento istantaneo in un punto p di dS rispetto alla superficie e $\underline{v} \cdot \underline{n}\, dS = dV/dt$ = volume infinitesimo d'acqua che fluisce attraverso dS, nell'unità di tempo

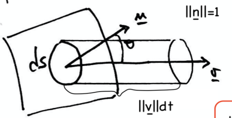


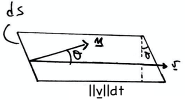


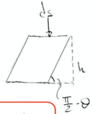
Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata

Consideriamo una situazione proveniente dalla fluidodinamica: $\underline{v} = \underline{v}(t)$ campo di velocità dell'acqua; ci chiediamo quale sia il volume infinitesimo dV d'acqua che attraversa nell'unità di tempo un elemento infinitesimo dS di una certa superficie ideale Σ.

- Considero l'elemento di superficie dS e il suo versore normale $\underline{n}$ (dS è così piccolo che $\underline{n}$ non varia su dS) e assumiamo che $\underline{v}$ su dS sia costante rispetto alle variabili spaziali (poiché dS è infinitesimo).
- Il prodotto scalare $\underline{v} \cdot \underline{n}$ misura l'avanzamento istantaneo in un punto di dS rispetto alla superficie e $\underline{v} \cdot \underline{n}\, dS = dV/dt$ = volume infinitesimo d'acqua che fluisce attraverso dS, nell'unità di tempo







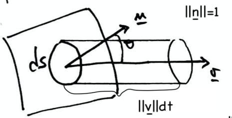
$$dV = h\,dS = \|\underline{v}\|dt\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)dS = \|\underline{v}\|\|\underline{n}\|dt\cos(\theta)\,dS$$

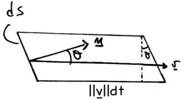
$$\Longrightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \underline{v}\cdot\underline{n}\,dS =: d\Phi_\Sigma(\underline{v})$$

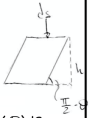
Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata

Consideriamo una situazione proveniente dalla fluidodinamica: $\underline{v} = \underline{v}(t)$ campo di velocità dell'acqua; ci chiediamo quale sia il volume infinitesimo dV d'acqua che attraversa nell'unità di tempo un elemento infinitesimo dS di una certa superficie ideale Σ.

- Considero l'elemento di superficie dS e il suo versore normale $\underline{n}$ (dS è così piccolo che $\underline{n}$ non varia su dS) e assumiamo che $\underline{v}$ su dS sia costante rispetto alle variabili spaziali (poiché dS è infinitesimo).
- Il prodotto scalare $\underline{v} \cdot \underline{n}$ misura l'avanzamento istantaneo in un punto $p \in dS$ rispetto alla superficie e $\underline{v} \cdot \underline{n}\, dS = dV/dt$ = volume infinitesimo d'acqua che fluisce attraverso dS, nell'unità di tempo







$$dV = h\,dS = \|\underline{v}\|dt\,\text{sen}\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right)dS = \|\underline{v}\|\|\underline{n}\|dt\cos(\theta)\,dS$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \underline{v} \cdot \underline{n}\, dS =: d\Phi_\Sigma(\underline{v})$$

Flusso di $\underline{v}$ attraverso Σ

Se sommiamo tutti i contributi $d\Phi_\Sigma(\underline{v})$ sulla superficie orientata Σ allora

$$\boxed{\Phi_\Sigma(\underline{v}) = \iint_\Sigma \underline{v} \cdot \underline{n}\, dS}$$