



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

**DIMAI**

Dipartimento di  
Matematica e Informatica  
"Ulisse Dini"



Appunti del corso

# Modellistica Matematica per le Applicazioni

Prof. Lorenzo Fusi

Dipartimento di Matematica e Informatica "Ulisse Dini"  
Università degli Studi di Firenze

*Anno Accademico 2017/2018*





---

# Indice

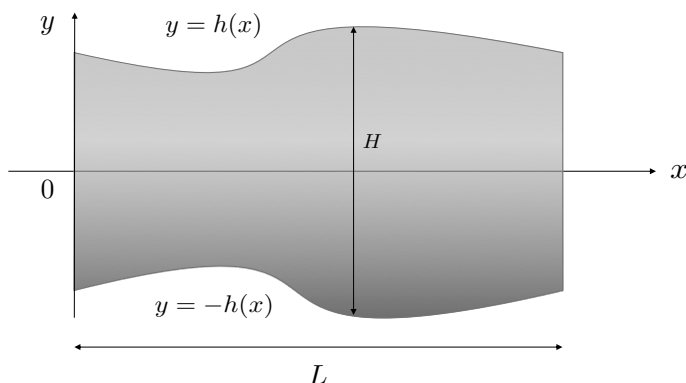
<b>1</b>	<b>Problemi di conduzione termica</b> .....	1
1.1	Ipotesi di “small aspect ratio” .....	3
1.2	Sviluppo asintotico .....	5
1.3	Caso con raffreddamento .....	6
1.4	Problema con convezione .....	8
1.5	Transizioni di fase solido-liquido: il problema di Stefan .....	12
1.6	Soluzioni auto-similari per il problema di Stefan .....	15
<b>2</b>	<b>La teoria dello strato limite</b> .....	21
2.1	Richiami di meccanica dei continui .....	21
2.2	Fluidi Newtoniani e fluidi ideali .....	27
2.3	La teoria dello strato limite .....	28
2.4	Modello per il calcolo dello spessore dello strato limite .....	29
2.5	Adimensionalizzazione .....	30
2.6	L’equazione di Blasius .....	33
2.7	La determinazione dello strato limite .....	35
<b>3</b>	<b>Neutralizzazione di soluzioni acide</b> .....	39
3.1	Modello generale .....	40
3.2	Il modello unidimensionale .....	45
3.3	Il problema adimensionale .....	46
3.4	Ricerca di una soluzione classica per mezzo di tecniche di punto fisso .....	48
3.5	La soluzione stazionaria .....	50
3.6	Formulazione integrale nella scala diffusiva .....	50
3.7	Il problema nella scala diffusiva .....	51
3.8	Il problema nella scala della reazione .....	53
<b>4</b>	<b>Deposizione nei greggi cerosi</b> .....	59
4.1	Il Cold Finger statico .....	60
4.2	Temperatura e concentrazione .....	60
4.3	La velocità di deposizione .....	63
4.4	Determinazione della solubilità e della diffusività dalle misure di deposizione .....	64
4.5	Il modello matematico .....	66
4.6	Stadio 1 .....	66

4	Indice	
4.7	Stadio 2	67
4.8	Stadio 3	68
4.9	Simulazioni numeriche	68
4.10	Una diversa procedura per il calcolo di $b_w$	70
4.11	Limiti superiore e inferiore della diffusività $D_w$	74
<b>5</b>	<b>I fluidi di Bingham</b>	<b>77</b>
5.1	Moto alla Poiseuille di un fluido newtoniano	77
5.2	Moto alla Poiseuille di un fluido di Bingham	79
5.3	Fluido di Bingham in un piano inclinato	84
5.4	Fluido di Bingham in una condotta cilindrica	88
5.5	L'equazione di Buckingham	90
5.6	Fluido di Bingham fra cilindri concentrici	92
<b>6</b>	<b>Modelli per la dinamica dei ghiacciai</b>	<b>97</b>
6.1	Il modello non isoterma	97
6.2	Il caso bidimensionale	99
6.3	Le condizioni al contorno per il campo termico	101
6.4	Dinamica di scivolamento	102
6.5	Modello per la calotta glaciale	105
6.6	Il caso non isoterma per la calotta di ghiaccio con $A(T) = 1$ e $b = 0$	107
<b>7</b>	<b>Tremori vulcanici</b>	<b>111</b>
7.1	Il modello matematico	111
7.2	Il bilancio di energia	113
7.3	Il problema adimensionale	115
7.4	Stima del flusso termico alla base del tubo capillare	120
7.5	Il flusso di calore nella fase liquida	121
	<b>Bibliografia</b>	<b>125</b>



## Problemi di conduzione termica

Consideriamo il problema della conduzione del calore in una sbarretta di spessore variabile come quella schematizzata in Fig. 1.1. Vogliamo studiare come si trasmette il calore in questo dominio



**Figura 1.1.** Barra di spessore variabile.

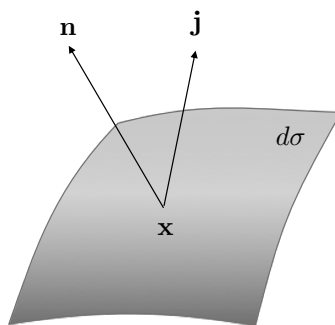
bidimensionale simmetrico rispetto all'asse delle  $x$ . Deriviamo l'equazione della conduzione termica in forma del tutto generale. Il flusso diffusivo di calore  $\mathbf{j}$  è dato dalla legge di Fourier (vedi [2])

$$\mathbf{j} = -k(T)\nabla T,$$

dove  $T$  è la temperatura e  $k > 0$  è la conducibilità termica che, in generale, può dipendere dalla temperatura stessa. La quantità  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\sigma$  rappresenta la quantità di calore che fluisce attraverso l'elemento infinitesimo  $d\sigma$  con normale  $\mathbf{n}$  nell'unità di tempo, si veda la Fig. 1.2. Sia  $\Omega$  una porzione fissata del dominio occupato dal mezzo. La quantità di calore in  $\Omega$  è data da

$$H = \int_{\Omega} \rho c T d\mathbf{x},$$

dove  $\rho$  rappresenta la densità del mezzo e  $c$  la sua capacità termica. Anche  $\rho$  e  $c$  possono dipendere in generale dalla temperatura, ma per semplicità comunque verranno considerate costanti. Il bilancio di energia si scrive



**Figura 1.2.** Flusso attraverso un elemento infinitesimo di superficie.

$$\frac{dH}{dt} = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (1.1)$$

dove l'integrale a secondo membro rappresenta il flusso netto di calore attraverso la superficie  $\partial\Omega$ . L'equazione (1.1) ci dice che la variazione del calore di  $\Omega$  è dovuta al flusso uscente/entrante attraverso il suo bordo  $\Omega$ . Utilizzando il teorema della divergenza si trova

$$\frac{dH}{dt} = \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{j}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(k\nabla T) d\mathbf{x}.$$

Supponendo  $k$  costante possiamo scrivere

$$\int_{\Omega} \left[ \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k\Delta T \right] d\mathbf{x} = 0,$$

dove

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

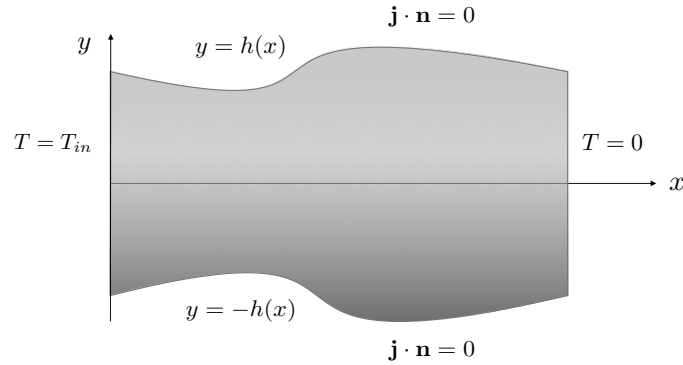
rappresenta il laplaciano di  $T$ . Dall'arbitrarietà del dominio  $\Omega$  si ottiene

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k\Delta T = 0, \quad (1.2)$$

ossia l'equazione del calore (equazione alle derivate parziali di tipo parabolico). Ritorniamo all'esempio della sbarretta e supponiamo che siano assegnate le temperature sulle superfici  $x = 0$  e  $x = L$ . Supponiamo inoltre che non ci sia flusso di calore dalle superfici laterali  $y = \pm h(x)$ , come mostrato in Fig. 1.3, ossia

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{su } y = \pm h(x)$$

Il sistema è bidimensionale e l'incognita è la funzione  $T(x, y, t)$ . Il problema può essere formulato nella seguente maniera



**Figura 1.3.** Condizioni al contorno per il problema della conduzione.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0, \\ T(0, y, t) = T_{in}, \\ T(L, y, t) = 0, \\ k \nabla T \Big|_{\pm h} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ T(x, y, 0) = T_o(x, y), \end{array} \right. \quad (1.3)$$

dove  $T_o$  è la temperatura all'istante iniziale  $t = 0$ ,  $T_{in}$  è la temperatura su  $x = 0$  e dove si è posto uguale a zero la temperatura in  $x = L$ <sup>1</sup>. Esistono formule di rappresentazione per la soluzione di (1.3) ma, in generale, per avere informazioni di carattere quantitativo sulla soluzione il problema deve essere risolto numericamente. Il problema (1.3) è un problema evolutivo governato da una equazione alle derivate parziali di tipo parabolico.

### 1.1 Ipotesi di “small aspect ratio”

Definiamo  $H = \max_{[0, L]} |h(x)|$  e supponiamo che valga la seguente relazione

$$\varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1, \quad (1.4)$$

dove  $L$  rappresenta la lunghezza della sbarretta. In pratica supponiamo che l'ampiezza caratteristica della sbarretta sia di gran lunga più piccola della sua lunghezza. Questa ipotesi è detta di *small aspect ratio* o di *strato sottile*. Il suo nome deriva dal considerare la sbarra come un sottile strato di materiale, visto il rapporto fra ampiezza e lunghezza. Sotto l'ipotesi (1.4) le equazioni del problema (1.3) possono essere riscritte in forma adimensionale in modo da far comparire dei termini contenenti  $\varepsilon$ . Infatti, riscaldando le variabili nel seguente modo

$$x = L\tilde{x}, \quad y = H\tilde{y}, \quad T = T_{in}\tilde{T}, \quad t = \theta\tilde{t}$$

<sup>1</sup>  $\mathbf{n}$  rappresenta la normale alle superfici laterali  $y = \pm h(x)$ .

l'equazione del calore diventa

$$\left(\frac{\rho c H^2}{\theta k}\right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} - \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}\right) = 0, \quad (1.5)$$

dove  $\theta$  è un tempo caratteristico che stabilisce la scala temporale di evoluzione del fenomeno. Quando

$$\theta = \frac{\rho c H^2}{k},$$

significa che stiamo considerando il tempo caratteristico diffusivo nella direzione trasversale alla sbarretta. Quando invece consideriamo

$$\theta = \frac{\rho c L^2}{k},$$

stiamo considerando invece quello lungo la direzione  $y$ . Le condizioni al contorno (1.3)<sub>2,3,4</sub> diventano

$$\tilde{T}(0, \tilde{y}, \tilde{t}) = 1, \quad \tilde{T}(1, \tilde{y}, \tilde{t}) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \left(\varepsilon \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}}\right) \Big|_{\tilde{y}=\pm \tilde{h}} = 0,$$

dove

$$\mathbf{n} \Big|_{\tilde{y}=\tilde{h}} = \frac{(-\varepsilon \tilde{h}_x, 1)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \tilde{h}_x^2}}, \quad \mathbf{n} \Big|_{\tilde{y}=-\tilde{h}} = \frac{(-\varepsilon \tilde{h}_x, -1)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \tilde{h}_x^2}},$$

rappresentano i versori normali a  $y = h$  e  $y = -h$  rispettivamente. Infine la condizione iniziale diventa  $\tilde{T}_o(\tilde{x}, \tilde{y})$ . Supponiamo adesso che la scala temporale che utilizziamo (quella del fenomeno che vogliamo osservare) sia tale che

$$\theta \gg \frac{\rho c H^2}{k}.$$

In questo caso il numero di *Fourier* relativo alla conduzione

$$\text{Fo} = \left(\frac{\rho c H^2}{\theta k}\right) \ll 1,$$

risulta trascurabile cosicché possiamo eliminare il termine con la derivata temporale in (1.5). Omettendo per semplicità i tilda si trova

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^2 T_{xx} + T_{yy} = 0, \\ T(0, y) = 1, \\ T(1, y) = 0, \\ (-\varepsilon h_x, 1) \cdot (\varepsilon T_x, T_y) \Big|_h = 0, \\ (-\varepsilon h_x, -1) \cdot (\varepsilon T_x, T_y) \Big|_{-h} = 0, \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Il problema (1.6) è un problema ellittico per cui la condizione iniziale non è più necessaria.

### 1.2 Sviluppo asintotico

Dal momento che nel problema (1.6) compare il rapporto  $\varepsilon$ , ha senso considerare una soluzione che può essere espressa nella forma

$$T(x, y) = T_0(x, y) + \varepsilon T_1(x, y) + \varepsilon^2 T_2(x, y) + \dots \tag{1.7}$$

ossia una soluzione espressa come serie di potenze di  $\varepsilon$ . L'idea è quella di considerare invece del problema per  $T$  quello per i vari  $T_0, T_1, \dots$ , corrispondenti ai vari termini dell'espansione in  $\varepsilon$ . In questo modo otterremo, per i vari gradi di  $\varepsilon$ , problemi semplificati che trascurano i termini contenenti potenze di  $\varepsilon$  superiori al grado considerato. In pratica si ottiene una successione di problemi che possono essere risolti iterativamente. Se le soluzioni di questi problemi sono  $O(1)$  allora già la soluzione  $T_0$  fornisce una buona approssimazione, poiché le correzioni apportate dai gradi successivi saranno molto piccole essendo proporzionali a  $\varepsilon$  o a potenze intere di  $\varepsilon$ . Iniziamo quindi considerando l'ordine zero. Il problema (1.6) diventa (dobbiamo eliminare tutto ciò che contiene  $\varepsilon$ )

$$\begin{cases} T_{0yy} = 0, \\ T_0(0, y) = 1, \\ T_0(1, y) = 0, \\ T_{0y} \Big|_{y=\pm h} = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

La soluzione del problema (1.8) è data da una qualsiasi funzione  $T_0(x)$  tale che  $T_0(0) = 1, T_0(1) = 0$ , per cui non è unica. Per determinare quella giusta dobbiamo andare a considerare l'ordine 1, ossia il problema

$$\begin{cases} T_{1yy} = 0, \\ T_1(0, y) = 0, \\ T_1(1, y) = 0, \\ T_{1y} \Big|_{y=\pm h} = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Anche in questo caso però si trova un'infinità di soluzioni. Allora consideriamo l'ordine 2

$$\begin{cases} T_{0xx} + T_{2yy} = 0, \\ T_2(0, y) = 0, \\ T_2(1, y) = 0, \\ -T_{0x}h_x + T_{2y} \Big|_{y=h} = 0, \\ -T_{0x}h_x - T_{2y} \Big|_{y=-h} = 0, \end{cases} \tag{1.10}$$

la cui soluzione risulta

$$T_2(x, y) = -T_{0xx}(x) \frac{y^2}{2} + f(x), \quad (1.11)$$

dove  $f(x)$  è incognita<sup>2</sup>. La derivata rispetto a  $y$  è data da

$$T_{2y}(x, y) = -T_{0xx}(x)y.$$

Utilizzando le condizioni di flusso nullo (1.10)<sub>4,5</sub> si trova

$$(T_{0x}h)_x = T_{0x}h_x + T_{0xx}h = 0,$$

che implica

$$\frac{\partial T_0(x)}{\partial x} h(x) = C.$$

Integrando in  $x$ , con la condizione  $T_0(0) = 1$  si trova

$$T_0 - 1 = \int_0^x \frac{C}{h(\xi)} d\xi. \quad (1.12)$$

La costante  $C$  si determina ponendo  $x = 1$  nella (1.12) e ricordando che  $T_0(1) = 0$ , cioè

$$C = - \left( \int_0^1 \frac{1}{h(\xi)} d\xi \right)^{-1}. \quad (1.13)$$

In conclusione

$$T_0(x) = 1 - \frac{\int_0^x h^{-1} d\xi}{\int_0^1 h^{-1} d\xi}. \quad (1.14)$$

Nel caso  $h = 1$  (lastra con bordo piano) si ottiene il classico profilo lineare decrescente per la temperatura

$$T_0(x) = 1 - x. \quad (1.15)$$

In questo caso siamo stati capaci di determinare la soluzione all'ordine 0 con l'ausilio dei problemi di ordine 1 e 2. Notiamo che quest'ultimi non sono stati risolti dal momento che abbiamo una infinità di soluzioni per  $T_1$  e che  $T_2$  è definito a meno della funzione  $f(x)$ .

### 1.3 Caso con raffreddamento

Supponiamo che sulla superficie laterale valga la legge di raffreddamento di Newton

$$k \nabla T \cdot \mathbf{n} = \alpha (T_{ext} - T|_{y=\pm h}), \quad (1.16)$$

dove  $T|_{y=\pm h}$  è la temperatura della sbarretta su  $y = \pm h$  e  $T_{ext}$  è la temperatura esterna alla sbarretta (ad esempio la temperatura dell'aria). Il fattore di proporzionalità  $\alpha$  è detto coefficiente di scambio termico. Per semplicità poniamo  $T_{ext} = 0$  e consideriamo il caso rettangolare in cui la superficie  $h(x) = 1$ . La riscalatura di  $T_{ext}$  a zero non comporta perdita di generalità, dal momento

<sup>2</sup> Notare che la (1.11) è stata derivata utilizzando la condizione di simmetria  $T_{2y} = 0$  su  $y = 0$ . Questa condizione deriva dalla simmetria geometrica del problema

che sommare o sottrarre a  $T$  una temperatura fissata non altera la natura del problema. Trascurando la dipendenza temporale, il problema adimensionale diventa

$$\begin{cases} \varepsilon^2 T_{xx} + T_{yy} = 0, \\ T(0, y, t) = 1, \\ T(1, y, t) = 0, \\ T_y + (H\alpha k^{-1})T \Big|_{y=1} = 0. \\ T_y - (H\alpha k^{-1})T \Big|_{y=-1} = 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Il coefficiente

$$\text{Bi} = \frac{H\alpha}{k},$$

prende il nome di numero di Biot e rappresenta il rapporto fra lo scambio termico del solido con l'aria e la conduzione interna al corpo. Le ultime due relazioni di (1.17) derivano dalla condizione (1.16) considerando che  $\mathbf{n} = (0, \pm 1)$  su  $y = \pm H$ . Supponiamo

$$\text{Bi} = \frac{\alpha H}{k} = O(\varepsilon^2) \quad \frac{\alpha H}{k} = \gamma^2 \varepsilon^2 \quad \gamma^2 = O(1) \quad (1.18)$$

e cerchiamo nuovamente la soluzione come sviluppo

$$T(x, y) = T_0(x, y) + \varepsilon T_1(x, y) + \varepsilon^2 T_2(x, y) + \dots \quad (1.19)$$

Anche in questo caso i problemi all'ordine zero e uno non ci danno informazioni utili. In particolare si trova nuovamente che l'ordine 0 è soddisfatto da una qualsiasi funzione  $T_0(x)$  tale che  $T_0(1) = 0$  e  $T_0(0) = 1$  e che all'ordine 1 una soluzione è data da  $T_1(x, y) \equiv 0$ . All'ordine due si ottiene il problema

$$\begin{cases} T_{0xx} + T_{2yy} = 0, \\ T_2(0, y) = 0, \\ T_2(1, y) = 0, \\ T_{2y} = -\gamma^2 T_0 \Big|_{y=1}, \\ T_{2y} = \gamma^2 T_0 \Big|_{y=-1}. \end{cases} \quad (1.20)$$

La soluzione è nuovamente data da

$$T_2(x, y) = -T_{0xx} \frac{y^2}{2} + f(x), \quad (1.21)$$

per cui, tenuto conto delle (1.20)<sub>4,5</sub> si ottiene

$$T_{0xx} - \gamma^2 T_0 = 0. \quad (1.22)$$

La (1.22) è una equazione differenziale omogenea del secondo ordine la cui soluzione generale è data da

$$T_0 = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}. \quad (1.23)$$

Imponendo le condizioni al contorno  $T_0(0) = 1$  e  $T_0(1) = 0$  si ottiene il sistema

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ Ae^{-\gamma} + Be^{\gamma} = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è data da

$$A = -\frac{e^{2\gamma}}{1 - e^{2\gamma}}, \quad B = \frac{1}{1 - e^{2\gamma}}.$$

Sostituendo nella (1.23) si trova

$$T_0(x) = \frac{\sinh[\gamma(1-x)]}{\sinh \gamma}. \quad (1.24)$$

Notiamo che per  $\gamma \rightarrow 0$  (caso adiabatico con  $h = 1$ ) la (1.24) si riduce alla (1.15).

## 1.4 Problema con convezione

Supponiamo adesso che nel dominio considerato il calore sia trasportato anche per convezione, ossia supponiamo che ci sia un trasporto di calore attraverso il moto stesso delle particelle che costituiscono il mezzo (si pensi ad esempio ad un fluido in movimento). In questo caso il flusso totale si divide in flusso diffusivo (quello considerato nelle sezioni precedenti e dato dalla legge di Fourier) e flusso convettivo

$$\mathbf{j}_{\text{diff}} = -k\nabla T \quad (\text{Flusso diffusivo}),$$

$$\mathbf{j}_{\text{conv}} = \rho c T \mathbf{v} \quad (\text{Flusso convettivo}),$$

dove  $\mathbf{v}$  è il vettore che rappresenta la velocità delle particelle. Consideriamo un dominio  $\Omega$  contenuto nel mezzo le cui particelle si muovono con velocità  $\mathbf{v}$ . La massa del dominio  $\Omega$  è data da

$$m(t) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},$$

dove  $\rho(\mathbf{x}, t)$  rappresenta la densità del mezzo nel punto  $\mathbf{x}$  al tempo  $t$ , ossia la quantità di materia contenuta in un volume rappresentativo sufficientemente piccolo centrato nel punto  $\mathbf{x}$ . Il flusso di particelle attraverso  $\partial\Omega$  è dato da  $\mathbf{j}_m = \rho\mathbf{v}$  dal momento che queste ultime si muovono con velocità  $\mathbf{v}$ . Analogamente a quanto visto per il calore possiamo affermare che la quantità di materia che attraversa la superficie infinitesima  $d\sigma$  per unità di tempo è  $\mathbf{j}_m \cdot \mathbf{n} d\sigma$ , dove  $\mathbf{n}$  è la normale a  $d\sigma$ . Possiamo scrivere una equazione di bilancio per la massa simile alla (1.1)

$$\frac{dm}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{j}_m \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$



Applicando il teorema della divergenza si trova

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] d\mathbf{x}$$

Data l'arbitrarietà del dominio  $\Omega$  si trova

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.25)$$

che rappresenta la forma locale del bilancio di massa detta anche *equazione di continuità*. Nel caso di un mezzo omogeneo con densità  $\rho = \text{costante}$ , si ha  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ . I moti in cui  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  si dicono *solenoidali* o *isocorici*. In questo tipo di moto i volumi di parti materiali<sup>3</sup> del continuo vengono conservati. Supponendo che  $\rho$ ,  $c$ ,  $k$  siano costanti, il bilancio energetico in un volume  $\Omega$  risulta adesso

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} \rho c T d\mathbf{x} \right] = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \left( -k \nabla T + \rho c T \mathbf{v} \right) d\mathbf{x}.$$

Si ottiene perciò

$$\int_{\Omega} \left[ \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \Delta T + \rho c T \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{v}}_{=0} + \rho c \nabla T \cdot \mathbf{v} \right] d\mathbf{x} = 0,$$

cosicché l'equazione del calore si modifica in

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \Delta T + \rho c \nabla T \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.26)$$

L'equazione (1.26) si chiama equazione di convezione-diffusione. Quando  $\mathbf{v} = 0$  si ottiene la classica equazione di conduzione studiata nelle sezioni precedenti. Consideriamo ancora una volta un dominio come quello della figura 1.3, ma con le pareti laterali parallele all'asse delle  $x$  (dominio rettangolare). Supponiamo che tale dominio sia occupato da un mezzo (ad esempio un fluido) che scorre con velocità  $\mathbf{v} = U \mathbf{i}$  data<sup>4</sup>. L'equazione (1.26) diventa

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \Delta T + \rho c U \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (1.27)$$

Riscalando le variabili come nelle sezioni precedenti e trascurando la derivata temporale troviamo

$$\left( \frac{\rho c U H^2}{k L} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \quad (1.28)$$

Il gruppo adimensionale

$$\text{Pe} = \frac{\rho c U H^2}{k L} = \frac{\left( \frac{\rho c H^2}{k} \right)}{\left( \frac{L}{U} \right)},$$

viene chiamato *numero di Peclet* e rappresenta il rapporto fra il tempo caratteristico di diffusione e quello di convezione. In pratica il numero di Peclet da una misura del peso giocato dalla convezione

<sup>3</sup> Per volume materiale si intende un volume in evoluzione che ad ogni istante è costituito dalle medesime particelle di fluido.

<sup>4</sup> In generale la velocità  $\mathbf{v}$  deve essere ricavata dal bilancio della quantità di moto.

rispetto alla diffusione. Supponiamo che  $Pe = O(1)$ , anzi per semplicità assumiamo proprio che  $Pe = 1$ . Poniamo come condizioni al contorno

$$\tilde{T}(0, y) = 1, \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}}(1, y) = 0, \quad \tilde{T}(x, \pm 1) = 0, \quad (1.29)$$

ossia temperatura fissata all'ingresso e sulle superfici laterali e flusso nullo all'uscita. All'ordine zero (omettendo i tilda) il problema diventa

$$\begin{cases} T_{0yy} = T_{0x}, \\ T_0(0, y) = 1, \\ T_0|_{y=\pm 1} = 0. \\ \frac{\partial T_0}{\partial x}|_{x=1} = 0. \end{cases} \quad (1.30)$$

L'equazione (1.30)<sub>1</sub> è una equazione alle derivate parziali parabolica in cui la  $x$  gioca il ruolo del tempo. Quindi, una volta data la condizione in  $x = 0$ , non ha senso specificare un'altra condizione in  $x = 1$  poiché in generale la soluzione del problema (1.30)<sub>1,2,3</sub> non la soddisferà. Per comprendere e superare questo "paradosso" dobbiamo pensare che la riscalatura che ha condotto alla (1.30)<sub>1</sub> non valga in prossimità di  $x = 1$ . Cerchiamo la soluzione dell'equazione (1.30)<sub>1</sub> per separazione di variabili<sup>5</sup>, ossia cerchiamo la soluzione nella forma

$$T_0(x, y) = X(x)Y(y),$$

cosicché

$$X'(x)Y(y) = X(x)Y''(y) \quad \implies \quad \frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda, \quad (1.31)$$

dove  $\lambda$  è una costante poiché  $X$  e  $Y$  dipendono da variabili indipendenti distinte. Si trova

$$Y'' + \lambda Y = 0. \quad (1.32)$$

Se supponiamo che  $\lambda = -\alpha^2 < 0$ , allora l'equazione da risolvere diventa  $Y'' - \alpha^2 Y = 0$  che ammette come soluzioni

$$Y = Ae^{-\alpha y} + Be^{\alpha y}. \quad (1.33)$$

Imponendo le condizioni al contorno su  $y = \pm 1$  troviamo

$$\begin{cases} Ae^{-\alpha} + Be^{\alpha} = 0, \\ Ae^{\alpha} + Be^{-\alpha} = 0, \end{cases}$$

la cui unica soluzione (se  $\alpha \neq 0$ ) è data da  $A = B = 0$ , ossia  $Y(y) = 0$ . Questo porta alla soluzione banale  $T_0 = 0$  che però non è accettabile in quanto in  $x = 0$  la soluzione deve soddisfare la condizione  $T_0 = 1$ . Si deduce quindi che  $\lambda$  non può essere negativo. Se  $\lambda = 0$  allora la soluzione della (1.32) è data da  $Y = Ay + B$ . In questo caso, imponendo le condizioni di Dirichlet su  $y = \pm 1$  si trova

<sup>5</sup> Si veda [10])

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A - B = 0, \end{cases}$$

che implica  $A = B = 0$ , ossia nuovamente la soluzione banale. Di conseguenza  $\lambda = \alpha^2 > 0$  con la soluzione di (1.32) è data da

$$Y = A \cos(\alpha y) + B \sin(\alpha y). \quad (1.34)$$

Imponendo le condizioni al contorno troviamo

$$\begin{cases} A \cos(\alpha) + B \sin(\alpha) = 0, \\ A \cos(\alpha) - B \sin(\alpha) = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è data da  $A = 0$  e  $\sin(\alpha) = 0$ , ossia  $\alpha = n\pi$  con  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . In pratica per ogni  $n$  abbiamo la soluzione

$$Y_n(y) = B_n \sin(n\pi y).$$

La soluzione  $X_n(x)$  relativa a  $\lambda_n = n^2\pi^2$  sarà la soluzione di  $X' = -\lambda_n X$ , cioè

$$X_n(x) = \exp[-n^2\pi^2 x].$$

per cui

$$X_n(x)Y_n(y) = B_n \exp[-n^2\pi^2 x] \sin(n\pi y).$$

Qualsiasi combinazione lineare di queste soluzioni è una soluzione stessa, per cui possiamo scrivere

$$T_0(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(n\pi y) \exp[-n^2\pi^2 x], \quad (1.35)$$

dove i coefficienti  $B_n$  sono i coefficienti dello sviluppo di Fourier del dato iniziale  $T_0 = 1$ . Infatti imponendo la condizione su  $x = 0$  troviamo

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(n\pi y). \quad (1.36)$$

Moltiplicando la (1.36) per  $\sin(m\pi y)$  ed integrando tra 0 e 1 troviamo

$$\int_0^1 \sin(m\pi y) dy = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \underbrace{\int_0^1 \sin(n\pi y) \sin(m\pi y) dy}_{\delta_{nm}/2},$$

dove  $\delta_{nm}$  è la *delta di Kronecher* con  $\delta_{nn} = 1$  e  $\delta_{nm} = 0$  se  $n \neq m$ . Integrando si verifica facilmente che

$$B_n = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n]. \quad (1.37)$$

Di conseguenza, la soluzione del problema (1.30)<sub>1-3</sub> è data dalla (1.35) con i coefficienti  $B_n$  dati dalla (1.37). Tale soluzione chiaramente non soddisfa la condizione di flusso nullo in  $x = 1$ . Come detto in precedenza si suppone che il problema riscaldato (1.30) valga dappertutto tranne che in una piccola regione di ampiezza  $\delta$  in prossimità di  $x = 1$ . Questa regione prende il nome di *boundary layer termico* (BL). Nel boundary layer la riscalatura che abbiamo effettuato non è adeguata, dal

momento che la lunghezza caratteristica non è quella di tutta la sbarretta ma quella molto più piccola dello strato limite termico. Introduciamo allora una nuova variabile adimensionale  $\xi$  tale che

$$x - 1 = \delta\xi \quad \xi < 0, \quad (1.38)$$

con  $\delta$  parametro “piccolo” da determinare. Quando  $x$  si muove nel boundary layer, la nuova variabile adimensionale  $\xi$  varia fra 0 e  $-1$ . Inoltre  $dx = \delta d\xi$  e

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

Con questa nuova variabile il problema (1.28) diventa

$$\frac{1}{\delta} \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (1.39)$$

Supponiamo che  $\delta = O(\varepsilon^2)$  e per semplicità scriviamo  $\delta = \varepsilon^2$ . L'equazione (1.39) si trasforma in

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (1.40)$$

cosicché il problema all'ordine zero nel boundary layer diventa

$$\begin{cases} \frac{\partial T_{0b}}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 T_{0b}}{\partial \xi^2}, & \xi < 0 \\ T_{0b}(\xi, \pm 1) = 0, \\ \frac{\partial T_{0b}}{\partial \xi}(0, y) = 0. \end{cases} \quad (1.41)$$

Notiamo che il problema (1.41) è un problema di tipo ellittico. La soluzione di tale problema necessita della conoscenza di un dato al contorno anche per il bordo sinistro  $\xi = -1$  del boundary layer di spessore  $\delta$ , che però non è specificato. La soluzione di (1.41) è pertanto data da

$$T_{0b} = A(y), \quad (1.42)$$

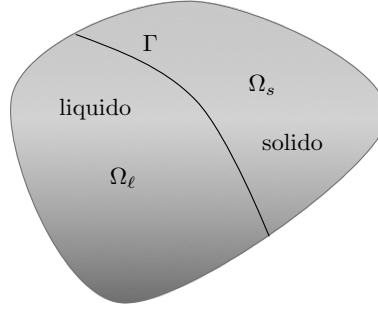
con  $A$  funzione arbitraria della sola  $y$  tale che  $A(\pm 1) = 0$ . Ovviamente di queste funzioni ne possiamo trovare una infinità. Per determinare la funzione  $A$  dobbiamo fare il cosiddetto “matching” fra le due scale, ossia imporre

$$A(y) = T_0(1, y), \quad (1.43)$$

dove  $T_0(1, y)$  è dato dalla (1.35). La condizione (1.43) fornisce la condizione di accoppiamento fra il problema nel boundary layer (1.41) e quello nel bulk (1.30).

## 1.5 Transizioni di fase solido-liquido: il problema di Stefan

Consideriamo il problema della transizione di fase solido-liquido. Per semplicità immaginiamo che il materiale in cui si osserva la transizione di fase sia l'acqua, cosicché la transizione sia quella di acqua e ghiaccio, anche se il modello può essere applicato ad altri materiali puri.



**Figura 1.4.** Schema del dominio occupato dal liquido e dal solido.

Il passaggio liquido-solido è caratterizzato da due parametri fondamentali: la temperatura di transizione  $T_m$  ed il calore latente  $\lambda$  necessario a sciogliere (o solidificare) la sostanza stessa. Consideriamo allora un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}$  come quello schematizzato in Fig. 1.4. Il dominio sarà suddiviso in due regioni  $\Omega_\ell$  e  $\Omega_s$  in cui l'acqua si trova allo stato liquido e allo stato solido rispettivamente, per cui scriveremo

$$\Omega = \Omega_\ell \cup \Omega_s.$$

Le due regioni sono separate da una superficie  $\Gamma$  su cui avviene la transizione di fase. Sulla superficie  $\Gamma$  assumeremo che la temperatura sia quella di solidificazione dell'acqua (o di fusione del ghiaccio), ossia  $T_m = 0$ . Supponiamo che il sistema sia statico, ossia la velocità delle sue particelle sia nulla. In entrambi i sotto-domini la temperatura soddisfa l'equazione del calore, per cui

$$\begin{aligned} \rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} - k_s \Delta T_s &= 0 & \text{in } \Omega_s \\ \rho_\ell c_\ell \frac{\partial T_\ell}{\partial t} - k_\ell \Delta T_\ell &= 0 & \text{in } \Omega_\ell \end{aligned}$$

La superficie  $\Gamma$  varia nel tempo per via dell'evoluzione del processo di solidificazione-scioglimento e di conseguenza anche i domini  $\Omega_s$  e  $\Omega_\ell$  variano nel tempo. La superficie  $\Gamma$  è dunque una incognita del problema e prende il nome di *frontiera mobile* o *frontiera libera*. Il problema della determinazione della temperatura e della superficie su cui avviene la transizione di fase prende il nome di *problema di Stefan a due fasi*.

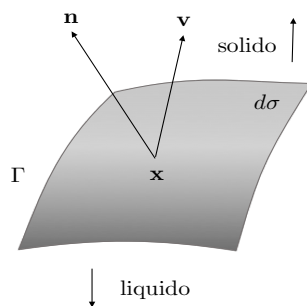
Per determinare la soluzione è necessario introdurre una ulteriore condizione su  $\Gamma$ . Questa condizione è ottenuta imponendo il bilancio del flusso termico su  $\Gamma$ . A questo scopo consideriamo un elemento infinitesimo  $d\sigma$  della superficie  $\Gamma$  ed indichiamo con  $\mathbf{n}$  la normale che punta verso la fase solida e con  $\mathbf{v}$  la velocità della frontiera nel punto  $\mathbf{x}$  su cui è centrato l'elemento infinitesimo  $d\sigma$ <sup>6</sup>. La quantità di calore assorbita (in caso di scioglimento) o rilasciata (in caso di solidificazione) che si osserva sperimentalmente viene detta *calore latente*  $\lambda$ . In pratica

$$\rho_j \lambda \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \tag{1.44}$$

rappresenta il calore assorbito ( $j = \ell$ ) oppure rilasciato ( $j = s$ ) per unità di superficie e per unità di tempo. La quantità (1.44) deve essere bilanciata dal flusso netto di calore attraverso  $\Gamma$  per cui scriveremo

$$\rho_j \lambda \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -k_\ell \nabla T_\ell \cdot \mathbf{n} + k_s \nabla T_s \cdot \mathbf{n} \tag{1.45}$$

<sup>6</sup> La superficie  $\Gamma$  non è materiale, per cui la sua velocità può non essere nulla anche se tutto il sistema è statico.



**Figura 1.5.** Interfaccia di transizione.

dove prenderemo  $j = \ell$  nel caso dello scioglimento ( $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0$ ) oppure  $j = s$  nel caso della solidificazione ( $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$ ). La condizione (1.45) prende il nome di *condizione di Stefan*. Supponiamo che  $\Gamma$  sia rappresentata in forma implicita da  $S(\mathbf{x}, t) = 0$ . Si ha

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla S \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \mathbf{n} = \pm \frac{\nabla S}{\|\nabla S\|}$$

Di conseguenza

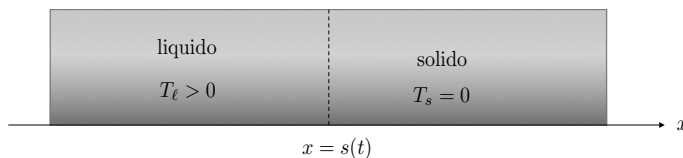
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mp \frac{S_t}{\|\nabla S\|}$$

cosicch  la (1.45) pu  essere riscritta come

$$-\rho_j \lambda S_t = \left[ -k_\ell \nabla T_\ell + k_s \nabla T_s \right] \cdot \nabla S \tag{1.46}$$

Il problema di Stefan consiste nel cercare la terna  $(T_\ell, T_s, S)$  sotto opportune condizioni iniziali ed al bordo. Il problema   assai complesso sia dal punto di vista analitico che da quello numerico.

Noi considereremo un caso speciale unidimensionale e ad una fase. In pratica consideriamo la situazione in cui  $\Omega = \mathbb{R}$  e  $\Gamma$    rappresentato dall'equazione implicita  $S = x - s(t) = 0$ , dove la regione  $x < s(t)$  rappresenta la fase liquida e  $x > s(t)$  la fase solida in cui si suppone che la temperatura sia identicamente uguale a zero, vedi Fig. 1.6. Il problema in questo caso si dice ad una fase poich  non



**Figura 1.6.** Problema unidimensionale ad una fase.

c'  bisogno di risolvere l'equazione per la temperatura nella fase solida. Le equazioni che descrivono il problema sono

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_\ell c_\ell \frac{\partial T_\ell}{\partial t} - k_\ell \frac{\partial^2 T_\ell}{\partial x^2} = 0 & x \leq s(t), t \geq 0 \\ T_\ell(s, t) = 0 & t \geq 0 \\ \rho_\ell \lambda \dot{s} = -k_\ell \frac{\partial T_\ell}{\partial x}(s, t) & t \geq 0 \\ s(0) = s_o & s_o \in \mathbb{R} \\ T_\ell(x, 0) = T_{\ell_o}(x) & x \leq s_o \end{array} \right. \quad (1.47)$$

dove  $s_o$  è la posizione iniziale dell'interfaccia e  $T_{\ell_o}(x)$  è la temperatura iniziale. Il problema (1.47) deve essere completato con una condizione per la temperatura per  $x \rightarrow -\infty$ , se si considera il dominio infinito, oppure per un qualche  $x_L < s_o$ . Queste condizioni possono essere di tipo Dirichlet (se si assegna il valore della temperatura) oppure di Neumann (se si assegna il flusso di calore).

Riscaliamo il problema utilizzando le variabili adimensionali

$$\begin{array}{lll} T_\ell = T_c \tilde{T} & x = L \tilde{x} & t = \left( \frac{\rho_\ell c_\ell L^2}{k_\ell} \right) \tilde{t} \\ s = L \tilde{s} & s_o = L \tilde{s}_o & T_{\ell_o} = T_c \tilde{T}_o \end{array}$$

dove  $L$  è una lunghezza caratteristica del fenomeno e dove scegliamo come temperatura caratteristica

$$T_c = \frac{\lambda}{c_\ell}.$$

Omettendo per semplicità il problema riscaldato diventa

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 & x \leq s(t), t \geq 0 \\ T(s, t) = 0 & t \geq 0 \\ \dot{s} = -\frac{\partial T}{\partial x}(s, t) & t \geq 0 \\ s(0) = s_o & s_o \in \mathbb{R} \\ T(x, 0) = T_o(x) & x < s_o \end{array} \right. \quad (1.48)$$

## 1.6 Soluzioni auto-similari per il problema di Stefan

Consideriamo il problema (1.48) e cerchiamo soluzioni del tipo

$$T(x, t) = f(\gamma(t)x) = f(\xi) \quad \xi = \gamma(t)x, \quad (1.49)$$

dove  $\gamma$  ed  $f$  sono incognite. Soluzioni del tipo (1.49) sono dette *auto-similari*. Sostituendo la (1.49) nella (1.48)<sub>1</sub> si trova

$$f' \dot{\gamma} x - \gamma^2 f'' = 0$$

che implica

$$\frac{f''}{\xi f'} = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma^3} = c \quad c \in \mathbb{R}$$

poiché  $\xi$  e  $t$  sono variabili indipendenti. Dal momento che  $T(s, t) = 0$  si trova

$$s(t)\gamma(t) = \xi_o \quad f(\xi_o) = 0.$$

L'integrazione della equazione per  $\gamma$  con  $\gamma(0) = \infty$  conduce a

$$-\frac{1}{2\gamma^2} = ct \quad c \in \mathbb{R}.$$

Se vogliamo che  $\gamma$  esista per tutti i tempi allora necessariamente  $c < 0$ , per cui possiamo porre  $c = -\lambda^2 < 0$ . Di conseguenza

$$\gamma(t) = \frac{1}{\lambda\sqrt{2t}} \quad s(t) = \xi_o\lambda\sqrt{2t} = 2\alpha\sqrt{t} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

ossia l'interfaccia di transizione evolve come la radice di  $t$ . Adesso integriamo l'equazione per  $f$

$$\ln|f'| = -\frac{\lambda^2\xi^2}{2} + c \quad \implies \quad f' = e^{-\frac{\lambda^2\xi^2}{2} + c}$$

Integrando la  $f'$  tra  $\xi_o$  e  $\xi$  si trova

$$f(\xi) = e^c \int_{\xi_o}^{\xi} e^{-\frac{\lambda^2\xi^2}{2}} d\xi = \frac{\sqrt{2}e^c}{\lambda} \int_{\frac{\lambda\xi_o}{\sqrt{2}}}^{\frac{\lambda\xi}{\sqrt{2}}} e^{-\zeta^2} d\zeta$$

Introduciamo la funzione degli errori

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta$$

il cui grafico è mostrato nella figura 1.7. Osserviamo che la funzione è dispari con

$$\frac{d\operatorname{erf}(z)}{dz} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(z) = 1.$$

Ponendo

$$A = \frac{\sqrt{2\pi}e^c}{2\lambda}$$

possiamo scrivere

$$f(\xi) = A \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{\xi\lambda}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_o\lambda}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

ossia

$$T(x, t) = A \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_o\lambda}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

Ricordiamo adesso che

$$T_x(x, t) = \frac{A}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad \dot{s} = \frac{\alpha}{\sqrt{t}},$$

per cui, imponendo la condizione (1.48)<sub>3</sub> si trova



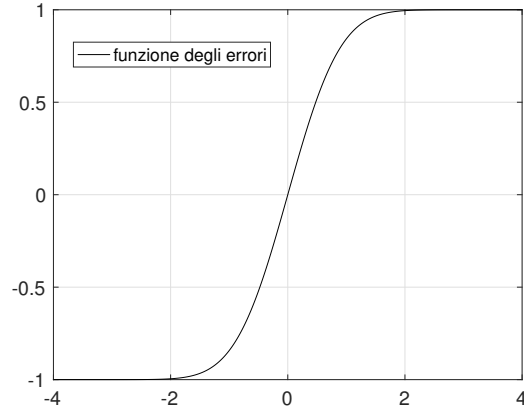


Figura 1.7. La funzione degli errori.

$$A = -\sqrt{\pi}\alpha e^{\alpha^2}$$

Le soluzioni allora sono date da

$$\begin{cases} T(x, t) = \sqrt{\pi}\alpha e^{\alpha^2} \left[ \operatorname{erf}(\alpha) - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right] \\ s(t) = 2\alpha\sqrt{t} \end{cases} \quad (1.50)$$

La soluzione (1.50) è detta *soluzione di Neumann* e descrive varie situazioni di carattere fisico. Notiamo che  $\alpha$  è incognita e deve essere determinata imponendo la condizione iniziale.

**Esempio 1:** ( $\alpha > 0$  e  $x < 2\alpha\sqrt{t}$ ) In questo caso stiamo considerando il dominio infinito  $x < 2\alpha\sqrt{t}$  mostrato in figura 1.8. Si vede facilmente che per  $x < 0$

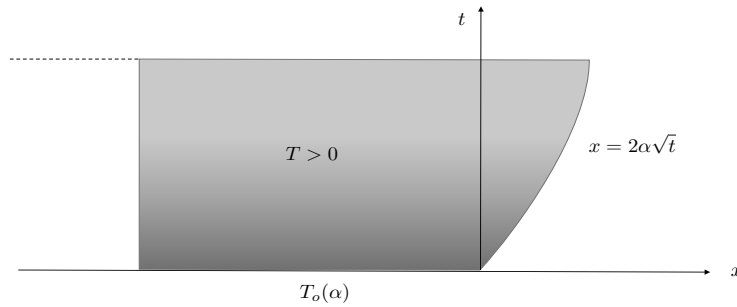
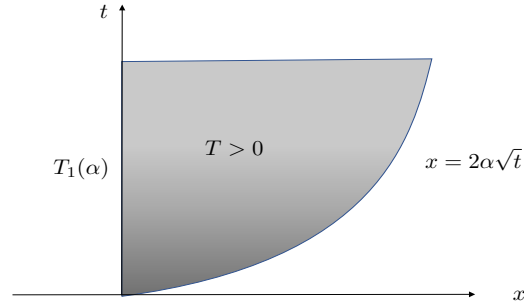


Figura 1.8. Esempio 1.

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(x, t) = \sqrt{\pi}\alpha e^{\alpha^2} [\operatorname{erf}(\alpha) + 1] = T_o(\alpha) > 0.$$

**Esempio 2:** ( $\alpha > 0$  e  $0 < x < 2\alpha\sqrt{t}$ ) In questo caso stiamo considerando il dominio limitato  $0 < x < 2\alpha\sqrt{t}$  mostrato in figura 1.9. In questo caso dobbiamo considerare il limite per  $x \rightarrow 0^+$  che

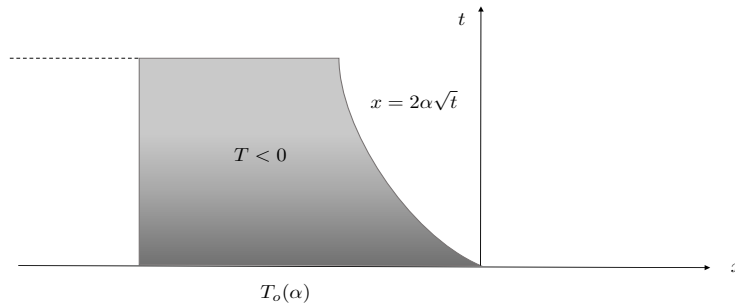


**Figura 1.9.** Esempio 2.

fornisce

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} T(x, t) = \sqrt{\pi}\alpha e^{\alpha^2} \operatorname{erf}(\alpha) = T_1(\alpha) > 0.$$

**Esempio 3:** ( $\alpha < 0$  e  $x < 2\alpha\sqrt{t}$ ) In questo caso stiamo considerando il dominio illimitato  $x < 2\alpha\sqrt{t}$  mostrato in figura 1.10. In questo caso dobbiamo considerare il limite per  $t \rightarrow 0$  che fornisce



**Figura 1.10.** Esempio 3.

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(x, t) = \sqrt{\pi}\alpha e^{\alpha^2} [\operatorname{erf}(\alpha) + 1] = T_o(\alpha) < 0.$$

Questo ultimo esempio è molto interessante dal punto di vista fisico poiché rappresenta la situazione del cosiddetto *sottoraffreddamento* (in inglese *supercooling*). Infatti, come si evince dalla figura 1.10, siamo nella situazione in cui la fase liquida si trova al di sotto della temperatura di formazione del ghiaccio. Si tratta insomma di acqua a temperatura inferiore allo zero. Da un punto di vista fisico si osserva che in questa situazione, se si perturba lo stato di quiete (agitando ad esempio il liquido o introducendo un corpo estraneo), si provoca l'istantanea solidificazione del materiale. L'esempio 3 rappresenta una situazione instabile da un punto di vista termodinamico, cioè il liquido è in condizione metastabile.

Possiamo interpretare gli esempi 1-3 anche come problema inverso, ossia:

- (Pb 1) Dato  $\Theta_o \geq 0$  determinare  $\alpha$  affinché  $T_o(\alpha) = \Theta_o$
- (Pb 2) Dato  $\Theta_1 \geq 0$  determinare  $\alpha$  affinché  $T_1(\alpha) = \Theta_1$
- (Pb 3) Dato  $\Theta_o < 0$  determinare  $\alpha$  affinché  $T_o(\alpha) = \Theta_o$

Possiamo provare il seguente

**Teorema 1** *I problemi 1-2 hanno una unica soluzione  $\alpha \geq 0$  per ogni scelta di  $\Theta_o, \Theta_1$ . Il problema 3 ha invece una unica soluzione se  $\Theta_o \in (-1, 0)$ .*

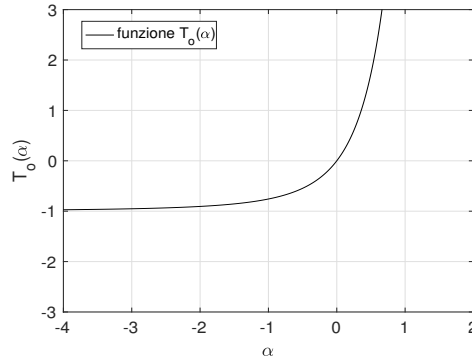
**dim.** Per il problema 1 si osserva che

$$T'_o(\alpha) = \sqrt{\pi}e^{\alpha^2} (1 + 2\alpha^2) [1 + \operatorname{erf}(\alpha)] + 2\alpha > 0 \quad \alpha > 0$$

con

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} T_o(\alpha) = \infty \quad T_o(0) = 0$$

Per cui  $T_o(\alpha)$  è una funzione monotona strettamente crescente (si veda la Fig. 1.11). Allo stesso



**Figura 1.11.** La funzione  $T_o(\alpha)$  per  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

modo si vede che

$$T'_1(\alpha) = \sqrt{\pi}e^{\alpha^2} (1 + 2\alpha^2) \operatorname{erf}(\alpha) + 2\alpha > 0 \quad \alpha > 0$$

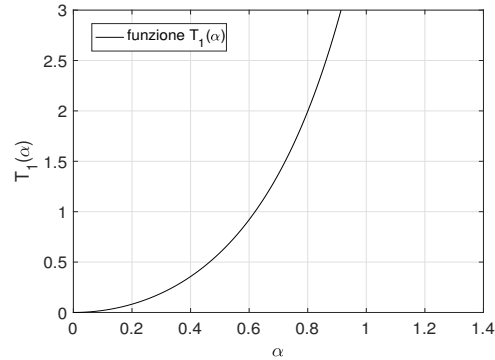
con

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} T_1(\alpha) = \infty \quad T_1(0) = 0$$

per cui anche il problema 2 ammette soluzione per qualunque scelta  $\Theta_1 \geq 0$  (si veda la Fig. 1.12). Per quanto riguarda invece il problema 3 dimostrare l'esistenza di una soluzione per  $\Theta_o \in (-1, 0)$  non è immediato. Per prima cosa calcoliamo il limite di  $T_o(\alpha)$  per  $\alpha \rightarrow -\infty$ . Utilizzando la regola de l'Hopital si trova

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} T_o(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\pi} [\operatorname{erf}(\alpha) + 1]}{\frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{2e^{-\alpha^2}}{-2e^{-\alpha^2} - \frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha^2}} = -1 \quad (1.51)$$

Osserviamo poi che



**Figura 1.12.** La funzione  $T_1(\alpha)$  per  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .

$$T'_o(\alpha) = T_o(\alpha) \frac{1 + 2\alpha^2}{\alpha} + 2\alpha \qquad T''_o(\alpha) = T'_o(\alpha) \frac{1 + 2\alpha^2}{\alpha} + 2 + T_o(\alpha) \frac{2\alpha^2 - 1}{\alpha^2}$$

con  $T'_o(0) = \sqrt{\pi}$ . Supponiamo che  $\bar{\alpha} < 0$  sia un punto  $T'_o(\bar{\alpha}) = 0$ . Si ha

$$T_o(\bar{\alpha}) = -\frac{2\bar{\alpha}^2}{1 + 2\bar{\alpha}^2} \in (-1, 0)$$

$$T''_o(\bar{\alpha}) = \frac{4}{1 + 2\bar{\alpha}^2} > 0,$$

per cui  $\bar{\alpha}$  può essere solamente un punto di minimo t.c.  $T_o(\bar{\alpha}) \in (-1, 0)$ , contraddicendo la (1.51). Se ne conclude che  $T'_o(\alpha) > 0$  anche per  $\alpha < 0$  e questo conclude la dimostrazione del teorema.

L'interpretazione fisica del teorema 1 risulta adesso chiara. Mentre lo scioglimento del ghiaccio è dovuto ad una temperatura iniziale positiva oppure ad una temperatura positiva sulla superficie  $x = 0$ , la conversione di un liquido sottoraffreddato in ghiaccio a temperatura nulla è possibile solo se la temperatura iniziale è negativa ma non eccessivamente fredda, ossia per  $\Theta_o \in (-1, 0)$ .

---

## La teoria dello strato limite

In questo capitolo ci occupiamo del problema del flusso di un fluido viscoso con bassa viscosità attorno ad un profilo solido. Lo studio di questo tipo di dinamica ci porterà all'introduzione dello strato limite della quantità di moto, ossia una regione in prossimità di una parete solida in cui gli effetti viscosi del fluido sono non trascurabili anche per piccoli valori della viscosità. Da un punto di vista matematico abbiamo a che fare con qualcosa di simile a quanto visto nella sezione 1.4, anche se qui il problema è di natura meccanica e non termica.

La teoria dello strato limite si basa sul lavoro dell'ingegnere tedesco Ludwig Prandtl che all'inizio del '900 ipotizzò, in un flusso potenziale attorno ad un ostacolo, l'esistenza di una zona in prossimità dell'ostacolo, detta appunto strato limite, in cui la velocità differisce drasticamente da quella uniforme caratteristica della porzione di fluido lontana dall'ostacolo.

Prandtl ipotizzò inoltre che le dimensioni dello strato limite fossero piccole rispetto alle dimensioni caratteristiche del campo di moto del fluido. Le linee di corrente di un tale flusso rimangono perciò inalterate fin quando non intersecano lo strato limite, cominciando poi a deflettere a causa del drastico rallentamento della velocità.

Cominciamo quindi considerando il flusso di un fluido viscoso newtoniano con bassa viscosità, come ad esempio l'aria, attorno ad un profilo solido fisso. Per far questo dobbiamo prima dare alcuni cenni riguardo la cinematica e la dinamica dei mezzi continui.

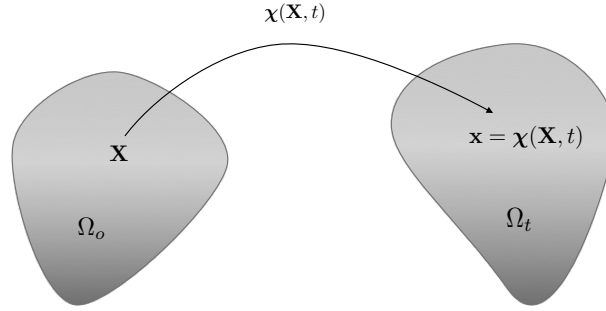
### 2.1 Richiami di meccanica dei continui

Per descrivere il moto di fluido supponiamo che esso occupi un dominio formato da punti materiali dotati di massa. Supponiamo che il dominio occupato dal fluido ad un istante  $t = 0$  sia una certa regione  $\Omega_o \subset \mathbb{R}^3$ . Supponiamo invece che all'istante  $t > 0$  il medesimo fluido occupi una regione  $\Omega_t$ , come rappresentato in Fig. 2.1. La configurazione  $\Omega_o$  si dice *configurazione di riferimento*, mentre la  $\Omega_t$  si dice *configurazione attuale*. Un punto  $\mathbf{X} \in \Omega_o$  viene portato nel punto  $\mathbf{x} \in \Omega_t$  attraverso la mappa

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t). \quad (2.1)$$

La funzione  $\chi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  rappresenta il *moto* ed è una incognita da determinare per mezzo di equazioni di bilancio. Le coordinate  $\mathbf{X}$  della configurazione di riferimento si dicono *coordinate lagrangiane*, mentre le  $\mathbf{x}$  della configurazione attuale si dicono *coordinate euleriane*. Definiamo il *gradiente di deformazione*

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{X}},$$



**Figura 2.1.** Volume materiale di fluido.

dove  $\mathbf{F}$  è un tensore del secondo ordine (ossia una matrice  $3 \times 3$ ) tale che

$$F_{ij} = \frac{\partial \chi_i}{\partial X_j}.$$

Per evitare problematiche di natura topologica richiederemo che  $\chi \in C^2$  e che lo Jacobiano

$$J = \det \mathbf{F} > 0. \quad (2.2)$$

Per descrivere l'evoluzione del mezzo continuo possiamo utilizzare due tipi di approcci:

- approccio *lagrangiano*: si descrive l'evoluzione dei punti  $\mathbf{X}$  seguendone la traiettoria al variare del tempo
- approccio *euleriano*: si descrive l'evoluzione del sistema ponendosi in un punto  $\mathbf{x}$  dello spazio e osservando le particelle che al variare del tempo transitano per quel punto.

In meccanica dei fluidi l'approccio comunemente utilizzato è quello *euleriano*. La velocità e l'accelerazione di un punto  $\mathbf{X}$  nella rappresentazione lagrangiana sono date da

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \quad \mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}(\mathbf{X}, t),$$

mentre nella rappresentazione euleriana

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \right|_{\mathbf{x}=\chi^{-1}(\mathbf{x}, t)} \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}(\mathbf{X}, t) \right|_{\mathbf{x}=\chi^{-1}(\mathbf{x}, t)}$$

dove

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.3)$$

è la mappa inversa di (2.1) la cui esistenza è garantita dalla (2.2). Supponiamo che  $G$  rappresenti una qualsiasi quantità scalare definita sul mezzo continuo. Per  $G$  avremo due rappresentazioni: quella lagrangiana  $G_L(\mathbf{X}, t)$  e quella euleriana  $G_E(\mathbf{x}, t)$ . In particolare possiamo scrivere

$$G = G_L(\mathbf{X}, t) = G_E(\mathbf{x}, t),$$

dove il passaggio da una rappresentazione all'altra si effettua tramite la (2.1) e la sua inversa (2.3). Derivando  $G_L$  rispetto al tempo si trova

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G_L}{\partial t}(\mathbf{X}, t),$$

dal momento che le  $\mathbf{X}$  non dipendono dal tempo. Se invece deriviamo  $G_E$  rispetto al tempo otteniamo

$$\frac{dG}{dt} = \frac{dG_E}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ G_E(\chi(\mathbf{X}, t), t) \right] = \nabla_{\mathbf{x}} G_E(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial G_E}{\partial t}(\mathbf{x}, t),$$

dove il gradiente è fatto rispetto alle coordinate euleriane. Notiamo dunque che nella derivata euleriana la variazione nel tempo ha anche un termine convettivo dovuto al fatto che al variare del tempo la particella che transita per  $\mathbf{x}$  non è sempre la stessa. La derivata  $d/dt$  si dice *derivata materiale* o *derivata sostanziale*, e rappresenta la derivazione nel tempo lungo le traiettorie delle particelle. I moti *stazionari* sono quelli per cui localmente

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Una porzione di continuo si dice *volume materiale* quando le particelle che compongono il volume sono, al variare del tempo, sempre le stesse. Consideriamo allora una quantità scalare  $G$  definita su un volume materiale  $\Omega_t$  e consideriamo in particolare la sua rappresentazione euleriana. Per semplicità eliminiamo il pedice  $E$ . Possiamo provare (rimandiamo il lettore interessato alla dimostrazione a [7]) che

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} G(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial G}{\partial t} + \operatorname{div}(G\mathbf{v}) \right] d\mathbf{x}. \quad (2.4)$$

La relazione (2.4) è nota anche come *teorema del trasporto di Reynolds*. Attraverso la (2.4) è facile ricavare l'equazione di continuità (1.25). Infatti prendendo  $G = \rho$  e considerando che la (2.4) vale per  $\Omega_t$  ma anche per ogni sottodominio di  $\Omega_t$  si trova esattamente la (1.25). Prendendo  $G = 1$  si trova

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} [\operatorname{Vol}(\Omega_t)] = \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad (2.5)$$

da cui si nota che se  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  (campo vettoriale *solenoidale*) il volume di qualsiasi dominio materiale viene conservato durante il moto (moto isocorico). Per scrivere il bilancio della quantità di moto di un dominio materiale  $\Omega_t$  (l'equivalente della seconda legge di Newton per i mezzi continui) dobbiamo scrivere la relazione

$$\frac{d}{dt} (\text{quantità di moto di } \Omega_t) = \text{Risultante delle forze applicate a } \Omega_t$$

La quantità di moto di  $\Omega_t$  è data da

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} d\mathbf{x}.$$

Utilizzando il teorema del trasporto (2.4) per la  $i$ -esima componente si trova

$$\frac{dQ_i}{dt} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \operatorname{div} (\rho v_i \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \underbrace{v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \operatorname{div} (\rho \mathbf{v})}_{=0} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \nabla v_i \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}.$$

per cui

$$\frac{dQ_i}{dt} = \int_{\Omega_t} \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + \nabla v_i \cdot \mathbf{v} \right) d\mathbf{x}. \quad (2.6)$$

Introducendo il tensore gradiente di velocità

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

possiamo scrivere la (2.6) in forma vettoriale

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \int_{\Omega_t} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} \right) d\mathbf{x}. \quad (2.7)$$

dove

$$(\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

è il prodotto righe per colonne. La (2.7) rappresenta la velocità di variazione della quantità di moto del volume  $\Omega_t$ . Adesso dobbiamo scrivere la risultante delle forze applicate a  $\Omega_t$ . Per far questo introduciamo il concetto di sforzo all'interno del volume  $\Omega_t$  (per una trattazione più rigorosa si veda [7]). In un mezzo continuo lo stato delle forze è dato da un vettore  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$  denominato *sforzo*. Lo sforzo rappresenta la forza per unità di superficie esercitata su un elemento di superficie  $d\sigma$  (centrato in  $\mathbf{x}$  e con normale  $\mathbf{n}$ ) da una delle due porzioni del mezzo separate dalla superficie  $d\sigma$ , vedi Fig. 2.2. Per il principio di azione e reazione

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}, t) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t).$$

La componente dello sforzo lungo la normale  $\mathbf{n}$  si dice *normale*, mentre la componente lungo lo spazio tangente a  $d\sigma$  si chiama *di taglio*. Supponendo che  $\Omega_t$  sia una parte del mezzo continuo e quindi circondato da una ulteriore porzione del mezzo, possiamo asserire che l'azione della parte complementare a  $\Omega_t$  esercita una forza su  $\partial\Omega_t$  data da

$$\Phi_S = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) d\sigma, \quad (2.8)$$

dove  $\mathbf{n}$  rappresenta la normale esterna a  $\partial\Omega_t$ . Le altre forze che agiscono su  $\Omega_t$  si dicono forze di massa ed agiscono a distanza (l'esempio più comune è la forza di gravità). Queste si indicano mediante un vettore risultante  $\mathbf{f}$  che rappresenta la forza per unità di massa agente su  $\Omega_t$ . In conclusione le forze di massa possono essere rappresentate come

$$\Phi_M = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (2.9)$$



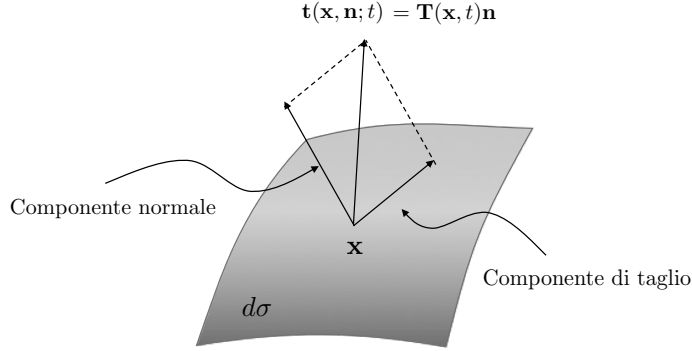


Figura 2.2. Sforzo in un mezzo continuo.

Il bilancio della quantità di moto è dato dunque da

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \Phi_S + \Phi_M.$$

Utilizzando le (2.7), (2.8), (2.9) si ottiene

$$\int_{\Omega_t} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} \right) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) d\sigma + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad (2.10)$$

che rappresenta la formulazione integrale del bilancio della quantità di moto (o momento lineare). È possibile dimostrare il seguente

**Teorema 1 (Cauchy)** Il vettore  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$  è lineare in  $\mathbf{n}$  per cui è possibile determinare un tensore  $\mathbf{T}$  con componenti  $T_{ij}(\mathbf{x}, t)$  tale che

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}.$$

**Dimostrazione** Prendiamo un tetraedro infinitesimale come quello rappresentato in Fig. 2.3 e osserviamo che esso ha tre facce perpendicolari agli assi coordinati e una normale a  $\mathbf{n}$ . Supponiamo che  $d\sigma$  sia l'area della superficie normale a  $\mathbf{n}$  e che  $d\sigma_i$  sia l'area della superficie normale a  $\mathbf{e}_i$ . L'area  $d\sigma_i$  può essere determinata facendo la proiezione di  $d\sigma$  sulla faccia perpendicolare a  $\mathbf{e}_i$

$$d\sigma_i = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) d\sigma = n_i d\sigma,$$

dove

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3.$$

L'equazione di equilibrio per il tetraedro infinitesimale è data da

$$0 = \Phi_S + \Phi_M.$$

Ricordando che le dimensioni del tetraedro sono infinitesime (per cui possiamo non considerare gli integrali nell'equazione di bilancio), dalla (2.10) si ottiene

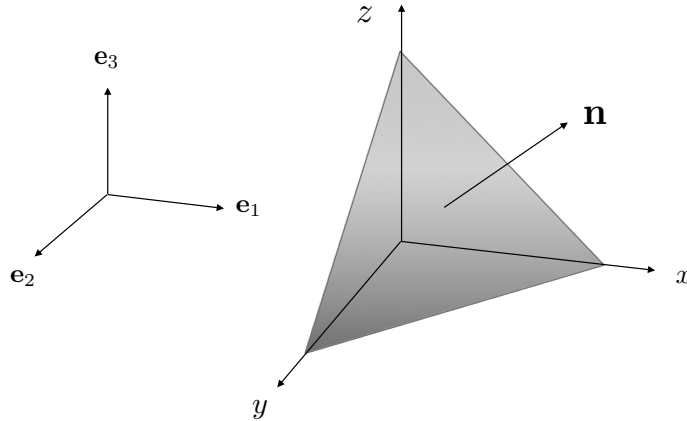


Figura 2.3. Tetraedro di Cauchy

$$\underbrace{\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x}}_{\text{forze di massa}} + \underbrace{\sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_i, t)d\sigma_i + \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)d\sigma}_{\text{forze di superficie}} = 0,$$

o analogamente

$$\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_i, t)n_i d\sigma + \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)d\sigma = 0. \quad (2.11)$$

Dato che  $d\mathbf{x}$  rappresenta il volume del tetraedro e  $d\sigma$  una delle sue facce si ha

$$\lim_{d\sigma \rightarrow 0} \left( \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} \right) = 0,$$

cosicch , dividendo la (2.11) per  $d\sigma$  e calcolando il limite  $d\sigma \rightarrow 0$ , otteniamo

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i, t)n_i.$$

Se definiamo il tensore dello stress di Cauchy  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  come il tensore le cui colonne sono date dai vettori  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i, t)$  troviamo

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}.$$

Per cui

$$T_{ij}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i, t) \cdot \mathbf{e}_j.$$

e

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

In pratica  $\mathbf{t}$  può essere espresso mediante un tensore del secondo ordine (una matrice  $3 \times 3$ ) applicata ad  $\mathbf{n}$ . La componente normale dello sforzo è

$$\mathbf{t}_n = (\mathbf{T}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n},$$

mentre quella tangenziale è

$$\mathbf{t}_t = \mathbf{T}\mathbf{n} - (\mathbf{T}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}.$$

Il tensore degli sforzi di Cauchy  $\mathbf{T}$  è simmetrico<sup>1</sup> e rappresenta lo stato di tensione del mezzo. L'equazione (2.10) diventa dunque

$$\int_{\Omega_t} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} \right) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}d\sigma + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (2.13)$$

Applicando il teorema delle divergenze a ciascuna componente dell'integrale di superficie su  $\partial\Omega_t$  nella (2.13) si trova che

$$\int_{\partial\Omega_t} \mathbf{T}\mathbf{n}d\sigma = \int_{\Omega_t} \text{div } \mathbf{T} d\mathbf{x}.$$

dove

$$\text{div } \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} + \frac{\partial T_{13}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} + \frac{\partial T_{23}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{13}}{\partial x} + \frac{\partial T_{23}}{\partial y} + \frac{\partial T_{33}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Per l'arbitrarietà di  $\Omega_t$  si trova

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} \right) = \text{div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}, \quad (2.14)$$

che rappresenta la formulazione locale del bilancio del momento lineare o quantità di moto.

La forma di  $\mathbf{T}$  dipende dalla natura del mezzo continuo che stiamo considerando (solido, liquido, elastico, viscoso, ecc). Il tensore  $\mathbf{T}$  è solitamente dato in funzione delle variabili cinematiche del sistema (e.g. velocità o sue derivate). L'equazione che specifica la dipendenza di  $\mathbf{T}$  dalle variabili cinematiche e/o termodinamiche si dice *equazione costitutiva*.

## 2.2 Fluidi Newtoniani e fluidi ideali

Come detto in precedenza, lo stato di tensione  $\mathbf{T}$  dipende dal tipo di materiale che stiamo considerando. Solitamente nei fluidi  $\mathbf{T}$  è legato alle variabili cinematiche come la velocità. Per un fluido viscoso incompressibile si ha

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \quad (2.15)$$

dove  $\mu$  è un coefficiente chiamato *viscosità*,  $p$  è la pressione e

<sup>1</sup> La simmetria di  $\mathbf{T}$  si prova imponendo il bilancio del momento angolare. Per la dimostrazione si veda [7].

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

è il tensore identità. Sostituendo la (2.15) nella (2.14) troviamo

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \operatorname{div}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \rho \mathbf{f}. \quad (2.17)$$

Mediante semplici calcoli è possibile mostrare che

$$\operatorname{div}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}) + \mu \Delta \mathbf{v},$$

dove

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Ricordando che in un fluido incomprimibile  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , si trova la cosiddetta equazione di Navier-Stokes

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{f}. \quad (2.18)$$

Una derivazione rigorosa dell'equazione di Navier-Stokes può essere trovata in [1]. I fluidi in cui  $\mu = 0$  si dicono *ideali* o *inviscidi*. L'equazione costitutiva dei fluidi ideali è

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$$

e il bilancio della quantità di moto si riduce a

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{f},$$

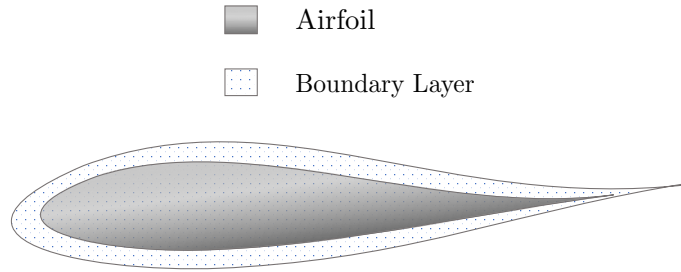
nota anche come *equazione di Eulero*. Notiamo che, mentre l'equazione di Navier-Stokes è del secondo ordine (sono presenti infatti le derivate seconde della velocità), l'equazione di Eulero è del primo ordine.

### 2.3 La teoria dello strato limite

In generale i fluidi sono definiti come mezzi continui in cui gli sforzi di taglio sono nulli in condizioni statiche. Questo significa che a riposo l'unica componente non nulla dello sforzo è quella normale. Nei fluidi ideali le componenti di taglio sono nulle anche in condizioni dinamiche, il che significa che gli strati di fluido non esercitano sforzi di taglio l'un con l'altro. Ovviamente l'assunzione di fluido ideale è una idealizzazione, in quanto in realtà si tratta di un fluido viscoso con viscosità molto

bassa. La forza di “drag” (trascinamento) esercitata sulle pareti di un solido immerso in un fluido ideale è dunque nulla, in quanto l’azione di taglio esercitata dal fluido è pari a zero. Questo risultato, noto anche come “paradosso di d’Alembert”, contrasta con l’esperienza quotidiana, basti pensare alla forza esercitata dall’aria (che con buona approssimazione può essere considerata un fluido ideale) su un braccio posto fuori dal finestrino di una macchina in moto.

Considerando un profilo solido come quello mostrato in Fig. 2.4, dall’ipotesi di fluido ideale abbiamo che la velocità tangenziale delle particelle di aria sul profilo non risente del fatto che tali particelle sono a contatto con il mezzo rigido (velocità tangenziale non nulla). Ma se la forza di trascinamento non è nulla, come si evince dall’esperimento del braccio fuori dal finestrino, allora in qualche maniera queste particelle debbono “attaccarsi” al profilo rigido. Per superare questo



**Figura 2.4.** Profilo alare e strato limite.

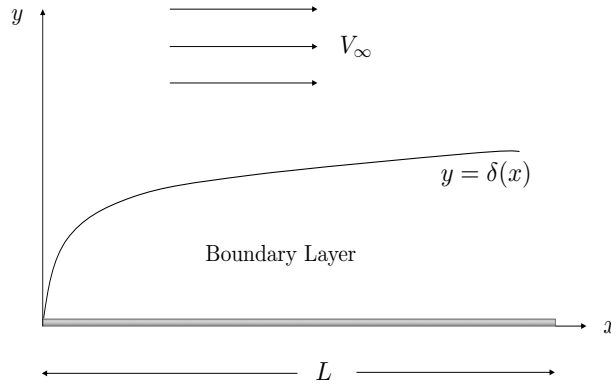
paradosso Prandtl, nel 1904, propose l’ipotesi che in prossimità del profilo rigido l’aria si comporti come un fluido viscoso (che si attacca dunque al solido trascinando quindi il corpo), mentre lontano da esso si comporti come un fluido ideale. In questo caso la velocità dell’aria sul profilo, ossia la velocità relativa aria-solido, è nulla. In pratica, in un piccolo intorno dell’ala di spessore  $\delta$  la velocità dell’aria varia molto rapidamente da 0 fino ad un valore uniforme. Lo spessore di questo intorno viene chiamato “strato limite” (*boundary layer* in inglese) e può variare lungo il profilo, ossia si ha  $\delta = \delta(s)$ , dove  $s$  rappresenta l’ascissa curvilinea che descrive il profilo alare. In Figura 2.4 viene mostrato il profilo solido e lo strato limite attorno ad esso.

## 2.4 Modello per il calcolo dello spessore dello strato limite

Vogliamo scrivere un modello matematico che ci permetta di calcolare lo spessore dello strato limite. Per far questo consideriamo una idealizzazione in cui il profilo diventa una lastra piana di lunghezza  $L$ , ossia un oggetto unidimensionale, come quello mostrato in Figura 2.5. Come in precedenza, l’idealizzazione del modello ci permetterà di dedurre il comportamento del profilo in situazioni più generali di quella di una lastra. Il modello semplice (idealizzato) ci darà dunque informazioni circa il comportamento nel caso di un profilo bidimensionale. Il moto di un fluido incomprimibile newtoniano è governato dalla equazione di Navier-Stokes (2.18) che in assenza di forze di massa diventa

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} \end{cases} \quad (2.19)$$

Consideriamo il caso 2D, ossia quello in cui



**Figura 2.5.** Strato limite: il caso di una lastra piana.

$$\mathbf{v}(x, y, t) = v_1(x, y, t)\mathbf{e}_1 + v_2(x, y, t)\mathbf{e}_2. \tag{2.20}$$

L'equazione (2.19) diventa

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0, \\ \rho \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right) \end{cases} \tag{2.21}$$

Le equazioni (2.21) descrivono il moto dell'aria in prossimità della lastra. Lontano dalla lastra, ossia al di fuori dello strato limite, le (2.21) sono automaticamente soddisfatte da un campo di velocità e pressione uniformi. Il problema (2.21) deve essere accoppiato alle condizioni al contorno

$$\begin{cases} \lim_{y \rightarrow \infty} \mathbf{v} = V_\infty \mathbf{e}_1, \\ \lim_{y \rightarrow \infty} p = p_o, \\ \mathbf{v} = 0, \quad \text{su } y = 0, \quad x > 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

Le prime due relazioni di (2.22) ci dicono che lontano dalla lastra la velocità e la pressione sono uniformi, mentre la (2.22)<sub>3</sub> corrisponde alla richiesta che le particelle di fluido aderiscano alla lastra solida.

## 2.5 Adimensionalizzazione

Come per il problema termico, anche per questo, usiamo grandezze caratteristiche per identificare, nelle (2.21), quali termini “contano” e quali no. Considereremo solamente il caso stazionario, ossia quello in cui le derivate temporali vengono trascurate. Consideriamo un sistema di riferimento

solidale con la lastra e supponiamo che la velocità dell'aria lontano dal profilo alare sia  $\mathbf{v} = V_\infty \mathbf{e}_1$ . Riscaliamo le variabili del modello nel seguente modo:

$$\begin{aligned} v_1 &= V_\infty \tilde{v}_1, & v_2 &= \left( \frac{V_\infty D}{L} \right) \tilde{v}_2, & p &= \rho V_\infty^2 \tilde{p} \\ x &= L \tilde{x}, & y &= D \tilde{y}, \end{aligned}$$

dove  $D$  è uno spessore caratteristico del boundary layer che deve essere determinato. La riscala-  
tura della pressione  $\rho V_\infty^2$  viene anche indicata con il termine "scala di pressione aerodinamica" e  
rappresenta l'ordine di grandezza delle forze inerziali. Supponiamo, seguendo l'idea di Prandtl, che  
 $D \ll L$  ed introduciamo il parametro

$$\varepsilon = \frac{D}{L} \ll 1, \quad (2.23)$$

che afferma che lo spessore caratteristico dello strato limite è piccolo in confronto alla lunghezza  $L$   
della lastra. In questo caso

$$v_1 = V_\infty \tilde{v}_1, \quad v_2 = \varepsilon V_\infty \tilde{v}_2, \quad x = L \tilde{x}, \quad y = \varepsilon L \tilde{y}.$$

Le equazioni che governano il moto stazionario (in cui si trascura la dipendenza dal tempo) in forma  
adimensionale diventano

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \tilde{y}} &= 0, \\ \left( \frac{\rho V_\infty^2}{L} \right) \left[ \tilde{v}_1 \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_2 \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \tilde{y}} \right] &= - \left( \frac{\rho V_\infty^2}{L} \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \mu \left[ \left( \frac{V_\infty}{L^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{v}_1}{\partial \tilde{x}^2} + \left( \frac{V_\infty}{\varepsilon^2 L^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{v}_1}{\partial \tilde{y}^2} \right], \\ \left( \frac{\varepsilon \rho V_\infty^2}{L} \right) \left[ \tilde{v}_1 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_2 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \tilde{y}} \right] &= - \left( \frac{\rho V_\infty^2}{\varepsilon L} \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \mu \left[ \left( \frac{\varepsilon V_\infty}{L^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{v}_2}{\partial \tilde{x}^2} + \left( \frac{\varepsilon V_\infty}{\varepsilon^2 L^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{v}_2}{\partial \tilde{y}^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Dopo un pò di calcoli si trova (omettiamo i tilda per semplicità )

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} &= 0, \\ \left[ v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right] &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\mu L V_\infty}{\rho V_\infty^2 \varepsilon^2 L^2} \right) \left[ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right], \\ \left[ v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] &= - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \left( \frac{\mu L V_\infty}{\rho V_\infty^2 \varepsilon^2 L^2} \right) \left[ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right], \end{aligned} \right. \quad (2.24)$$

Introduciamo il numero di Reynolds

$$\text{Re} = \frac{\rho V_\infty L}{\mu} = \frac{\rho V_\infty^2}{\left( \frac{\mu V_\infty}{L} \right)}, \quad (2.25)$$

che rappresenta il rapporto fra le forze inerziali e quelle viscosi. Il coefficiente di fronte alle derivate del secondo ordine in (2.24) diventa

$$\left( \frac{\mu L V_\infty}{\rho V_\infty^2 \varepsilon^2 L^2} \right) = \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}}. \quad (2.26)$$

In conclusione possiamo riscrivere il problema come

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0, \\ \left[ v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \right) \left[ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right], \\ \left[ v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] = -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \left( \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \right) \left[ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right], \end{cases}$$

Supponiamo che  $V_\infty$  sia molto grande, cosicché  $\text{Re} \gg 1$ . Supponiamo, ad esempio, che

$$\text{Re} = O(\varepsilon^{-2}) \quad \implies \quad \varepsilon^2 \text{Re} = O(1),$$

e poniamo

$$\alpha = \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} = O(1). \quad (2.27)$$

Trascuriamo adesso tutti i termini contenenti  $\varepsilon$ , ossia consideriamo l'ordine zero del problema. Il sistema di equazioni diventa

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0, \\ v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}, \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Il problema dunque si semplifica notevolmente, pur mantenendo il suo carattere non lineare. Adesso riscriviamo le condizioni al contorno in forma adimensionale. Otteniamo

$$\begin{cases} \lim_{y \rightarrow \infty} v_1 = 1, \\ \lim_{y \rightarrow \infty} p = p_o, \\ v_1 = v_2 = 0, \quad \text{su } y = 0, \quad x > 0. \end{cases}$$

La seconda condizione accoppiata con la (2.28)<sub>3</sub> ci dice che  $p = p_o$  ovunque. Dobbiamo quindi risolvere il problema



$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0, \\ v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}, \\ \lim_{y \rightarrow \infty} v_1 = 1, \\ v_1 = v_2 = 0, \quad \text{su } y = 0, \quad x > 0, \end{cases} \quad (2.29)$$

la cui soluzione fornirà il campo di velocità nello strato limite.

## 2.6 L'equazione di Blasius

Il fisico tedesco P. Blasius propose nel 1907 di risolvere il problema (2.29) mediante una soluzione di tipo auto simile. Questo metodo permette di ridurre il problema (2.29), composto da equazioni alle derivate parziali, ad un problema composto esclusivamente da una equazione differenziale non lineare. In pratica si cerca una soluzione nella forma

$$v_1(x, y) = f'(s) \quad s = \frac{y}{\sqrt{\alpha x}}, \quad (2.30)$$

dove  $f'(s)$  è incognita. Il motivo per il quale scegliamo la derivata prima di  $f$  e non  $f$  stessa risulterà più chiaro di seguito. Osserviamo preliminarmente che

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = -\frac{s}{2x}, \\ \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{\alpha x}}, \end{cases}$$

per cui

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x} &= -\frac{s}{2x} f''(s), & \frac{\partial v_1}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha x}} f''(s), \\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} &= f'''(s) \frac{1}{\alpha x}, & \frac{\partial v_2}{\partial y} &= -\frac{\partial v_1}{\partial x} = f''(s) \frac{s}{2x}. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\frac{\partial v_2}{\partial s} = \frac{\partial v_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = f''(s) \frac{s\alpha}{2\sqrt{\alpha x}},$$

da cui si ottiene

$$v_2 = \int \frac{\partial v_2}{\partial s} ds = \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha x}} \int f''(s) s ds.$$

Integrando per parti in  $s$  si trova

$$v_2 = \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha x}} [f'(s)s - f(s)]. \quad (2.31)$$

Per semplicità abbiamo preso la costante di integrazione pari a 0, dal momento che siamo interessati alla determinazione di  $f'$ , per cui una qualsiasi scelta della costante non altera il nostro risultato. Questo è sostanzialmente il motivo per cui abbiamo posto  $v_1 = f'$ . Sostituendo nella (2.29)<sub>2</sub> troviamo

$$-\frac{s}{2x}f'(s)f''(s) + \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha x}} \left[ f'(s)s - f(s) \right] \frac{f''(s)}{\sqrt{\alpha x}} = \frac{\alpha}{\alpha x} f'''(s),$$

che, dopo qualche semplificazione, fornisce

$$2f'''(s) + f(s)f''(s) = 0. \quad (2.32)$$

ossia una equazione differenziale non lineare del terzo ordine. Il problema è stato dunque trasformato in

$$\begin{cases} 2f'''(s) + f(s)f''(s) = 0, \\ f(0) = f'(0) = 0, \\ \lim_{s \rightarrow \infty} f'(s) = 1. \end{cases} \quad (2.33)$$

Per prima cosa notiamo che il problema (2.33) non è un problema di Cauchy, dal momento che invece del dato  $f''(0)$  abbiamo quello per la  $f'(s)$  con  $s \rightarrow \infty$ . Senza entrare nel merito del problema della soluzione numerica notiamo innanzitutto che (2.33) può essere ricondotto ad un problema differenziale del primo ordine mediante le sostituzioni

$$u = f',$$

$$\zeta = u' = f'',$$

$$\zeta' = f''' = -\frac{f''f}{2} = -\frac{\zeta f}{2}.$$

L'equazione (2.33)<sub>1</sub> si riduce al sistema del primo ordine

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} u \\ \zeta \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta \\ -\frac{\zeta f}{2} \\ u \end{pmatrix} = \mathbf{F}(u, \zeta, f). \quad (2.34)$$

I dati al contorno diventano

$$u(0) = 0 \quad u(\infty) = 1 \quad f(0) = 0.$$

Notiamo che

$$\int_0^\infty \frac{du}{ds} ds = u(\infty) - u(0) = 1,$$

che implica

$$\int_0^\infty \zeta(s) ds = 1. \quad (2.35)$$

Un metodo per la soluzione può essere quello di risolvere il problema (2.34) con i dati

$$u(0) = 0 \quad \zeta(0) = \gamma, \quad f(0) = 0,$$

in modo da ottenere una soluzione  $\zeta(s; \gamma)$  che dipende dal parametro  $\gamma$ . Successivamente si determina  $\gamma$  imponendo la (2.35).

### 2.7 La determinazione dello strato limite

In Fig. 2.6 si riporta il grafico di  $f'(s)$ . Tabulando i valori della  $f'(s)$  si nota che  $f'(5) \approx 0.99$ . Questo significa che per  $s \geq 5$  la velocità dimensionale si discosta da  $V_\infty$  dello 0.01%. In altre parole si ha che per  $x$  e  $y$  tali che  $s = y/(\sqrt{\alpha x}) \geq 5$  gli effetti della viscosità possono essere considerati trascurabili. Possiamo utilizzare dunque il valore  $s = 5$  come valore per la definizione dello spessore dello strato limite. Poniamo quindi

$$s = 5 = \frac{\delta(x)}{\sqrt{\alpha x}}.$$

Passando a variabili dimensionali scriviamo

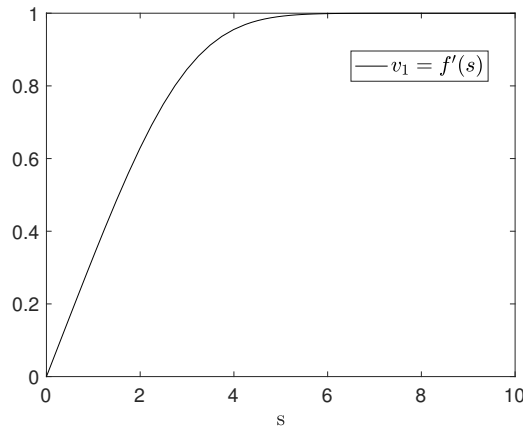


Figura 2.6. Soluzioni  $f'(s)$  e  $(f'(s)s - f(s))/2$ .

$$5 = \frac{\delta(x)}{\sqrt{\alpha \frac{x}{L}}} \tag{2.36}$$

Ricordandosi che

$$\alpha = \frac{1}{\varepsilon^2 Re} = \frac{\mu}{\rho V_\infty L \varepsilon^2},$$

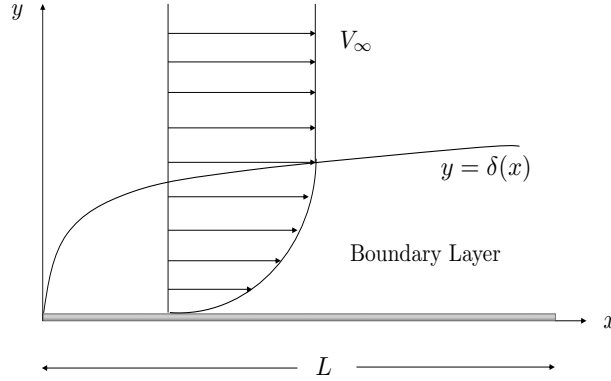
si trova, sempre in variabili dimensionali, che

$$5 = \frac{(\delta/D)}{\sqrt{\frac{x\mu}{\rho V_\infty D^2}}}, \tag{2.37}$$

ossia che

$$\delta(x) = 5\sqrt{\frac{x\nu}{V_\infty}}, \quad (2.38)$$

dove  $\nu = \mu/\rho$  è la cosiddetta viscosità cinematica. Il boundary layer quindi aumenta con l'aumentare della  $x$  proporzionalmente alla radice di  $x$ , come mostrato in Fig. 2.7. Una volta determinata,



**Figura 2.7.** Lo strato limite.

l'espressione dello strato limite (2.38) ci consente di calcolare l'azione dinamica che il fluido esercita sulla lastra piana. Indichiamo con  $\tau_w$  lo sforzo di taglio (forza per unità di superficie) che il fluido esercita sulla lastra. Osserviamo che

$$\tau_w = \mathbf{T}\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T_{12}.$$

Inoltre, ricordando l'equazione costitutiva di un fluido newtoniano (2.15), si vede facilmente che

$$\tau_w = T_{12}\big|_{y=0} = \mu \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \bigg|_{y=0}$$

Dal momento che  $v_2(x, 0) = 0$  si ha

$$\frac{\partial v_2}{\partial x}(x, 0) = 0$$

cosicché lo sforzo di taglio in variabili dimensionali si scrive

$$\tau_w = \mu \frac{\partial v_1}{\partial y} \bigg|_{y=0}.$$

Passando a variabili adimensionali si ha

$$\tau_w = \left( \frac{\mu V_\infty}{D} \right) \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \bigg|_{y=0} = \left( \frac{\mu V_\infty}{D} \right) \frac{1}{\sqrt{\alpha x/L}} f''(0). \quad (2.39)$$

Con semplici calcoli si ottiene

$$\tau_w = \mu V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{x\nu}} f''(0). \quad (2.40)$$

Notiamo che lo stress in  $x = 0$  diventa infinito, dal momento che  $f''(0) \approx 0.34$ . Tale singolarità è comunque integrabile, cosicché lo stress totale  $T_w$  che agisce sulla faccia superiore della lastra è dato da

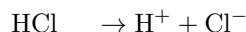
$$T_w = \mu V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu}} f''(0) \int_0^L \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\mu V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu}} f''(0) \sqrt{L}. \quad (2.41)$$



---

## Neutralizzazione di soluzioni acide

Consideriamo in questo capitolo un modello matematico per descrivere il processo di neutralizzazione di una soluzione acida. Gli acidi sono sostanze che hanno la capacità di trasferire ioni idrogeno  $\text{H}^+$  ad altre molecole. Quando per esempio si immette dell'acido cloridrico ( $\text{HCl}$ ) in acqua esso si dissocia in ioni  $\text{H}^+$  e  $\text{Cl}^-$



Gli ioni idrogeno reagiscono con le molecole d'acqua producendo ioni  $\text{H}_3\text{O}^+$ . Una soluzione dove la concentrazione di ioni  $\text{H}_3\text{O}^+$  supera quella degli ioni  $\text{OH}^-$  si dice una soluzione acida. Per comodità invece di considerare la concentrazione degli ioni  $\text{H}_3\text{O}^+$  si usa semplicemente il simbolo  $\text{H}^+$ . Per costruire il nostro modello noi considereremo una soluzione di acido cloridrico  $\text{HCl}$  in cui viene immesso del materiale reagente<sup>1</sup>. L'acido cloridrico si dissocia nella soluzione acquosa in ioni  $\text{H}^+$  e ioni  $\text{Cl}^-$ . Quando la concentrazione degli ioni  $\text{H}^+$  disciolti in soluzione è al di sopra di un certo valore detto di neutralità la soluzione si dice acida. La misura dell'acidità di una soluzione viene indicata solitamente mediante il logaritmo della concentrazione, ossia il pH. Più alta è la concentrazione di ioni  $\text{H}^+$  più basso è il pH e quindi più acida è la soluzione.

Gli ioni  $\text{H}^+$  che vengono in contatto con il solido reagente vengono neutralizzati, cosicché la quantità presente in soluzione diminuisce, innalzando di conseguenza il pH della soluzione. Quando la concentrazione di ioni  $\text{H}^+$  raggiunge una soglia di neutralità la reazione di neutralizzazione cessa e la soluzione si dice neutra.

Nella modellizzazione di una reazione chimica è necessario scrivere la cosiddetta *cinetica di reazione*, ossia la legge che lega la velocità di reazione  $v$  alla concentrazione di uno o più reagenti. In generale la cinetica di reazione nel caso di una unica specie reagente si può esprimere come

$$v = -k[A]^m,$$

dove  $k$  è una costante di proporzionalità detta costante di reazione,  $[A]$  è la concentrazione del reagente e  $m$  è l'ordine della reazione. Quando  $m = 1$  si parla di reazione del primo ordine in cui la velocità di reazione è proporzionale alla concentrazione del reagente.

In questo capitolo studieremo un modello per descrivere l'evoluzione della concentrazione di ioni  $\text{H}^+$  di una soluzione acida supponendo che la soluzione reagisca con un materiale solido reagente. Studieremo dunque un modello per l'evoluzione del pH della soluzione utilizzando come variabile del problema la concentrazione molare degli ioni  $\text{H}^+$ . Deriveremo il problema matematico in una forma del tutto generale per poi focalizzarci sul caso unidimensionale di una sbarretta di lunghezza fissata.

---

<sup>1</sup> Ad esempio carbonato di calcio

Non ci addentreremo nell'analisi matematica del problema (buona posizione, stabilità delle soluzioni ecc), ma faremo vedere la natura multi-scala nel tempo e nello spazio del problema e considereremo situazioni semplificate in cui è possibile determinare soluzioni analitiche che forniranno interessanti indicazioni sul processo fisico considerato. Il materiale di questo capito è quasi interamente ripreso dal lavoro [6].

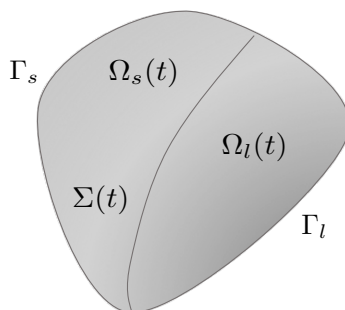
### 3.1 Modello generale

Consideriamo un dominio tridimensionale  $\Omega = \Omega_s(t) \cup \Omega_l(t)$ , dove  $\Omega_s(t)$  è costituito dal materiale solido reagente e  $\Omega_l(t)$  è costituito dalla soluzione acida, vedi Fig. 3.1. Indichiamo la dipendenza temporale per i domini  $\Omega_l$  e  $\Omega_s$  poiché i due domini variano nel tempo per via del consumo del materiale reagente a causa della reazione. La frontiera  $\partial\Omega$  può essere suddivisa in  $\partial\Omega = \Gamma_l \cup \Gamma_s$  dove

$$\Gamma_l = \bar{\Omega}_l \cap \partial\Omega,$$

$$\Gamma_s = \bar{\Omega}_s \cap \partial\Omega.$$

$\Gamma_l$  e  $\Gamma_s$  denotano le frontiere fisse dei domini liquido e solido. Possiamo pensare ad  $\Omega$  come ad un contenitore in cui sono presenti il materiale solido reagente  $\Omega_s$  ed il liquido da neutralizzare  $\Omega_l$ . In-



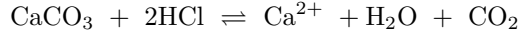
**Figura 3.1.** Dominio generico tridimensionale  $\Omega$

dichiamo con  $c(\mathbf{x}, t)$  la concentrazione molare di ioni  $H^+$  in  $\Omega_l(t)$ . Dal momento che in stechiometria le reazioni vengono quantificate in termini di rapporti molar, ha senso scegliere come dimensioni di  $c(\mathbf{x}, t)$  moli per unità di volume, ad esempio  $[c] = mol/lt$ . La concentrazione  $c(\mathbf{x}, t)$  ci permette di quantificare l'acidità della soluzione: più è alta la concentrazione, più acida è la soluzione. Un altro modo per quantificare l'acidità è quello di considerare il cosiddetto pH della soluzione definito come

$$pH = -\log_{10} \left( \frac{c(\mathbf{x}, t) \text{ mol/lt}}{1 \text{ mol/lt}} \right). \quad (3.1)$$

Indichiamo con  $\Sigma(t)$  la superficie di separazione fra la regione solida e quella liquida. Ovviamente questa superficie dipenderà dal tempo per via dell'evoluzione delle due regioni. Infatti la neutralizzazione di ioni  $H^+$  comporta necessariamente il consumo di materiale reagente. In un rapporto stechiometrico 1:1 questo significa che per ogni mole di ioni neutralizzata viene consumata una mole di materiale reagente. Nel caso dell'acido cloridrico e del carbonato di calcio la reazione è





In questo caso il rapporto stechiometrico è 1 : 2 poiché 1 mole di  $\text{CaCO}_3$  neutralizza due moli di  $\text{H}^+$ . Per semplicità noi considereremo una reazione in cui il rapporto stechiometrico è di 1:1. Sia  $S(\mathbf{x}, t) = 0$  la rappresentazione cartesiana di  $\Sigma(t)$ . La normale a  $\Sigma(t)$  è data da

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla S}{\|\nabla S\|} \quad (3.2)$$

Nella regione  $\Omega_l(t)$  gli ioni possono migrare per diffusione e la concentrazione evolve in base alla legge di Fick che afferma che il trasporto in soluzione degli ioni  $\text{H}^+$  avviene per trasferimento da punti a concentrazione più alta verso punti a concentrazione più bassa, tendendo ad uniformare la concentrazione. Questa legge, analoga a quella di Fourier per l'energia termica, ci dice in pratica che il flusso di ioni  $\text{H}^+$  è dato da

$$\mathbf{j} = -D\nabla c,$$

dove  $D$  (supposto costante) rappresenta il coefficiente di diffusività. Analogamente al caso termico, in assenza di convezione (la parte liquida è supposta immobile), l'equazione per  $c$  è

$$\frac{\partial c}{\partial t} - D\Delta c = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_l(t) \quad t \geq 0. \quad (3.3)$$

Il termine di sorgente pari a zero ci dice che non c'è creazione o rimozione di ioni  $\text{H}^+$  all'interno della soluzione. Il flusso di  $c$  attraverso la frontiera fissa  $\Gamma_l$  viene posto uguale a 0 poiché assumiamo che gli ioni non possano "scappare" dalla frontiera fissa della parte liquida  $\Gamma_l$ . Scriviamo dunque

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}_l = -D\nabla c \cdot \mathbf{n}_l = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_l, \quad (3.4)$$

dove  $\mathbf{n}_l$  rappresenta la normale a  $\Gamma_l$ . Sperimentalmente si osserva che le moli di  $\text{H}^+$  che sono in contatto con  $\Omega_s$  sulla superficie  $\Sigma$  reagiscono e vengono neutralizzate con una velocità di reazione proporzionale alla concentrazione di ioni  $\text{H}^+$  presenti su  $\Sigma$ , processo matematicamente analogo alla legge di raffreddamento di Newton studiata nel capitolo precedente. In pratica abbiamo a che fare con una reazione del primo ordine la cui cinetica può essere scritta come

$$v = -k(c - c_o)_+, \quad (3.5)$$

dove  $c_o$  è la concentrazione di neutralità,  $k$  è una costante di proporzionalità e  $v$  rappresenta il numero di moli neutralizzate per unità di superficie e per unità di tempo. Il pedice + rappresenta la parte positiva di  $c - c_o$ , ossia

$$(c - c_o)_+ = \max\{0; c - c_o\}.$$

Quando  $c \leq c_o$ , ossia quando la concentrazione di ioni  $\text{H}^+$  è al di sotto di quella di neutralità, la reazione non ha più luogo e  $v = 0$ . Le dimensioni di  $k$  e di  $v$  sono quindi

$$[v] = \frac{\text{mol}}{\ell^2 \cdot t} \quad [k] = \frac{\ell}{t}.$$

La concentrazione di neutralità corrisponde ad un pH=7, per cui

$$c_o = 10^{-7} \frac{\text{mol}}{\ell t}.$$

Integrando la (3.5) sulla superficie  $\Sigma$  si ottiene

$$\int_{\Sigma} v d\sigma = -k \int_{\Sigma} (c - c_o)_+ d\sigma, \quad (3.6)$$

che ci fornisce il numero totale di moli neutralizzate sulla superficie reagente per unità di tempo. Il numero di moli di  $H^+$  neutralizzate per unità di tempo coincide con il numero di moli di solido consumate per unità di tempo - questo poiché il rapporto stechiometrico nella reazione è di 1 a 1 - per cui possiamo imporre il seguente bilancio di massa

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega_s(t)} \rho d\mathbf{x} \right] = \int_{\Sigma} v d\sigma, \quad (3.7)$$

Nella (3.7)  $\rho$  rappresenta la densità molare del solido reagente, ossia le moli per unità di volume. Ricordiamo che la densità molare non è altro che la densità classica (massa per unità di volume) divisa per il peso molecolare. Osserviamo che il dominio  $\Omega_s(t)$  non è un dominio materiale, poiché ad ogni istante non è composto dalle stesse particelle di solido. Utilizzando il teorema del trasporto per domini non materiali (si veda [7]) il membro di sinistra della (3.7) può essere riscritto come

$$\int_{\Omega_s(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\partial \Omega_s(t)} \rho(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{\Sigma} v d\sigma, \quad (3.8)$$

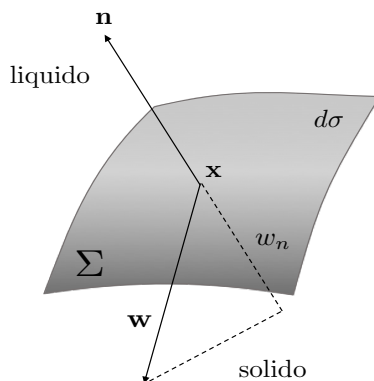
dove  $\mathbf{w}$  rappresenta la velocità della superficie

$$\partial \Omega_s = \Gamma_s \cup \Sigma.$$

Si noti che anche la superficie  $\Sigma$  non è una superficie materiale, nel senso che ad ogni istante le particelle del dominio che la compongono non sono le stesse. Si osservi infatti che il nostro sistema è completamente statico (sia il fluido che il solido sono immobili nel sistema di riferimento scelto), per cui il moto della superficie non può coincidere con quello delle particelle che la compongono. Se la densità molare del solido è costante, ossia se consideriamo che la distribuzione di massa della parte solida sia omogenea, si ha  $\partial \rho / \partial t = 0$ . Osservando poi che la velocità di  $\Gamma_s$  è nulla possiamo scrivere

$$\int_{\Sigma} \rho(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{\Sigma} v d\sigma. \quad (3.9)$$

Con riferimento alla figura 3.2 notiamo che la velocità normale  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$  è la proiezione della velocità  $\mathbf{w}$



**Figura 3.2.** Velocità normale della superficie  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = w_n$ .

lungo la normale  $\mathbf{n}$  ad un punto  $\mathbf{x} \in \Sigma$ . Se la superficie  $\Sigma$  è data in forma cartesiana allora possiamo scrivere  $S(\mathbf{x}(t), t) = 0$ , dove  $\mathbf{x}(t)$  è un punto (non materiale) della superficie che si muove al variare del tempo  $t$  con velocità  $\mathbf{w}$ . Derivando rispetto al tempo si ha

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla S \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla S \cdot \mathbf{w} = 0.$$

Ricordando la (3.2) si ha che

$$\frac{\partial S}{\partial t} \pm \|\nabla S\| \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = 0,$$

per cui

$$w_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = \pm \frac{S_t}{\|\nabla S\|}. \tag{3.10}$$

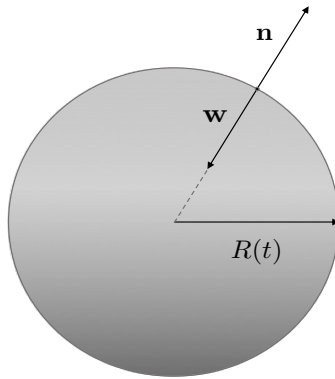
**Osservazione 1** Se scegliamo la normale uscente da  $\Omega_s$  allora dobbiamo prendere il segno meno nella (3.10). Per capire il motivo di questa scelta supponiamo che  $\Omega_s(t)$  sia una sfera con raggio  $R(t)$  decrescente nel tempo, come mostrato in Fig. 3.3. L'equazione cartesiana è perciò

$$S(\mathbf{x}, t) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2(t) = 0,$$

con

$$\dot{R}(t) < 0.$$

Infatti, se supponiamo che la sfera si consumi si ha che il raggio deve diminuire per cui  $\dot{R}(t) < 0$ . In questo caso  $\mathbf{w}$  è parallelo a  $\mathbf{n}$  ma con direzione opposta per cui



**Figura 3.3.** Velocità normale della superficie  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = w_n$ .

$$w_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{n}\| \cos(\pi) = -\|\mathbf{w}\|. \tag{3.11}$$

Inoltre

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -2\dot{R}(t)R(t) > 0 \qquad \|\nabla S\| = 2\|\mathbf{x}\|.$$

Dalla (3.10)

$$\underbrace{-\|\mathbf{w}\|}_{<0} = \pm \underbrace{\left(-\frac{2\dot{R}R}{2\|\mathbf{x}\|}\right)}_{>0}.$$

per cui dobbiamo scegliere il segno meno.

Di conseguenza scriviamo

$$w_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = -\frac{S_t}{\|\nabla S\|}. \quad (3.12)$$

cosicché la (3.9) diventa

$$\int_{\Sigma} v d\sigma = -\rho \int_{\Sigma} \frac{S_t}{\|\nabla S\|} d\sigma = -k \int_{\Sigma} (c - c_o)_+ d\sigma. \quad (3.13)$$

Dal momento che la (3.13) deve valere non solo per  $\Sigma$ , ma anche per ogni suo sottoinsieme, si ha

$$\rho \frac{S_t}{\|\nabla S\|} = k(c - c_o)_+. \quad (3.14)$$

La (3.14) rappresenta l'equazione di evoluzione di  $\Sigma$ . Notiamo che la relazione sopra non è sufficiente alla chiusura del problema matematico. Infatti, dal momento che  $\Sigma$  non è a priori nota, abbiamo a che fare con un problema a frontiera libera.

Per derivare la seconda condizione da imporre sulla frontiera libera  $\Sigma$  dobbiamo scrivere il flusso netto attraverso la superficie  $\Sigma$ . Questo sarà dovuto al flusso diffusivo e al flusso convettivo dovuto al moto della superficie stessa. Infatti, benché il sistema sia statico, la superficie  $\Sigma(t)$  non lo è e di conseguenza la velocità relativa fluido/superficie non è nulla. Il flusso netto dovrà essere uguale alla velocità di consumo di moli di  $H^+$  sulla superficie per via della reazione. Il bilancio di massa impone che

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega_l(t)} c(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega_s(t)} \rho d\mathbf{x} \right] = \int_{\Sigma} -k(c - c_o)_+ d\sigma, \quad (3.15)$$

Di conseguenza

$$\int_{\Omega_l(t)} \frac{\partial c}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_l(t)} c\mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathbf{x} = \int_{\Sigma} -k(c - c_o)_+ d\sigma,$$

dove  $\hat{\mathbf{n}}$  è la normale esterna a  $\Omega_l(t)$ . Ricordando che  $c$  soddisfa la (3.3), che  $\hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{n}$  e che  $\mathbf{w} = 0$  su  $\Gamma_l$  si trova

$$\int_{\Omega_l(t)} D\Delta c d\mathbf{x} - \int_{\Sigma} c\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} = \int_{\Sigma} -k(c - c_o)_+ d\sigma,$$

che, tramite il teorema della divergenza applicato al primo integrale, conduce a

$$\int_{\Sigma} -D\nabla c \cdot \mathbf{n} d\sigma - \int_{\Sigma} c\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} = \int_{\Sigma} -k(c - c_o)_+ d\sigma.$$

Ricordando infine che quest'ultima equazione deve valere anche per ogni sottoinsieme di  $\Sigma$  si trova

$$\underbrace{-D\nabla c \cdot \mathbf{n} - c\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}}_{\text{flusso netto attraverso } \Sigma} = \underbrace{-k(c - c_o)_+}_{\text{Velocità di reazione}}, \quad (3.16)$$

che ci fornisce l'ulteriore condizione da imporre su  $\Sigma$ . Ricordando la (3.12) si ha

$$-D\nabla c \cdot \mathbf{n} + c \frac{S_t}{\|\nabla S\|} = -k(c - c_o)_+. \quad (3.17)$$

Riassumendo il problema da risolvere è il seguente

$$\left\{ \begin{array}{ll} c_t - D\Delta c = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_l(t), \\ c(\mathbf{x}, 0) = \hat{c}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_l(0), \\ S(\mathbf{x}, 0) = \hat{S}(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_l(0) \cap \bar{\Omega}_s(0) \\ \nabla c \cdot \mathbf{n} = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_l, \\ \rho S_t = \|\nabla S\| k(c - c_o)_+, & t \geq 0, \\ -D\nabla c \cdot \mathbf{n} + c \frac{S_t}{\|\nabla S\|} = -k(c - c_o)_+, & t \geq 0, \end{array} \right. \quad (3.18)$$

dove  $\hat{c}(\mathbf{x})$  è la concentrazione iniziale di ioni  $H^+$  e  $\hat{S}(\mathbf{x}) = 0$  è l'equazione che descrive l'interfaccia fra solido e liquido all'istante iniziale. Il problema (3.18) è troppo complesso per essere studiato. Ci limitiamo al caso 1D, che comunque ci fornirà interessanti informazioni circa il modello.

### 3.2 Il modello unidimensionale

Consideriamo una sbarretta unidimensionale come quella mostrata in figura 3.4. In questo caso la superficie di separazione è data da

$$S(x, t) = x - s(t) = 0, \quad (3.19)$$

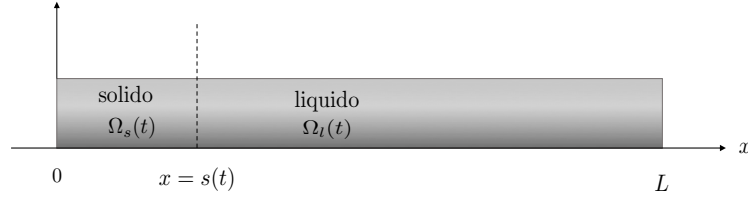
mentre la velocità normale della frontiera è

$$w_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = -\frac{S_t}{\|\nabla S\|} = \dot{s}(t).$$

Il problema (3.18) si trasforma in

$$\left\{ \begin{array}{ll} c_t - Dc_{xx} = 0, & x \in [s, L], \quad t \geq 0, \\ c(x, 0) = \hat{c}(x), & x \in [s_o, L], \\ s(0) = s_o, & s_o \in (0, L) \\ c_x(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ -\rho \dot{s} = k(c - c_o)_+, & t \geq 0, \\ -Dc_x - c\dot{s} = -k(c - c_o)_+, & t \geq 0, \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Eliminando  $k(c - c_o)_+$  nelle ultime due condizioni di (3.20), possiamo riscrivere l'ultima condizione di (3.20) come



**Figura 3.4.** Il problema 1D.

$$\dot{s} [\rho + c] = -Dc_x \quad (3.21)$$

Il problema (3.20) è un problema a frontiera libera unidimensionale per le incognite  $c(x, t)$  e  $s(t)$ . Le condizioni di frontiera sono date dalle (3.20)<sub>5,6</sub>. La natura del problema è parabolica ed è possibile provare la buona posizione del problema, ossia esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati della soluzione. Noi non studieremo analiticamente il problema ma ci limiteremo ad una analisi asintotica in cui si possono determinare soluzioni esplicite.

### 3.3 Il problema adimensionale

Riscaldiamo adesso il problema utilizzando variabili adimensionali. Consideriamo il valore massimo della concentrazione iniziale  $c_A$  definito come

$$c_A = \max_{[s_o, L]} \hat{c}(x),$$

in modo che la concentrazione iniziale adimensionale sia data da

$$\tilde{c} = \frac{\hat{c}}{c_A} \in (0, 1).$$

Riscaldiamo poi le variabili adimensionali nel seguente modo

$$\tilde{c} = \frac{c}{c_A} \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_{ref}} \quad \tilde{x} = \frac{x}{L} \quad \tilde{s} = \frac{s}{L}, \quad (3.22)$$

dove  $t_{ref}$  è un tempo caratteristico da stabilire. Il problema (3.20) diventa

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{c}_{\tilde{t}} - \left( \frac{t_{ref}}{t_D} \right) \tilde{c}_{\tilde{x}\tilde{x}} = 0, \quad \tilde{x} \in [\tilde{s}, 1], \quad \tilde{t} \geq 0, \\ \tilde{c}(\tilde{x}, 0) = \tilde{c}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in [\tilde{s}_o, 1], \\ \tilde{s}(0) = \tilde{s}_o, \quad \tilde{s}_o \in (0, 1) \\ \tilde{c}_{\tilde{x}}(1, \tilde{t}) = 0, \quad \tilde{t} \geq 0, \\ -\frac{\lambda}{t_{ref}} \dot{\tilde{s}} = \frac{\theta}{t_D} (\tilde{c} - \delta)_+, \quad \tilde{t} \geq 0, \\ \frac{\dot{\tilde{s}}}{t_{ref}} [\lambda + \tilde{c}] = -\frac{\tilde{c}_{\tilde{x}}}{t_D}, \quad t \geq 0, \end{array} \right. \quad (3.23)$$

dove abbiamo posto

$$\delta = \frac{c_o}{c_A} \quad \lambda = \frac{\rho}{c_A} \quad \theta = \frac{t_D}{t_R},$$

e dove

$$t_D = \frac{L^2}{D} \quad t_R = \frac{L}{k}, \quad (3.24)$$

rappresentano i tempi caratteristici della diffusione e della reazione rispettivamente. Il coefficiente  $\delta$  rappresenta il rapporto fra la concentrazione molare di neutralizzazione e quella di riferimento, mentre  $\lambda$  quello fra la densità molare del solido reagente e la concentrazione molare di riferimento. Il coefficiente

$$\theta = \frac{Lk}{D} = \frac{t_D}{t_R},$$

rappresenta il rapporto fra la scala temporale diffusiva e quella di reazione. Quando  $\theta$  è piccolo si ha che la diffusione avviene molto più rapidamente della reazione, mentre quando  $\theta$  è grande si ha il contrario. Se si suppone che la soluzione inizialmente sia sufficientemente acida si ha  $\delta \ll 1$ . Infatti assumendo

$$c_o = 10^{-7} \frac{\text{mol}}{\text{lt}} \quad c_A = 10^{-2} \frac{\text{mol}}{\text{lt}},$$

ossia assumendo che la concentrazione iniziale abbia pH minimo uguale a 2, si ha

$$\delta = 10^{-5} \ll 1.$$

per cui possiamo trascurare  $\delta$  nel modello. A seconda della scala temporale selezionata come scala di riferimento (diffusione o reazione) si ottengono due diversi problemi. Nella scala diffusiva  $t_{ref} = t_D$  il problema diventa

$$(PD) \quad \begin{cases} \tilde{c}_{\tilde{t}} - \tilde{c}_{\tilde{x}\tilde{x}} = 0, & \tilde{x} \in [\tilde{s}, 1], \quad \tilde{t} \geq 0, \\ \tilde{c}(\tilde{x}, 0) = \tilde{c}(\tilde{x}), & \tilde{x} \in [\tilde{s}_o, 1], \\ \tilde{s}(0) = \tilde{s}_o, & \tilde{s}_o \in (0, 1) \\ \tilde{c}_{\tilde{x}}(1, \tilde{t}) = 0, & \tilde{t} \geq 0, \\ -\lambda \dot{\tilde{s}} = \theta \tilde{c}, & \tilde{t} \geq 0, \\ \dot{\tilde{s}} [\lambda + \tilde{c}] = -\tilde{c}_{\tilde{x}}, & \tilde{t} \geq 0, \end{cases} \quad (3.25)$$

mentre nella scala della reazione  $t_{ref} = t_R$

$$(PR) \quad \begin{cases} \theta \tilde{c}_{\tilde{t}} - \tilde{c}_{\tilde{x}\tilde{x}} = 0, & \tilde{x} \in [\tilde{s}, 1], \quad \tilde{t} \geq 0, \\ \tilde{c}(\tilde{x}, 0) = \tilde{c}(\tilde{x}), & \tilde{x} \in [\tilde{s}_o, 1], \\ \tilde{s}(0) = \tilde{s}_o, & \tilde{s}_o \in (0, 1) \\ \tilde{c}_{\tilde{x}}(1, \tilde{t}) = 0, & \tilde{t} \geq 0, \\ -\lambda \dot{\tilde{s}} = \tilde{c}, & \tilde{t} \geq 0, \\ \theta \dot{\tilde{s}} [\lambda + \tilde{c}] = -\tilde{c}_{\tilde{x}}, & \tilde{t} \geq 0, \end{cases} \quad (3.26)$$

Notiamo che, quando  $\theta = 1$  i due problemi diventano esattamente lo stesso. Infatti, in questo caso, la scala temporale di diffusione e quella di reazione coincidono.

### 3.4 Ricerca di una soluzione classica per mezzo di tecniche di punto fisso

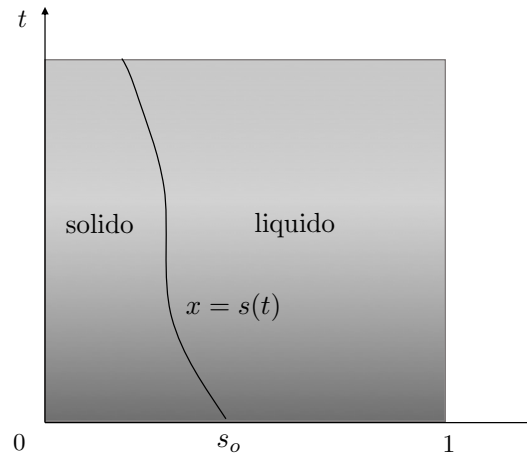


Figura 3.5. Dominio del problema 1D.

In questa sezione illustreremo una tecnica di punto fisso utilizzata per la determinazione della soluzione dei problemi (PD) e (PR). Per semplicità ci limiteremo al problema (PD), dal momento che per il problema (PR) la metodologia è del tutto analoga. Introduciamo la nuova variabile

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \lambda(\tilde{x} - \tilde{s}) + \int_{\tilde{s}}^{\tilde{x}} \tilde{c}(q, \tilde{t}) dq,$$

dove  $(\tilde{c}, \tilde{s})$  rappresenta la soluzione di (PD). Si osserva che

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = -\lambda \dot{\tilde{s}} - \tilde{c}(\tilde{s}, \tilde{t}) \dot{\tilde{s}} + \int_{\tilde{s}}^{\tilde{x}} \tilde{c}_{\tilde{t}}(q, \tilde{t}) dq,$$

per cui, ricordando che  $\tilde{c}_{\tilde{t}} = \tilde{c}_{\tilde{x}\tilde{x}}$ , si ha

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = -\lambda \dot{\tilde{s}} - \tilde{c}(\tilde{s}, \tilde{t}) \dot{\tilde{s}} + \tilde{c}_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t}) - \tilde{c}_{\tilde{x}}(\tilde{s}, \tilde{t}).$$

Dalla (3.25)<sub>6</sub> si ha che

$$\tilde{c}_{\tilde{x}}(\tilde{s}, \tilde{t}) + \dot{\tilde{s}} [\lambda + \tilde{c}(\tilde{s}, \tilde{t})] = 0,$$

per cui

$$\tilde{u}_{\tilde{t}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{c}_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t}).$$

Inoltre

$$\tilde{u}_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \lambda + \tilde{c}(\tilde{x}, \tilde{t}) \qquad \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{c}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t}). \tag{3.27}$$

cosicché  $\tilde{u}$  soddisfa



$$\tilde{u}_{\tilde{t}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t}).$$

Per quanto riguarda le condizioni iniziali e al contorno troviamo

$$\tilde{u}(\tilde{x}, 0) = \tilde{\hat{u}}(\tilde{x}) = \lambda(x - \tilde{s}_o) + \int_{\tilde{s}_o}^{\tilde{x}} \hat{c}(q) dq,$$

$$\tilde{u}(\tilde{s}, \tilde{t}) = 0.$$

Poiché  $\tilde{u}_{\tilde{t}}(1, \tilde{t}) = \tilde{c}_{\tilde{x}}(1, \tilde{t}) = 0$  si ha che

$$\tilde{u}(1, \tilde{t}) = \text{cost.}$$

Se supponiamo che  $\tilde{u}$  sia continua nel punto  $(1, 0)$  si trova

$$\tilde{u}(1, \tilde{t}) = \tilde{\hat{u}}(1).$$

Infine dalla (3.27) si trova

$$\tilde{u}_{\tilde{x}}(\tilde{s}, \tilde{t}) = \lambda + \tilde{c}(\tilde{s}, \tilde{t}) = \lambda - \frac{\lambda}{\theta} \dot{\tilde{s}}$$

In conclusione il problema (PD) è stato trasformato in

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{u}_{\tilde{t}} - \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} = 0, & \tilde{x} \in [\tilde{s}, 1], \quad \tilde{t} \geq 0, \\ \tilde{u}(\tilde{x}, 0) = \tilde{\hat{u}}(\tilde{x}), & \tilde{x} \in [\tilde{s}_o, 1], \\ \tilde{u}(1, \tilde{t}) = \tilde{\hat{u}}(1), & \tilde{t} \geq 0, \\ \tilde{u}(\tilde{s}, \tilde{t}) = 0, & \tilde{t} \geq 0, \\ \tilde{u}_{\tilde{x}}(\tilde{s}, \tilde{t}) = \lambda \left( 1 - \frac{\dot{\tilde{s}}}{\theta} \right), & \tilde{t} \geq 0, \\ \tilde{s}(0) = \tilde{s}_o, & \tilde{s}_o \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Per determinare l'esistenza di una soluzione (in senso classico, ossia continua fino alle derivate seconde) si può procedere nella seguente maniera. Si sceglie una funzione  $\tilde{s}^*(\tilde{t})$  in un opportuno insieme di funzioni  $\Sigma$  tale che  $\tilde{s}^*(0) = \tilde{s}_o$ . Si risolve il problema (3.28)<sub>1-4</sub> ottenendo una funzione  $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})$  (per la buona posizione di questo tipo di problemi rimandiamo a [2]). Dopo di che si risolve l'equazione differenziale ottenuta mediante le ultime due della (3.28)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \dot{\tilde{s}} = -\theta [\tilde{u}_{\tilde{x}}(\tilde{s}^*, \tilde{t}) - \lambda] \\ \tilde{s}(0) = \tilde{s}_o \end{array} \right.$$

e si ottiene in questo modo una nuova funzione  $\tilde{s}(\tilde{t})$ . Se anche  $\tilde{s}(\tilde{t}) \in \Sigma$  allora abbiamo costruito un operatore

$$\Psi : \Sigma \rightarrow \Sigma$$

tale che  $\Psi(\tilde{s}^*) = \tilde{s}$ . Se l'operatore  $\Psi$  ammette un punto fisso  $\Psi(\tilde{s}) = \tilde{s}$  con  $\tilde{s} \in \Sigma$ , allora quella è la soluzione del problema. La difficoltà in questa procedura risiede nella scelta dell'insieme  $\Sigma$  e nella dimostrazione delle proprietà dell'operatore  $\Psi$ , come ad esempio la continuità rispetto ad una qualche norma di  $\Sigma$ .

### 3.5 La soluzione stazionaria

In quel che segue, per semplicità omettiamo i tilde. Per entrambi i problemi (PD) e (PR) la soluzione stazionaria  $(c_\infty, s_\infty)$  è data omettendo le derivate temporali, ossia risolvendo il problema

$$(PS) \quad \begin{cases} c_{xx} = 0, & x \in [s_\infty, 1], \\ c_x(1) = 0, \\ c(s_\infty) = 0, \\ c_x(s_\infty) = 0, \end{cases} \quad (3.29)$$

che fornisce la soluzione

$$c_\infty = 0, \quad (3.30)$$

ma non ci dice niente su  $s_\infty$ . Per determinare la posizione di  $s_\infty$  dobbiamo dare una formulazione integrale delle condizioni di frontiera libera. Ovviamente, nel caso  $s_\infty < 0$ , possiamo concludere che la sbarretta di materiale reagente viene consumata in un tempo finito, dal momento che esisterà un tempo finito  $\bar{t}$  tale che  $s(\bar{t}) = 0$ . Il tempo  $\bar{t}$  sarà esattamente il tempo necessario affinché tutto il materiale reagente sia consumato.

### 3.6 Formulazione integrale nella scala diffusiva

In questa sezione facciamo vedere come le condizioni di frontiera libera possono essere riformulate per ottenere una relazione integrale per la frontiera mobile  $s(t)$ . Questa formulazione sarà utile per la determinazione della soluzione asintotica  $s_\infty$ . Consideriamo il problema diffusivo (PD). Con riferimento alla figura 3.5 consideriamo l'equazione  $(3.25)_1$  (siamo dunque nella scala temporale della diffusione) ed integriamola in

$$\Omega_t = \{(x, \tau) : x \in (s, 1) \quad \tau \in (0, t)\}. \quad (3.31)$$

Si ha

$$\int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial c}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial c}{\partial x} \right) \right] dx d\tau = 0.$$

Utilizzando le formule di Gauss-Green (si veda [7]) l'integrale doppio si trasforma nel seguente integrale curvilineo

$$\oint_{\Omega_t} c dx + c_x d\tau = 0,$$

ossia

$$\int_{s_0}^1 \hat{c}(x) dx + \int_0^t \underbrace{c_x(1, \tau)}_{=0} d\tau - \int_{s(t)}^1 c(x, t) dx - \int_0^t c(s, \tau) \dot{s} d\tau - \int_0^t c_x(s, \tau) d\tau = 0.$$

Ricordando la  $(3.25)_6$  la relazione sopra può essere riscritta come

$$\int_{s_o}^1 \hat{c}(x) dx - \int_{s(t)}^1 c(x, t) dx - \int_0^t c(s, \tau) \dot{s} d\tau + \int_0^t \dot{s} (\lambda + c(s, \tau)) d\tau = 0,$$

che ci fornisce

$$\lambda[s_o - s(t)] = \int_{s_o}^1 \hat{c}(x) dx - \int_{s(t)}^1 c(x, t) dx. \quad (3.32)$$

Se adesso prendiamo il limite per  $t \rightarrow \infty$  nella (3.32) troviamo

$$\lambda[s_o - s_\infty] = \int_{s_o}^1 \hat{c}(x) dx,$$

dal momento che dalla (3.30)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(x, t) = c_\infty = 0.$$

In conclusione si trova

$$\lambda s_\infty = \int_0^{s_o} \lambda dx - \int_{s_o}^1 \hat{c}(x) dx. \quad (3.33)$$

Di conseguenza avremo che se

$$(A) \quad \int_0^{s_o} \lambda dx > \int_{s_o}^1 \hat{c}(x) dx \quad \implies \quad s_\infty > 0,$$

mentre se

$$(B) \quad \int_0^{s_o} \lambda dx \leq \int_{s_o}^1 \hat{c}(x) dx \quad \implies \quad s_\infty \leq 0.$$

Notiamo che i termini

$$\int_0^{s_o} \lambda dx \quad \int_{s_o}^1 \hat{c}(x) dx, \quad (3.34)$$

rappresentano la massa molare iniziale del solido reagente e degli ioni  $H^+$  rispettivamente (ovviamente nella formulazione adimensionale). Quindi nel caso (A) c'è più solido di quanto ne serva per neutralizzare tutta la soluzione (e quindi  $s_\infty > 0$ ), mentre nel caso (B) non ce ne è a sufficienza (e quindi  $s_\infty < 0$ ). Nel caso (B) quindi esisterà un tempo finito nel quale tutto il solido verrà esaurito. Nel caso (A) invece ci sarà uno spessore asintotico positivo  $s_\infty$  definito dalla (3.33) a cui tende la parte solida in un tempo sufficientemente lungo.

### 3.7 Il problema nella scala diffusiva

Consideriamo di nuovo la scala temporale diffusiva, ossia il problema (PD) e supponiamo che questa sia molto più piccola di quella di reazione, ossia

$$t_D \ll t_R \quad \iff \quad \theta \ll 1.$$

Questo significa che, essendo la diffusione più rapida della reazione, i fenomeni di consumo dovuti alla reazione non sono osservabili. Il problema (PD) diventa

$$\left\{ \begin{array}{l} c_t - c_{xx} = 0, \\ c(x, 0) = \hat{c}(x), \\ c_x(1, t) = 0, \\ s(0) = s_o, \\ \dot{s}(t) = 0, \\ c_x(s, t) = 0, \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Le condizioni (3.35)<sub>4,5</sub> ci dicono che  $s$  non evolve nel tempo in questa scala temporale, ossia che la lastra di solido non si consuma, in quanto in questa scala temporale la reazione non si è ancora messa in moto. Il problema da risolvere sarà allora

$$\left\{ \begin{array}{l} c_t - c_{xx} = 0, \\ c(x, 0) = \hat{c}(x), \\ c_x(1, t) = 0, \\ c_x(s_o, t) = 0, \end{array} \right. \quad (3.36)$$

ossia un problema parabolico con condizioni di Neumann omogenee al bordo. Le soluzioni si possono determinare nuovamente con il metodo di separazione delle variabili. Se invece consideriamo

$$t_D \gg t_R \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \gg 1.$$

il problema che otteniamo è il seguente

$$\left\{ \begin{array}{l} c_t - c_{xx} = 0, \\ c(x, 0) = \hat{c}(x), \\ c_x(1, t) = 0, \\ s(o) = s_o, \\ c(s, t) = 0, \\ c_x(s, t) = -\lambda \dot{s}. \end{array} \right. \quad (3.37)$$

In questo caso  $c = 0$  sulla superficie di reazione  $x = s(t)$ . Questo significa che la concentrazione di ioni  $H^+$  sulla superficie è sempre quella di neutralità e tutti gli ioni che arrivano sulla superficie per diffusione vengono neutralizzati in maniera tale da mantenere la neutralità sulla superficie di reazione. Osserviamo che il problema (3.37) è del tutto analogo al problema di Stefan ad una fase unidimensionale (1.48), si veda anche [9].

### 3.8 Il problema nella scala della reazione

Se invece consideriamo la scala della reazione assumendo sempre che

$$t_D \ll t_R \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \ll 1.$$

si ha

$$\begin{cases} c_{xx} = 0, \\ c_x(1, t) = 0, \\ s(0) = s_o, \\ \lambda \dot{s}(t) = -c, \\ c_x(s, t) = 0, \end{cases} \quad (3.38)$$

In questo caso

$$c = f(t),$$

per cui

$$\lambda \dot{s} = -f(t) \quad (3.39)$$

In questa situazione si ha che il profilo di concentrazione evolve per stati stazionari (soluzione quasi stazionaria). In particolare si ha che dopo un transiente iniziale in cui la diffusione ha un ruolo primario, la concentrazione diventa uniforme per cui, chiamando  $t = 0$  l'istante in cui  $c$  è diventato uniforme nella soluzione si ha

$$f(0) = f_o,$$

che è da considerarsi noto. Dopo di ché, per determinare  $f(t)$  si considera il bilancio di massa in questa evoluzione quasi-stazionaria

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_0^{s(t)} \lambda dx \right] = \frac{d}{dt} \left[ \int_{s(t)}^1 f(t) dx \right]$$

che conduce a

$$\lambda s(t) - f(t) [1 - s(t)] = \lambda s_o - f_o [1 - s_o]$$

Da quest'ultima si ricava

$$f(t) = \frac{1}{1-s} [\lambda s + f_o(1-s_o) - \lambda s_o] > 0$$

Definiamo

$$\gamma = f_o(1-s_o) - \lambda s_o$$

e sostituiamo nella (3.39) ottenendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \lambda \dot{s} = \frac{1}{s-1} [\lambda s + \gamma] \\ s(0) = s_o \end{cases} \quad (3.40)$$

Vogliamo che inizialmente  $s$  diminuisca e di conseguenza richiediamo che

$$\lambda \dot{s}(0) = \frac{1}{s_o - 1} [\lambda s_o + \gamma] < 0.$$

Dal momento che  $s_o \in (0, 1)$ , la disuguaglianza sopra implica che

$$f_o(1 - s_o) > 0,$$

che è soddisfatta sempre poiché  $s_o \in (0, 1)$  e  $f_o > 0$ . Integrando la (3.40)<sub>1</sub> tra 0 e  $t$  si trova

$$\int_0^t \frac{ds}{d\tau} \frac{s-1}{[\lambda s + \gamma]} d\tau = \frac{t}{\lambda}$$

che conduce a

$$\int_{s_o}^s \frac{\xi - 1}{\lambda \xi + \gamma} d\xi = \frac{t}{\lambda} \quad (3.41)$$

L'integrazione della (3.41) fornisce

$$t = (s - s_o) - \left(1 + \frac{\gamma}{\lambda}\right) \ln \left(\frac{\lambda s + \gamma}{\lambda s_o + \gamma}\right), \quad (3.42)$$

che ha senso fino a che  $\lambda s + \gamma > 0$ . Osserviamo che la presenza o meno di un asintoto verticale di  $t(s)$  in  $[0, s_o]$  dipende dalla quantità  $\gamma$ . In particolare se

$$\gamma > 0 \quad f_o(1 - s_o) > \lambda s_o$$

allora non ci può essere asintoto orizzontale poiché la massa molare al tempo  $t = 0$ , ossia  $f_o(1 - s_o)$ , è maggiore della massa totale a  $t = 0$  di reagente, ossia  $\lambda s_o$ . In questo caso non ho reagente a sufficienza per neutralizzare tutte le moli di  $H^+$  e di conseguenza  $s(t)$  deve per forza annullarsi in un tempo finito  $t_f$  facilmente calcolabile ponendo  $s = 0$  nella (3.42)

$$t_f = -s_o - \left(1 + \frac{\gamma}{\lambda}\right) \ln \left(\frac{\gamma}{\lambda s_o + \gamma}\right) > 0. \quad (3.43)$$

Se invece

$$\gamma < 0 \quad f_o(1 - s_o) < \lambda s_o,$$

allora le moli da neutralizzare sono minori delle moli di reagente a disposizione per neutralizzarle. In questo caso allora avrò un asintoto verticale  $x = s_\infty \in (0, s_o)$  tale che

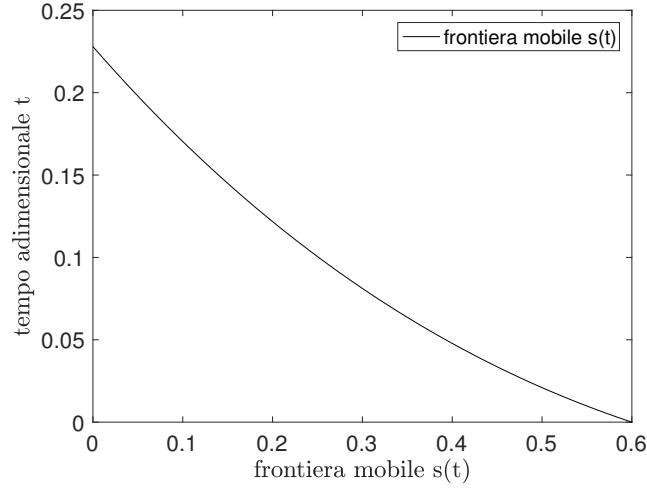
$$\lim_{s \rightarrow s_\infty^+} t(s) = \infty.$$

Un esempio di andamento della frontiera  $s(t)$  che si annulla in un tempo finito è mostrato in Fig. 3.6. Supponiamo adesso di considerare

$$t_R \ll t_D \quad \iff \quad \theta \gg 1,$$

ossia supponiamo di considerare che la reazione sia molto più rapida della diffusione. In questo caso il problema (3.26) diventa

$$\begin{cases} c_t = 0 \\ c(x, 0) = \hat{c}(x) \\ \dot{s} = 0. \end{cases} \quad (3.44)$$



**Figura 3.6.** Evoluzione di  $s(t)$  nella scala temporale della reazione con  $t_D \ll t_R$ .

In questa situazione  $c = \hat{c}(x)$  per tutti i tempi, ossia il profilo di  $c$  non cambia, dal momento che la diffusione non è visibile in questa scala temporale. Questo significa che nel “bulk” della soluzione il profilo di  $c$  non varia. Il problema (3.44) è ottenuto considerando la scala spaziale  $L$ . Supponiamo adesso di considerare che in prossimità della superficie  $s$  ci sia uno strato limite di spessore (dimensionale)  $h$  in cui la diffusione invece ha un suo peso. Scegliamo le dimensioni di tale strato limite in modo che le scale diffusiva e di reazione siano dello stesso ordine. Scriviamo perciò

$$t_D^h = \frac{h^2}{D} \quad (\text{scala temporale diffusiva})$$

$$t_R^h = \frac{h}{k} \quad (\text{scala temporale della reazione})$$

imponendo

$$\frac{t_D^h}{t_R^h} = \frac{h^2 k}{D h} = \frac{h k}{D} = O(1).$$

Per semplicità poniamo

$$\frac{t_D^h}{t_R^h} = 1 \quad \iff \quad h = \frac{D}{k}.$$

Lo spessore dello strato in forma adimensionale diventa

$$\zeta = \frac{h}{L} = \frac{D}{kL} = \frac{1}{\theta}.$$

Introduciamo allora la variabile adimensionale

$$\zeta \xi = x,$$

in modo che quando  $x = O(\zeta)$  si abbia  $\xi = O(1)$ . L'equazione (3.26)<sub>1</sub> diventa allora

$$\zeta^2 \theta c_t - c_{\xi \xi} = 0.$$

Adesso osserviamo che

$$\zeta^2\theta = \frac{1}{\theta} \ll 1, \quad \zeta\theta = 1.$$

Di conseguenza il problema (3.26) si riscrive come (omettiamo nuovamente i tilde e trascuriamo nuovamente  $\delta$ )

$$\begin{cases} c_{\xi\xi} = 0 \\ -\lambda\dot{s} = c(s, t) \\ \dot{s}(\lambda + c(s, t)) = -c_{\xi}(s, t) \\ s(0) = s_o. \end{cases} \quad (3.45)$$

Integrando in  $\xi$  una volta si trova

$$c_{\xi}(\xi, t) = \lambda\dot{s}(\dot{s} - 1).$$

Integrando ancora una volta si ha

$$c(\xi, t) = \lambda\dot{s}(\dot{s} - 1)\xi + \psi(t),$$

dove

$$\psi(t) = \lambda\dot{s} \left[ s(1 - \dot{s}) - 1 \right].$$

In conclusione si trova

$$c(\xi, t) = \lambda\dot{s} \left[ (\dot{s} - 1)(\xi - s) - 1 \right].$$

Adesso impongo la continuità della soluzione in  $s + 1$ , ossia del punto in cui finisce lo strato limite e comincia il bulk. Impongo allora

$$\hat{c}(s) \approx \hat{c}(s + \zeta) = c(s + 1, t).$$

In conclusione trovo

$$\begin{cases} \lambda\dot{s} \left[ (\dot{s} - 2) \right] = \hat{c}(s) \\ s(0) = s_o \end{cases} \quad (3.46)$$

che è una equazione differenziale non lineare in forma implicita per la  $s$ . La sua soluzione numerica ci fornisce l'evoluzione della frontiera mobile  $s(t)$ . Dalla (3.47)<sub>1</sub> si nota facilmente che

$$\lambda\dot{s}^2 - 2\lambda\dot{s} - \hat{c}(s) = 0$$

per cui

$$\dot{s} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{\hat{c}(s)}{\lambda}}.$$

Siccome ha senso solo la soluzione per cui  $\dot{s} < 0$  prendiamo solamente l'equazione con il segno meno davanti alla radice quadrata, ossia

$$\frac{\dot{s}}{1 - \sqrt{1 + \frac{\hat{c}(s)}{\lambda}}} = 1.$$

In conclusione dobbiamo risolvere il problema



$$\begin{cases} \frac{\dot{s}}{1 - \sqrt{1 + \frac{\hat{c}(s)}{\lambda}}} = 1 \\ s(0) = s_o \end{cases} \quad (3.47)$$

La cui soluzione ci fornisce l'evoluzione della frontiera libera  $s(t)$ .



## Deposizione nei greggi cerosi

Il petrolio può essere considerato come una miscela di idrocarburi di diverso peso molecolare. I petroli con alto contenuto di idrocarburi ad alto peso molecolare (come le paraffine) vengono chiamati *greggi cerosi* o *waxy crude oils* (WCO's). In particolari condizioni di temperatura e di pressione le componenti paraffiniche, dette anche *cere*, possono precipitare producendo una fase segregata che, in seguito ad un ulteriore abbassamento della temperatura, può intrappolare il petrolio in una specie di gel molto viscoso. La temperatura alla quale si osserva la formazione dei primi cristalli di paraffina viene definita *cloud point* (o WAT, wax appearing temperature), questo proprio perché la fase segregata rende il petrolio opaco come una nuvola. La temperatura alla quale si comincia ad osservare il passaggio verso una struttura gelatinosa che inibisce lo scorrimento in una condotta si chiama *pour point*, o punto di scorrimento. Al di sotto di questa temperatura il greggio è assai difficile da trasportare proprio a causa della sua struttura simil-solida. La WAT in generale si trova in un range di temperatura non estremo, per cui la segregazione delle cere può avvenire anche a temperatura ambiente.

Quando la fase segregata è presente il greggio può essere considerato come una soluzione satura di cera. Se un gradiente di temperatura viene applicato alla soluzione, questo a sua volta genera un gradiente di concentrazione, dal momento che la concentrazione di cera in regime di saturazione è un funzione crescente della temperatura. In questa situazione si osserva la migrazione della cera disciolta da zone ad alta concentrazione verso zone a bassa concentrazione, ossia da zone ad alta temperatura verso zone a bassa temperatura. Questo fenomeno, chiamato *molecular diffusion*, è responsabile, ad esempio, della formazione di depositi solidi sulle pareti delle condotte esposte a condizioni termiche sufficientemente basse. Anche la reologia del fluido può risentire della presenza della paraffina segregata. Infatti mentre a temperature elevate il petrolio può essere considerato come un fluido newtoniano, in presenza di una fase segregata il suo comportamento può essere assimilato a quello di un fluido di Bingham (vedi capitolo successivo), ossia un fluido visco-plastico in cui sono presenti regioni indeformabili.

In questo capitolo vogliamo studiare il fenomeno della deposizione della cera su una parete fredda, un problema dai risvolti pratici molto importanti. Nelle condotte infatti risulta necessario ripulire periodicamente le pareti dai depositi formati, un'operazione costosa e difficile che rende la predizione del tasso di crescita dei depositi di importanza fondamentale. La modellizzazione della deposizione nei greggi cerosi incontra notevoli difficoltà dovute principalmente alla difficoltà di ottenere misure dirette della diffusività della cera nell'olio. Infatti la diffusività è ottenuta indirettamente mediante misure di deposizione per effetto di gradienti termici controllati. L'apparato sperimentale atto a questa operazione è chiamato *cold finger*. Esso è concepito per la verifica dei modelli predittivi di deposizione, ma anche per dedurre importanti parametri fisici presenti nei modelli mediante le

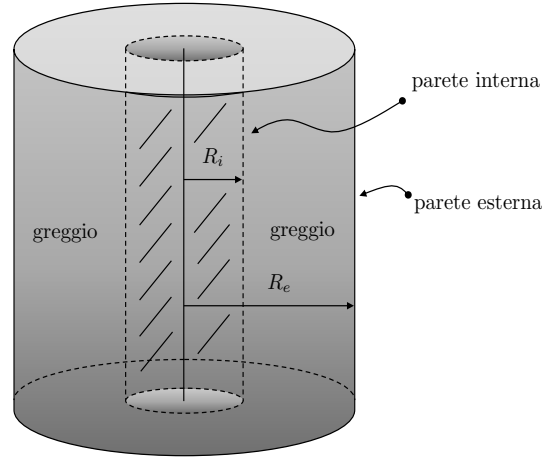


Figura 4.1. Schema del cold finger.

misure di deposizione. Ipotesi fondamentali che assumeremo in ciò che segue sono: (i) che la cera sia formata da un'unica componente, (ii) che la densità della cera è dell'olio siano la stessa.

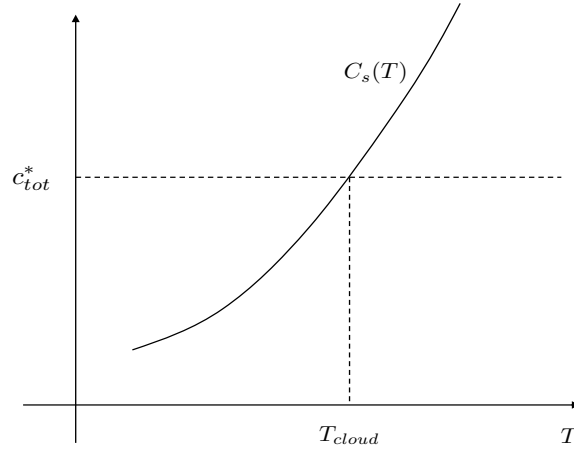
#### 4.1 Il Cold Finger statico

L'apparato del *cold finger* consiste in un cilindro (raggio circa 5 cm) la cui parete esterna può essere termicamente controllata. Il campione di olio, precedentemente riscaldato di circa 30, 40 °K al di sopra della WAT, viene immesso nel cilindro e successivamente raffreddato ad una temperatura  $T_e$  che sarà mantenuta sulla parete esterna per tutta la durata dell'esperimento. Di seguito viene inserito un cilindro co-assiale (il cold finger o dito freddo appunto) mantenuto a temperatura  $T_i < T_e$  immerso nell'olio, vedi Fig. 4.1. All'interno della miscela d'olio viene a formarsi un gradiente termico responsabile della migrazione della cera disciolta. A causa della grande differenza fra la scala temporale della diffusione termica e quella della cera disciolta, il transiente termico (ossia la fase in cui si osserva variazione della temperatura con il tempo) può essere trascurata nel modello e si può assumere che la temperatura raggiunga il suo profilo stazionario prima che qualsiasi fenomeno diffusivo della cera sia osservabile.

#### 4.2 Temperatura e concentrazione

La temperatura è dunque considerata indipendente dal tempo, dal momento che la sua scala temporale di evoluzione è di gran lunga più piccola di quella della diffusione della cera. Inoltre si assume che il profilo termico non cambi a causa della variazione di entalpia dovuta alla segregazione/dissoluzione della cera. Infatti è sperimentalmente provato che quest'ultima è trascurabile rispetto al flusso di calore determinato dai due termostati posti alla parete fredda e alla parete calda. Indichiamo con  $R_i$  ed  $R_e$  i raggi del cold finger e della parete esterna rispettivamente, si veda la Fig. 4.1. In geometria cilindrica il profilo di temperatura  $T(r)$  è dato dalla soluzione dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (4.1)$$



**Figura 4.2.** Concentrazione di saturazione

con le condizioni  $T(R_i) = T_i < T(R_e) = T_e$ . Si trova perciò

$$T(r) = T_i + \frac{(T_e - T_i)}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_i}\right), \quad (4.2)$$

dove la (4.2) soddisfa la (4.1) e le condizioni al contorno. Supponiamo che tutte le variabili del problema non dipendano dalle coordinate longitudinale ed angolare ed introduciamo le seguenti concentrazioni

- $c_{tot}(r, t)$  concentrazione totale di cera;
- $c_{tot}(r, 0) = c_{tot}^*$  concentrazione totale iniziale di cera;
- $c(r, t)$  concentrazione di cera disciolta;
- $G(r, t)$  concentrazione di cera segregata;
- $C_s(T(r))$  concentrazione di saturazione, detta anche *solubilità*.

La funzione  $C_s(T)$  rappresenta la massima quantità di cera disciolta per unità di volume alla temperatura  $T$ . Sperimentalmente si osserva che  $C_s$  è una funzione crescente di  $T$ , ossia più alta è la temperatura, più cera disciolta si può avere nell'unità di volume. Quando la concentrazione totale di cera  $c_{tot}$  eccede  $C_s(T)$  parte della cera disciolta precipita sotto forma di cristalli in sospensione nella soluzione. Sia  $c_{tot}^*$  la concentrazione iniziale totale di cera nel campione di olio in esame. Il Cloud point è definito come quella temperatura  $T_{cloud}$  tale che

$$c_{tot}^* = C_s(T_{cloud}).$$

Infatti se  $T > T_{cloud}$  allora  $c_{tot}^* < C_s(T)$  e quindi non si ha fase segregata, mentre se  $T < T_{cloud}$  allora  $c_{tot}^* > C_s(T)$  e si ha fase segregata, come mostrato in Fig. 4.2. Possiamo scrivere le seguenti relazioni

$$G(r, t) = [c_{tot}(r, t) - C_s(T(r))]_+, \quad (4.3)$$

dove  $[..]_+$  denota la parte positiva che è uguale a 0 ogniqualvolta la quantità in parentesi è negativa o nulla

$$c_{tot}(r, t) = G(r, t) + c(r, t), \quad (4.4)$$

$$c(r, t) = \min\{c_{tot}(r, t), C_s(T(r))\}. \quad (4.5)$$

La definizione di  $G$  mediante la parte positiva è necessaria dal momento che, quando  $c_{tot} < C_s(T)$ , il sistema non è saturo e dunque non possiamo avere cera segregata. La dipendenza della solubilità  $C_s$  dalla temperatura può essere determinata sperimentalmente dalla termodinamica delle miscele. Infatti, assumendo un comportamento ideale della miscela bi-componente (vedi [11]), tramite la legge di Arrhenius, troviamo

$$C_s(T) = C_s(T_{cloud}) \exp\left\{-\frac{\lambda}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{cloud}}\right)\right\}, \quad (4.6)$$

dove  $\lambda$  è il calore latente della cera e  $R$  è la costante specifica dei gas perfetti. Notiamo che

$$C'_s(T) = C_s(T_{cloud}) \exp\left\{-\frac{\lambda}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{cloud}}\right)\right\} \frac{\lambda}{RT^2},$$

$$C''_s(T) = C_s(T_{cloud}) \exp\left\{-\frac{\lambda}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{cloud}}\right)\right\} \left[\frac{\lambda^2}{R^2 T^4} - \frac{2\lambda}{RT^3}\right],$$

Applicando l'espansione di Taylor intorno al cloud point si trova

$$C_s(T) = C_s(T_{cloud}) \left\{1 + \frac{\lambda}{RT_{cloud}^2} (T - T_{cloud}) + \frac{\lambda}{RT_{cloud}^3} \left[\frac{\lambda}{2RT_{cloud}} - 1\right] (T - T_{cloud})^2 + \dots\right\}.$$

Il rapporto fra il termine quadratico e quello lineare fornisce

$$\Psi = \left(\frac{T}{T_{cloud}} - 1\right) \left[\frac{\lambda}{2RT_{cloud}} - 1\right]. \quad (4.7)$$

I valori tipici dei parametri in (4.7) sono

$$\lambda = 22.6 \times 10^3 \frac{J}{Kg} \quad R = 287.05 \frac{J}{Kg \cdot ^\circ K} \quad T_{cloud} = 300^\circ K.$$

Considerando una differenza di temperatura massima  $|T - T_{cloud}| = 15^\circ K$  otteniamo

$$|\Psi| = O(10^{-2}). \quad (4.8)$$

Di conseguenza il termine quadratico nell'espansione risulta cento volte più piccolo di quello lineare per cui possiamo assumere che la concentrazione di saturazione sia lineare nel range di temperature considerate scrivendo

$$C_s(T) = C_s(T_i) + b_w(T - T_i). \quad (4.9)$$

dove

$$b_w = \frac{dC_s(T)}{dT}. \quad (4.10)$$

Utilizziamo questo risultato teorico che però non ci fornisce il valore della costante  $b_w$ . Questa verrà determinata attraverso le misure di deposizione. Se la temperatura del cold finger  $T_i$  è superiore al  $T_{cloud}$  allora la fase segregata non può essere presente e la concentrazione di paraffina disciolta rimane dappertutto uguale a  $c_{tot}^*$ . Se, al contrario, la temperatura della parete esterna  $T_e$  è inferiore

a  $T_{cloud}$ , allora tutta la soluzione sarà inizialmente saturata e il profilo di concentrazione della cera disciolta sarà determinato dalla concentrazione di saturazione  $C_s(T)$ . Nel caso  $T_i < T_{cloud} < T_e$  si ha la presenza di una superficie di separazione fra una zona satura (adiacente al cold finger) e di una insatura (adiacente alla parete calda). Escludendo la situazione  $T_i > T_{cloud}$  si ha che la presenza del gradiente termico induce un gradiente di concentrazione della cera disciolta (in una parte o in tutta la soluzione) per cui quest'ultima migra verso la parete fredda del cold finger. Una volta che la cera trasportata raggiunge la parete del cold finger questa precipita e forma uno strato solido il cui spessore è assai più piccolo del raggio del cold finger e quindi trascurabile. Questo meccanismo di trasporto e deposizione, che prende il nome di *molecular diffusion*, è il principale responsabile della formazione di depositi nelle condutture adibite al trasporto dei greggi cerosi. In realtà ci sono anche altri meccanismi che concorrono o contrastano la *molecular diffusion*, ma nel modello che ci accingiamo a studiare non li considereremo.

Supponiamo che la concentrazione iniziale  $c_{tot}^* > 0$  sia costante e supponiamo che  $T_i < T_{cloud}$  cosicché  $C_s(T_i) < c_{tot}^*$ . Questo ci garantisce che in prossimità della parete fredda la soluzione è satura con fase segregata presente. In questa regione, a causa del gradiente termico, viene a formarsi un gradiente di cera disciolta, responsabile della migrazione della cera stessa verso la parete fredda dove, una volta a contatto, questa precipita formando uno strato solido di deposito. In generale il sistema evolve attraverso tre stadi

- Stadio 1 - tutto il campione è saturo,
- Stadio 2 - parziale saturazione,
- Stadio 3 - completa desaturazione.

Chiaramente lo stadio 1 esiste solamente se  $c_{tot}^* > C_s(T_e)$  (ossia se  $T_e < T_{cloud}$  e la soluzione è inizialmente satura dappertutto), altrimenti l'evoluzione comincia dallo stadio Stadio 2. Vedremo che durante gli stadi 1 e 2 il tasso di crescita del deposito è costante (la massa di deposito cresce linearmente con il tempo) mentre nello stadio 3 tende asintoticamente a 0.

### 4.3 La velocità di deposizione

Ipotizziamo che il flusso di cera disciolta alla parete sia l'unico responsabile della formazione del deposito. In pratica tutta la cera disciolta che giunge per diffusione a contatto con la parete fredda precipita e va a formare il deposito. Tale flusso è dato (in base alla legge di Fick) da

$$\mathbf{j} = -D_w \nabla c \Big|_{r=R_i},$$

dove  $c$  è dato dalla (4.5) e dove  $D_w$  rappresenta il coefficiente di diffusività della cera disciolta (le sue dimensioni sono di una lunghezza al quadrato diviso un tempo). Dal momento che  $c = c(r, t)$  si ha

$$\mathbf{j} = -D_w \frac{\partial c}{\partial r}(R_i, t) \mathbf{e}_r \quad (4.11)$$

La (4.11) rappresenta la massa di cera per unità di superficie e per unità di tempo che giunge alla parete fredda. Di conseguenza indicando con  $m_w(t)$  la massa di cera per unità di superficie del deposito possiamo scrivere

$$\frac{dm_w}{dt} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_r = D_w \frac{\partial c}{\partial r}(R_i, t), \quad (4.12)$$

che ci fornisce la velocità di crescita del deposito. Integrando la (4.12) nel tempo troviamo la massa di cera depositata in funzione del tempo  $m_w(t)$ .

#### 4.4 Determinazione della solubilità e della diffusività dalle misure di deposizione

Il deposito su cold finger è formato da cera solida e da olio intrappolato. I cristalli di cera formano una struttura abbastanza diradata, cosicché la frazione di olio intrappolata risulta abbastanza grande. Indichiamo con  $\phi \in [0, 1]$  la frazione di massa di cera del deposito (ossia la massa di cera diviso la massa totale del deposito) e definiamo  $M(T_i)$  il valore “asintotico” della massa per unità di superficie depositata sulla parete fredda mantenuta a temperatura  $T_i$ . La frazione  $\phi$  viene determinata sperimentalmente e può essere considerata costante nel range delle temperature considerate. In pratica  $M(T_i)$  rappresenta la massa di deposito (olio più cera) misurata quando non si osserva più nessuna variazione della stessa, ossia quando il deposito ha smesso di crescere. Si ha

$$M(T_i) = M_w(T_i) + M_o(T_i), \quad (4.13)$$

dove

$$M_w(T_i) =: \phi M(T_i),$$

$$M_o(T_i) =: (1 - \phi)M(T_i)$$

rappresentano la massa asintotica di cera e quella di olio nel deposito. La frazione di cera  $\phi$  può essere piuttosto piccola (diventando di conseguenza un'importante sorgente di errore) e sarà considerata costante nel range delle temperature considerate nell'esperimento. Per scrivere una espressione della massa asintotica di cera depositata facciamo la seguente considerazione. Quando non aumenta più il deposito vuol dire che non c'è più migrazione della cera, ossia che il gradiente di concentrazione della cera disciolta è nullo, vedi la (4.12). Questo significa che  $c = C_s(T_i)$  ovunque e che di conseguenza la soluzione è desaturata ovunque. Per determinare la massa di cera per unità di superficie depositata basta allora considerare

$$M_w(T_i) = \underbrace{(c_{tot}^* - C_s(T_i)) \cdot [\pi(R_e^2 - R_i^2)]}_{\text{massa totale depositata}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi R_i}}_{\text{superficie del cold finger}}. \quad (4.14)$$

In definitiva

$$M_w(T_i) = (c_{tot}^* - C_s(T_i)) \cdot \frac{(R_e^2 - R_i^2)}{2R_i}. \quad (4.15)$$

Quando la solubilità è approssimata con (4.9) e  $T_{i1}$ ,  $T_{i2}$  rappresentano due diverse temperature del cold finger, troviamo

$$M_w(T_{i1}) = b_w(T_{cloud} - T_{i1}) \cdot \frac{(R_e^2 - R_i^2)}{2R_i}, \quad (4.16)$$

$$M_w(T_{i2}) = b_w(T_{cloud} - T_{i2}) \cdot \frac{(R_e^2 - R_i^2)}{2R_i}. \quad (4.17)$$

Di conseguenza

$$b_w = \frac{(M_w(T_{i1}) - M_w(T_{i2}))2R_i}{(R_e^2 - R_i^2)(T_{i2} - T_{i1})} = \phi \left[ \frac{M(T_{i1}) - M(T_{i2})}{(T_{i2} - T_{i1})} \right] \cdot \frac{2R_i}{(R_e^2 - R_i^2)}. \quad (4.18)$$

Quindi la derivata della solubilità  $b_w$  può essere determinata una volta che siano note  $\phi$  e due misure asintotiche della massa totale di deposito per due diverse temperature del cold finger. Vale la pena osservare che il valore di  $c_{tot}^*$  non influisce in alcun modo su quello di  $b_w$  come osservabile da (4.18).



Indichiamo con  $m(t)$  la massa totale (olio più cera) per unità di superficie depositata al tempo  $t$ . Ancora una volta indichiamo con  $m_w(t) = \phi m(t)$  e  $m_o = (1 - \phi)m(t)$  le masse di cera e di olio depositate al tempo  $t$ . Dal momento che la diffusione molecolare è l'unico meccanismo che guida la migrazione verso la parete fredda, la velocità di deposizione  $\dot{m}_w$  (velocità alla quale la cera si deposita per unità di superficie) è data da

$$\dot{m}_w = \phi \dot{m} = D_w \left. \frac{\partial c}{\partial r}(r, t) \right|_{r=R_i}, \quad (4.19)$$

dove  $\dot{m} = dm/dt$  e  $D_w$  è la diffusività della cera, si veda la (4.12). Quando la soluzione è satura in prossimità del cold finger  $c$  è data da  $C_s$  e l'equazione (4.19) diventa

$$\dot{m}_w = D_w b_w \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_i} = D_w b_w \frac{(T_e - T_i)}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \frac{1}{R_i}. \quad (4.20)$$

Fino a quando la regione vicina al cold finger rimane satura la crescita della massa di deposito avviene linearmente. Infatti integrando la (4.20) con dato iniziale nullo al tempo  $t = 0$  si trova

$$m_w = D_w b_w \frac{(T_e - T_i)}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \frac{t}{R_i}. \quad (4.21)$$

Dalla (4.21) osserviamo che è importante conoscere il prodotto  $D_w b_w$  per predire la quantità di deposito. Viceversa, se conosciamo la quantità di deposito per unità di superficie  $m^* =: \phi^{-1} m_w^*$  ad un tempo  $t^*$  durante il regime di crescita lineare allora possiamo conoscere il coefficiente di diffusività  $D_w$ . Infatti nella fase lineare

$$\dot{m}_w = \frac{m^* \phi}{t^*},$$

e dunque

$$D_w = \frac{m^* \phi}{t^*} \frac{R_i \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{b_w (T_e - T_i)},$$

dove  $b_w$  è ottenuto per mezzo della procedura precedentemente illustrata. Inoltre, dal momento che  $T_{cloud}$  è definito in modo che

$$C_s(T_{cloud}) = c_{tot}^*, \quad (4.22)$$

allora dalla (4.9)

$$c_{tot}^* = C_s(T_i) + b_w (T_{cloud} - T_i)$$

per cui

$$T_{cloud} = T_i + \frac{1}{b_w} [c_{tot}^* - C_s(T_i)].$$

Utilizzando la (4.15) si ha

$$T_{cloud} = T_i + \frac{M_w(T_i)}{b_w} \cdot \frac{2R_i}{(R_e^2 - R_i^2)} = T_i + \frac{M(T_i)\phi}{b_w} \cdot \frac{2R_i}{(R_e^2 - R_i^2)} \quad (4.23)$$

ossia il  $T_{cloud}$  può essere ricavato da misure asintotiche sperimentali di massa e dalla conoscenza del gradiente di solubilità  $b_w$ .

## 4.5 Il modello matematico

Formuliamo adesso il modello matematico assumendo che il sistema sia inizialmente nello stadio 1, ossia  $T_e < T_{cloud}$  (soluzione satura di cera ovunque). Lo spessore del deposito viene supposto trascurabile cosicché il fronte di deposizione è costante e dato da  $r = R_i$ .

## 4.6 Stadio 1

Supponiamo che al tempo  $t = 0$  la soluzione sia dovunque satura e dunque  $G(r, 0) = G_o(r) > 0$  in  $[R_i, R_e]$ . Dobbiamo scrivere le equazioni per la concentrazioni di cera segregata  $G$  e cera disciolta  $c$ . Dal momento che tutta la soluzione è statica (la velocità della soluzione nel cold finger è zero) l'evoluzione di  $G$  e di  $c$  avviene secondo la legge di Fick (si veda la (3.3)) Per la fase segregata scriviamo dunque l'equazione

$$\frac{\partial G}{\partial t} - D_G \left( \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} \right) = Q, \quad (4.24)$$

dove  $Q$  rappresenta la velocità di variazione di massa per unità di volume da cera disciolta a cera segregata e viceversa e dove  $D_G$  rappresenta il coefficiente di diffusività della cera segregata. In particolare se  $Q > 0$  abbiamo che la cera segregata sta aumentando localmente, mentre se  $Q < 0$  sta diminuendo. Per quanto riguarda  $c$  ricordiamo che il sistema è saturo per cui  $c = C_s(T(r))$ . Scrivendo l'equazione di diffusione per  $c = C_s(T)$  troviamo

$$-D_w \left( \frac{\partial^2 C_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_s}{\partial r} \right) = -Q. \quad (4.25)$$

Nella (4.25) abbiamo posto il termine di sorgente uguale a  $-Q$  poiché assumiamo che il sistema sia in *equilibrio termodinamico*, ossia che la trasformazione cera segregata/cera disciolta e viceversa sia istantanea (cioè tutta la cera disciolta che cambia fase è istantaneamente trasformata in cera segregata e viceversa). Inoltre nelle (4.24) e (4.25) stiamo trascurando il calore latente dovuto alla transizione di fase. Dalle relazioni (4.2), (4.9) e dalla equazione (4.25) si ottiene

$$\frac{Q}{D_w} = \left( \frac{\partial^2 C_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_s}{\partial r} \right) = \underbrace{C_s'' \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2}_{=0} + C_s' \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0, \quad (4.26)$$

dove  $C_s' = dC_s/dT = b_w$ . Dalla (4.26) si vede facilmente che  $Q = 0$ . Per cui nello stadio 1  $G$  soddisfa l'equazione parabolica

$$\frac{\partial G}{\partial t} - D_G \left( \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} \right) = 0 \quad (4.27)$$

con il dato iniziale

$$0 < G(r, 0) = G_o(r) = c_{tot}^* - C_s(T(r)). \quad (4.28)$$

La condizione al contorno su  $r = R_e$

$$D_G \frac{\partial G}{\partial r}(R_e, t) = -D_w b_w \frac{dT}{dr}(R_e) = -\frac{D_w b_w}{R_e} \frac{(T_e - T_i)}{\ln(R_e/R_i)} < 0. \quad (4.29)$$

esprime il bilancio di flusso di cera alla parete esterna. La (4.29) in pratica ci dice che la cera segregata che raggiunge la parete calda è compensata dalla cera disciolta che si allontana da essa (costante). In  $r = R_i$  scriviamo

$$\frac{\partial G}{\partial r}(R_i, t) = 0, \quad (4.30)$$

poiché la massa di soluto che precipita e va a formare il deposito non viene immessa nuovamente nel sistema. Quindi su  $r = R_i$  il flusso di cera segregata è nullo. Lo stadio 1 si esaurisce al tempo  $t_1$  quando  $G(R_e, t_1) = 0$ . Durante questo stadio la velocità di crescita del deposito è data dalla (crescita lineare).

## 4.7 Stadio 2

All'istante  $t_1 > 0$  comincia a formarsi un fronte di desaturazione  $r = s(t)$  che parte dalla parete calda  $s(t_1) = R_e$  e si muove verso la parete fredda. Su questo fronte  $G$  è ovviamente nullo. La funzione  $s(t)$  è una frontiera libera ed è incognita. Quando  $s(t)$  raggiunge  $r = R_i$  lo stadio 2 finisce e la soluzione diventa dappertutto insatura. Durante lo stadio 2 dobbiamo risolvere le equazioni per la fase satura e per la fase insatura

$$\frac{\partial G}{\partial t} - D_G \left( \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} \right) = 0, \quad R_i < r < s(t), \quad t_1 < t < t_2, \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} - D_w \left( \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) = 0, \quad s(t) < r < R_e, \quad t_1 < t < t_2, \quad (4.32)$$

dove  $t_2$  rappresenta il tempo in cui la soluzione è diventata ovunque insatura, ossia  $s(t_2) = R_i$ . Come si può osservare, nella parte insatura  $[s, R_e]$  l'equazione di evoluzione per la cera disciolta è scritta per l'incognita  $c$  e non per  $C_s$  dal momento che la cera disciolta non è sufficiente a saturare la soluzione. Per  $t = t_1$  la funzione  $G$  che fornisce la condizione iniziale è ottenuta dallo stadio 1, cioè  $G(r, t_1)$ . Le condizioni al contorno sulle pareti esterne sono ottenute imponendo l'assenza di flusso

$$\frac{\partial c}{\partial r}(R_e, t) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial r}(R_i, t) = 0. \quad (4.33)$$

La (4.33)<sub>1</sub> ci dice che sulla parete calda la cera disciolta non può essere rimpiazzata da quella segregata che non c'è più mentre la (4.33)<sub>2</sub> ci dice che, sulla parete fredda, tutta la cera segregata va a formare il deposito e non ad accrescere  $G$ . Sulla frontiera mobile  $r = s(t)$  si ha

$$G(s, t) = 0, \quad (4.34)$$

$$D_w \frac{\partial c}{\partial r}(s, t) = D_w b_w \frac{dT}{dr}(s) + D_G \frac{\partial G}{\partial r}(s, t), \quad (4.35)$$

dove (4.34) e (4.35) esprimono l'assenza di fase segregata e la continuità del flusso totale di cera sul fronte di desaturazione rispettivamente. Anche durante lo stadio 2 la velocità di deposizione è data dalla (4.20), poiché sulla superficie di deposizione la soluzione è sempre satura.

### 4.8 Stadio 3

Lo stadio 3 è caratterizzato dalla completa desaturazione della soluzione. La condizione iniziale per questo stadio è ottenuta dallo stadio 2, ossia  $c(r, t_2)$ . L'equazione che governa questa fase è quella della fase insatura

$$\frac{\partial c}{\partial t} - D_w \left( \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) = 0, \quad R_i < r < R_e, \quad t > t_2, \quad (4.36)$$

con condizioni al contorno

$$\frac{\partial c}{\partial r}(R_e, t) = 0, \quad c(R_i) = C_s(T_i). \quad (4.37)$$

Al solito la condizione su  $R_e$  esprime il fatto che la cera disciolta che lascia la parete calda non è rimpiazzata da cera segregata, mentre la condizione su  $R_i$  esprime il fatto che sul fronte di deposizione la cera segregata è sempre presente. Durante lo stadio 3 la velocità di deposizione della cera  $\dot{m}_w$  è data da

$$\dot{m}_w = D_w \frac{\partial c}{\partial r}(R_i, t). \quad (4.38)$$

Dal momento che per  $t \rightarrow \infty$  la soluzione asintotica di (4.36) è  $c = C_s(T_i)$ , il cui gradiente è nullo, si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{m}_w = 0,$$

ossia la velocità di deposizione tende a zero per tempi sufficientemente lunghi. A differenza degli stadi precedenti è impossibile scrivere nello stadio 3 una espressione esplicita per la velocità di deposizione della cera, ma possiamo risolvere il problema numericamente. La conoscenza della velocità di deposizione della cera è necessaria per studiare la crescita dello strato di deposito. La quantità di deposito di cera per unità di superficie e per unità di tempo è

$$D_w \frac{\partial c}{\partial r}(R_i, t), \quad (4.39)$$

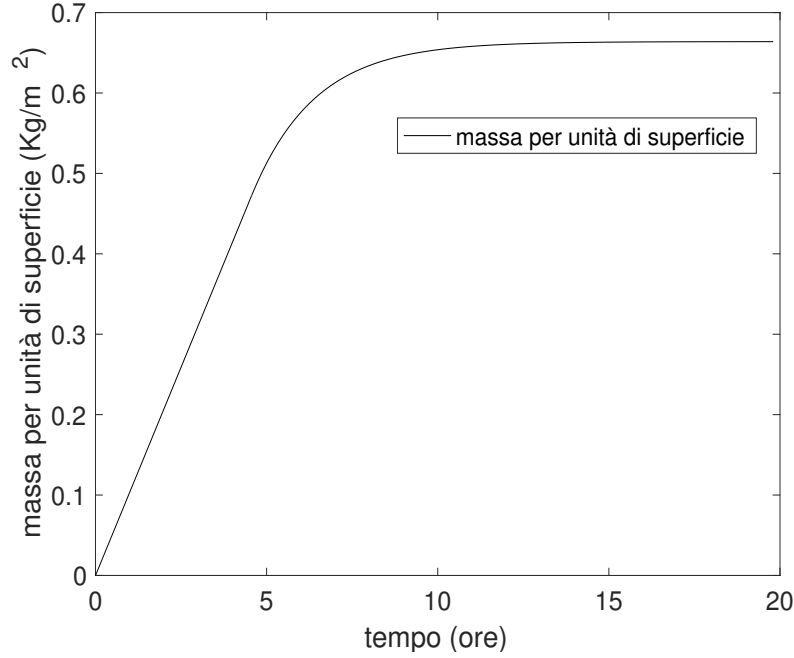
dove  $c$  è dato da  $C_s(T)$  durante i primi due stadi e dalla soluzione di (4.36)-(4.37) durante il terzo. Supponendo che la soluzione sia inizialmente satura ovunque (ossia assumendo che il sistema cominci dallo stadio 1) la massa di deposito di cera per unità di superficie  $m_w$  è data, per ogni  $t > t_2$  (cioè durante lo stadio 3), da

$$m_w = D_w b_w \frac{(T_e - T_i)}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \frac{1}{R_i} t_2 + \int_{t_2}^t D_w \frac{\partial c}{\partial r}(R_i, \tau) d\tau. \quad (4.40)$$

Nel caso in cui il sistema evolva dallo stadio 2, il tempo  $t_2$  in (4.40) indica solamente la durata dello stadio 2. Chiaramente il deposito totale è dato da  $m = m_w/\phi$ .

### 4.9 Simulazioni numeriche

Consideriamo adesso un esempio di simulazione numerica basata sul modello matematico degli stadi 1, 2, 3. In particolare simuliamo l'andamento delle concentrazioni di cera disciolta e di cera segregata e la crescita del deposito. I risultati delle simulazioni sono mostrati nelle figure Fig. 4.3, 4.4, 4.5. I parametri fisici utilizzati per le simulazioni sono quelli della Tabella 4.1.



**Figura 4.3.** Crescita della massa

Nella Figura 4.3 viene riportata la massa depositata per unità di superficie in funzione del tempo. Possiamo identificare gli stadi 1 e 2 (caratterizzati dalla crescita lineare) e lo stadio 3, dove il tasso di crescita tende asintoticamente a 0. In questo esempio il sistema evolve dallo stadio 1, dal momento che la differenza  $c_{tot}^* - C_s(T)$  è positiva sia alla parete fredda che a quella calda.

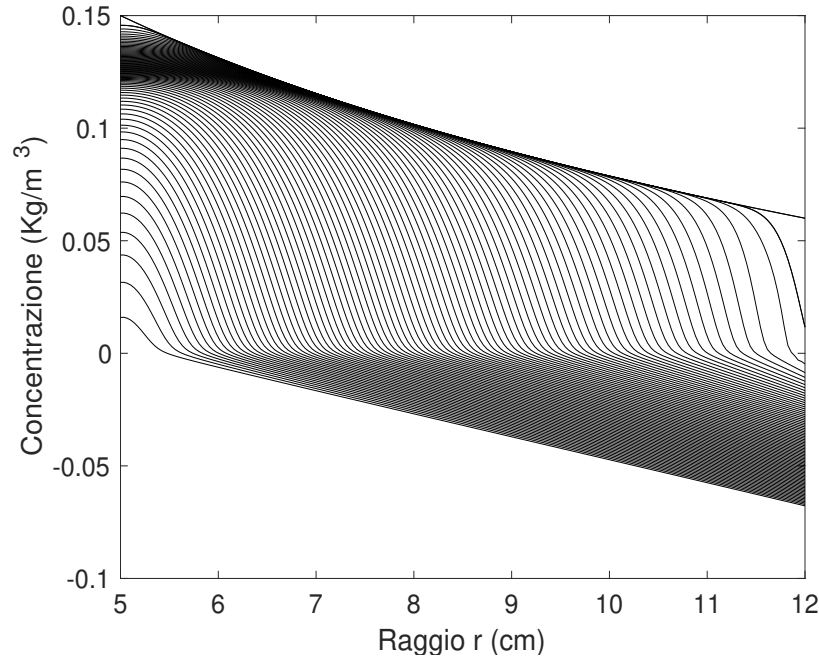
Nella Fig. 4.4 viene riportata l'evoluzione della cera segregata e della cera disciolta durante le fasi 1 e 2. Per mostrare la soluzione in un unico grafico introduciamo la funzione

$$u(r, t) = \begin{cases} G(r, t) & \text{dove la soluzione satura} \\ c(r, t) - C_s(T(r)) & \text{dove la soluzione insatura} \end{cases} \quad (4.41)$$

per  $t \in [0, t_2]$ . Il segno di  $u$  è infatti associato allo stato di saturazione. In particolare si ha  $u = G > 0$  durante lo stadio 1, mentre nello stadio 2 si ha  $u > 0$  nella regione satura e  $u < 0$  nella regione insatura. Nella Figura 4.4 viene mostrato il profilo della funzione  $u(r, t)$ . I rami dove  $u > 0$

**Tabella 4.1.** Parametri fisici della simulazione numerica.  $D_G$  è la diffusività della cera segregata.

$$\begin{array}{l} \overline{T_e = 293K, \quad T_i = 278K, \quad R_i = 0.05 m,} \\ \overline{R_e = 0.12 m, \quad C_s(T_i) = 20.1 \frac{kg}{m^3}, \quad c_{tot}^* = 20.25 \frac{kg}{m^3},} \\ \overline{b_w = 0.006 \frac{kg}{m^3 \cdot K}, \quad D_w = 3.20 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s}, \quad D_G = 1.4 \times 10^{-8} \frac{m^2}{s}.} \end{array}$$



**Figura 4.4.** Grafico della funzione  $u$  definito in (4.41) durante gli stadi 1 e 2.

corrispondono a  $G(r, t)$ , mentre quelli dove  $u < 0$  corrispondono a  $c - C_s(T)$ . I parametri fisici sono sempre quelli della Tabella 4.1. Lo stadio 3 invece è descritto nella Figura 4.5, dove si mostra il profilo di  $c(r, t)$  e il suo limite asintotico.

#### 4.10 Una diversa procedura per il calcolo di $b_w$

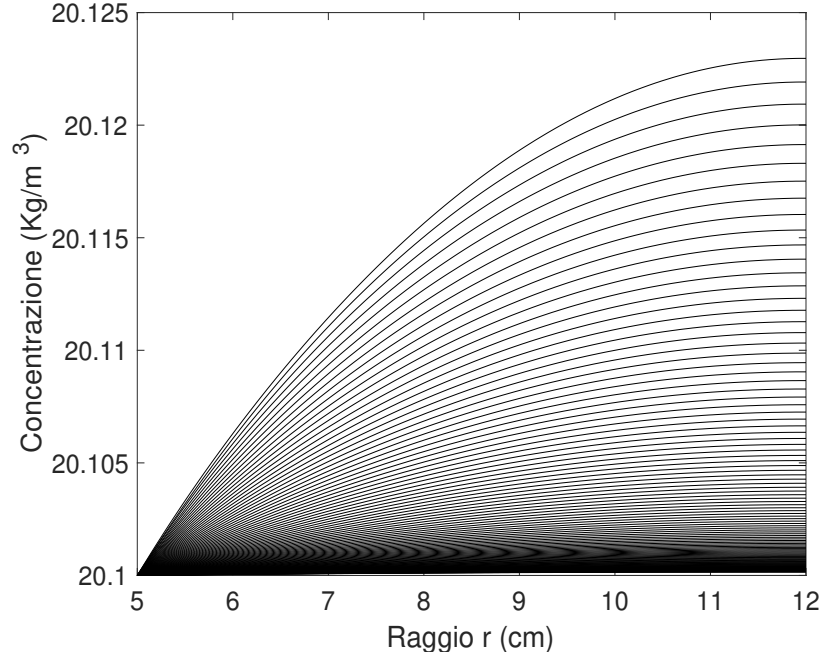
In questa sezione descriviamo una procedura per la determinazione del parametro  $b_w$  in assenza di dati sperimentali per le masse asintotiche. Questa procedura è molto utile, poiché ci permette di determinare il gradiente di solubilità  $b_w$ , conoscendo misure di deposito nella fase di crescita lineare. La procedura si basa su un metodo che estrapola l'evoluzione di  $m_w(t)$  durante lo stadio 3 sulla base di dati acquisiti durante la fase di crescita lineare. Mettiamoci nello stadio 3. Fra tutte le soluzioni dell'equazione di diffusione

$$\frac{\partial c}{\partial t} - D_w \left( \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) = 0,$$

che soddisfano le condizioni

$$c(R_i, t) = C_s(T_i), \quad \left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=R_e} = 0,$$

cerchiamo quelle che possono essere scritte come il prodotto di una funzione del tempo  $t$  e una funzione di  $r$  (metodo di separazione delle variabili in geometria cilindrica). Riscaldiamo le variabili utilizzando le seguenti variabili adimensionali



**Figura 4.5.** Grafico della funzione  $c/C_s(T_i)$  durante lo stadio 3.

$$t = \left( \frac{R_i^2}{D_w} \right) \tilde{t} \quad r = R_i \tilde{r} \quad c = C_s(T_i) + C_s(T_i) \tilde{c}$$

L'equazione per la concentrazione diventa

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{t}} - \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{r}} \right) = 0.$$

Cerchiamo allora soluzioni a variabili separabili del tipo  $\tilde{c} = f(\tilde{t})g(\tilde{r})$  tali che

$$\tilde{c}(1) = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=R_e/R_i} = 0.$$

Seguendo una procedura analoga a quella della sezione 1.4, si ottiene

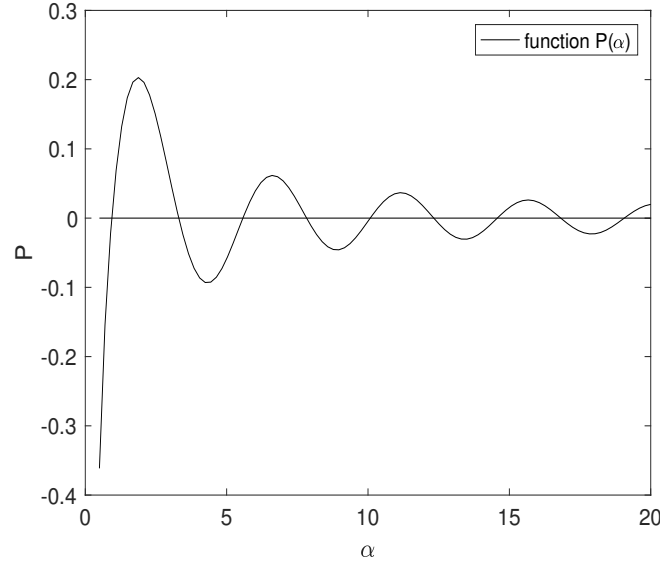
$$\tilde{c}(\tilde{r}, \tilde{t}) = \tilde{U}(\tilde{r}) \exp\{-\alpha^2(\tilde{t} - \tilde{t}_2)\}, \quad (4.42)$$

dove  $\alpha$  è un parametro da determinare e dove  $\tilde{U}(\tilde{r})$  deve soddisfare l'equazione di Bessel

$$\frac{d^2 \tilde{U}}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{r}} + \alpha^2 \tilde{U} = 0 \quad (4.43)$$

con le condizioni al contorno

$$\tilde{U}(1) = 0, \quad \left. \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=R_e/R_i} = 0. \quad (4.44)$$



**Figura 4.6.** Grafico della funzione  $\mathcal{P}(\alpha)$

La soluzione dell'equazione (4.43) può essere espressa mediante formule più o meno esplicite. In particolare si può far vedere che

$$\tilde{U}(\tilde{r}) = Y_o(\alpha)J_o(\tilde{r}\alpha) - J_o(\alpha)Y_o(\tilde{r}\alpha), \quad (4.45)$$

dove  $J_o$  e  $Y_o$  sono le funzioni di Bessel di ordine zero del primo e del secondo tipo (si veda ad esempio [8]) date da

$$J_o(z) = 1 - \frac{z^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{z^2}{4}\right)^2}{(2!)^2} - \frac{\left(\frac{z^2}{4}\right)^3}{(3!)^2} + \dots \quad (4.46)$$

$$Y_o(z) = \frac{2}{\pi} \left[ \ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma \right] J_o(z) + \frac{2}{\pi} \frac{\frac{z^2}{4}}{(1!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{z^2}{4}\right)^2}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{\left(\frac{z^2}{4}\right)^3}{(3!)^2} + \dots \quad (4.47)$$

dove  $\gamma$  è la costante di Eulero

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right) \approx 0.5772.$$

Dalla (4.45) risulta chiaro che la condizione  $\tilde{U}(1) = 0$  è automaticamente soddisfatta, mentre l'imposizione della (4.44)<sub>2</sub> è quella che ci permette di determinare  $\alpha$ . Si ottiene

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{r}} \left( \frac{R_e}{R_i} \right) = \mathcal{P}(\alpha) = Y_o(\alpha)J'_o \left( \frac{R_e}{R_i} \alpha \right) - J_o(\alpha)Y'_o \left( \frac{R_e}{R_i} \alpha \right) = 0. \quad (4.48)$$

Il grafico della funzione  $\mathcal{P}(\alpha)$  è mostrato in Fig. 4.6, da cui si evince che ci sono infinite soluzioni (autovalori) di  $\mathcal{P}(\alpha) = 0$ . Dal momento che siamo interessati alla fase asintotica, ossia alla fase in



cui non si osservano più variazioni di deposito, ha senso considerare solo la soluzione più piccola (che per  $R_e/R_i = 2.5$ , ossia i valori considerati nella Fig. 4.6, fornisce  $\alpha_o \approx 0.94$ ). Infatti, indicando con  $\alpha_j$  con  $j = 0, 1, 2, 3, \dots$  gli autovalori soluzioni di  $\mathcal{P}(\alpha) = 0$  si ha che la soluzione (4.42) diventa

$$\tilde{c}(\tilde{r}, \tilde{t}) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{U}(\tilde{r}; \alpha_j) \exp\{-\alpha_j^2(\tilde{t} - \tilde{t}_2)\}, \quad (4.49)$$

La funzione  $\tilde{U}$  è uniformemente limitata rispetto agli  $\alpha$ , per cui, per  $t$  sufficientemente grande, il termine dominante della serie è quello in cui appare  $\alpha_o$  e possiamo scrivere

$$\tilde{c}(\tilde{r}, \tilde{t}) \approx \tilde{U}(\tilde{r}; \alpha_o) \exp\{-\alpha_o^2(\tilde{t} - \tilde{t}_2)\}. \quad (4.50)$$

Tornando alle variabili dimensionali, il fattore di attenuazione è dato da

$$\exp\left\{-\alpha_o^2 \frac{D_w}{R_i^2}(t - t_2)\right\}.$$

Adesso cerchiamo di fare un “match” fra la parte lineare di  $m_w(t)$  e il valore asintotico del tipo

$$m_w(t) = m_w(t_2) + \tau \dot{m}_w(t_2) \left[1 - \exp\left(-\frac{t - t_2}{\tau}\right)\right], \quad (4.51)$$

dove  $m_w(t)$  è il deposito di massa per unità di superficie,  $t_2$  è il tempo finale dello stadio 2 (ossia il tempo di desaturazione) e

$$\tau = \frac{R_i^2}{D_w \alpha_o^2}.$$

Scrivendo la crescita di massa nella forma (4.51) stiamo dicendo che i rami che descrivono la crescita nella fase lineare e in quella asintotica (stadio 3) si raccordano con continuità fino alla derivata prima in  $t = t_2$ . Il deposito di cera per unità di superficie asintotico è dato da

$$M_w(T_i) = m_w(t_2) + \dot{m}_w(t_2) \frac{R_i^2}{D_w \alpha_o^2}$$

e ricordando che (si veda la 4.20))

$$\dot{m}_w(t_2) = D_w b_w \frac{(T_e - T_i)}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \frac{1}{R_i}$$

otteniamo

$$M_w(T_i) = m_w(t_2) + b_w \frac{(T_e - T_i)}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \frac{R_i}{\alpha_o^2}.$$

L'incognita  $D_w$  non appare nell'espressione per  $M_w$ . Utilizzando allora due diverse temperature del cold finger  $T_{i1} > T_{i2}$  si trova

$$M_w(T_{i1}) = m_{wT_{i1}} + b_w \frac{(T_e - T_{i1})}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \frac{R_i}{\alpha_o^2}, \quad M_w(T_{i2}) = m_{wT_{i2}} + b_w \frac{(T_e - T_{i2})}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \frac{R_i}{\alpha_o^2}.$$

dove  $m_{wT_{i1}}, m_{wT_{i2}}$  rappresentano la cera depositata per unità di superficie al tempo di desaturazione per gli esperimenti con temperature del cold finger  $T_{i1}$  and  $T_{i2}$ . Sottraendo si trova

$$M_w(T_{i1}) - M_w(T_{i2}) = m_{wT_{i1}} - m_{wT_{i2}} + b_w \left[ \frac{(T_{i2} - T_{i1})R_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)\alpha_o^2} \right]. \quad (4.52)$$

Ricordando le (4.16), (4.17) si trova

$$M_w(T_{i1}) = b_w(T_{cloud} - T_{i1})\frac{(R_e^2 - R_i^2)}{2R_i}, \quad M_w(T_{i2}) = b_w(T_{cloud} - T_{i2})\frac{(R_e^2 - R_i^2)}{2R_i},$$

per cui

$$M_w(T_{i1}) - M_w(T_{i2}) = b_w(T_{i2} - T_{i1})\frac{(R_e^2 - R_i^2)}{2R_i}. \quad (4.53)$$

Sostituendo (4.53) in (4.52) si trova

$$b_w = \left[ \frac{R_e^2 - R_i^2}{2R_i} - \frac{R_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)\alpha_o^2} \right]^{-1} \cdot \frac{m_{wT_{i1}} - m_{wT_{i2}}}{T_{i2} - T_{i1}} =: \chi \cdot \frac{m_{wT_{i1}} - m_{wT_{i2}}}{T_{i2} - T_{i1}}, \quad (4.54)$$

dove  $\chi$  è un fattore geometrico. La (4.54) ci fornisce il valore di  $b_w$  mediante misure di massa ottenute durante la fase di crescita di deposito lineare.

#### 4.11 Limiti superiore e inferiore della diffusività $D_w$

In questa sezione mostriamo come determinare un limite superiore ed uno inferiore per la diffusività della cera  $D_w$ . L'equazione (4.27) può essere riscritta come

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( D_G r \frac{\partial G}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (rG) = 0. \quad (4.55)$$

Integriamo su  $R_i < r < R_e$ ,  $0 < t < t_1$ , ed utilizziamo le formule di Gauss-Green, si veda [7]. Si trova

$$\int_0^{t_1} \int_{R_i}^{R_e} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( D_G r \frac{\partial G}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (rG) \right] dr dt = \oint D_G r \frac{\partial G}{\partial r} dt + rG dr = 0 \quad (4.56)$$

dove l'integrale è fatto sul bordo in senso antiorario. L'integrale curvilineo fornisce

$$\int_{R_i}^{R_e} rG_o(r) dr + \int_0^{t_1} R_e D_G \frac{\partial G}{\partial r}(R_e, t) dt - \int_{R_i}^{R_e} rG(r, t_1) dr = 0.$$

Ricordando la condizione al contorno (4.29) otteniamo

$$\int_{R_i}^{R_e} rG(r, t_1) dr = \int_{R_i}^{R_e} rG_o(r) dr - \frac{D_w b_w (T_e - T_i)}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} t_1. \quad (4.57)$$

Passando allo stadio 2, integriamo la (4.56) su  $R_i < r < s(t)$ ,  $t_1 < t < t_2$ , utilizzando le (4.33)-(4.34). In questo caso si ottiene

$$\int_{R_i}^{R_e} rG(r, t_1)dr = - \int_{t_1}^{t_2} D_G s \frac{\partial G}{\partial r}(s, t)dt. \quad (4.58)$$

Dalla (4.35), ricordando che  $\frac{\partial c}{\partial r}(s, t) > 0$ , deduciamo che

$$-D_G s \frac{\partial G}{\partial r}(s, t) < D_w b_w s \frac{dT}{dr}(s) = \frac{D_w b_w (T_e - T_i)}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}. \quad (4.59)$$

Combinando insieme (4.57), (4.58), (4.59) otteniamo

$$\int_{R_i}^{R_e} rG_o(r)dr - \frac{D_w b_w (T_e - T_i)}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} t_1 < \int_{t_1}^{t_2} \frac{D_w b_w (T_e - T_i)}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} dt,$$

da cui si ottiene la disuguaglianza

$$D_w > \frac{1}{t_2} \frac{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{b_w (T_e - T_i)} \int_{R_i}^{R_e} rG_o(r)dr. \quad (4.60)$$

Osserviamo inoltre dalla (4.28) che

$$\begin{aligned} \int_{R_i}^{R_e} rG_o(r)dr &= \int_{R_i}^{R_e} r \left[ c_{tot}^* - C_s(T) \right] dr = c_{tot}^* \frac{R_e^2 - R_i^2}{2} - \int_{R_i}^{R_e} r \left[ C_s(T_i) + b_w (T - T_i) \right] dr = \\ &= \frac{R_e^2 - R_i^2}{2} \left[ c_{tot}^* - C_s(T_i) \right] - \frac{b_w (T_e - T_i)}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \int_{R_i}^{R_e} r \ln\left(\frac{r}{R_i}\right) dr \end{aligned}$$

Integrando l'ultimo termine per parti si ottiene

$$\int_{R_i}^{R_e} rG_o(r)dr = \frac{R_e^2 - R_i^2}{2} \left[ c_{tot}^* - C_s(T_i) + \frac{1}{2} \frac{b_w (T_e - T_i)}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \right] - \frac{R_e^2}{2} b_w (T_e - T_i), \quad (4.61)$$

che può essere inserito nella (4.60) per la stima di  $D_w$ . Utilizzando i valori della Tabella 4.1 con  $t_2 = 5 h$  otteniamo, ad esempio, la stima

$$D_w > 2.90 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s}. \quad (4.62)$$

Per ottenere un limite superiore per  $D_w$  osserviamo che la massa di cera depositata al tempo  $t_2$  sul cold finger

$$M_{dep} = \frac{D_w b_w (T_e - T_i) t_2}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \cdot \frac{t_2}{R_i} \cdot \underbrace{2\pi R_i \ell}_{\text{superficie del cold finger}}$$

deve essere più piccola della massa totale di cera del sistema al tempo  $t = 0$

$$M_{in} = c_{tot}^* \underbrace{\pi(R_e^2 - R_i^2)\ell}_{\text{volume del cold finger}}$$

Imponendo la disuguaglianza  $M_{dep} < M_{in}$  si trova

$$\frac{2D_w b_w (T_e - T_i) t_2}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} < c_{tot}^* (R_e^2 - R_i^2), \quad (4.63)$$

che porta alla disuguaglianza

$$D_w < \frac{c_{tot}^* (R_e^2 - R_i^2) \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{2b_w t_2 (T_e - T_i)}. \quad (4.64)$$

Sempre dai valori della Tabella 4.1 si ottiene

$$D_w < 6.5 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}. \quad (4.65)$$

## I fluidi di Bingham

Nel capitolo 2 abbiamo visto che le leggi di bilancio che regolano il moto di un fluido in regime isoterma sono date da

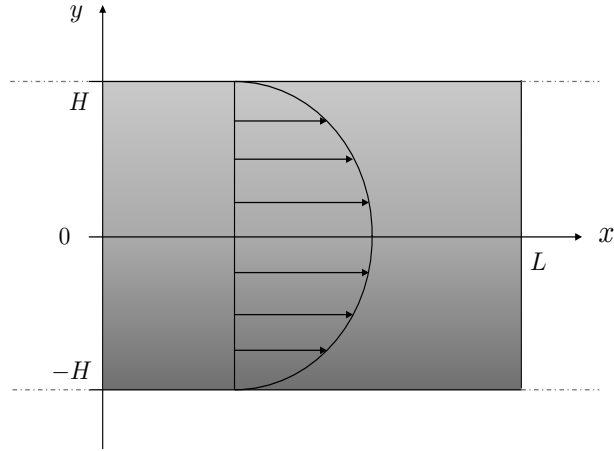
$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}, \end{cases} \quad (5.1)$$

dove la (5.1)<sub>1</sub> esprime il bilancio di massa, mentre la (5.1)<sub>2</sub> esprime il bilancio del momento lineare o quantità di moto. Abbiamo inoltre visto che, quando il tensore degli sforzi  $\mathbf{T}$  assume la forma (2.15) e il fluido è incomprimibile, la (5.1) diventa la nota equazione di Navier-Stokes per fluidi incomprimibili (2.18). In questo capitolo siamo interessati a studiare una classe di fluidi con una equazione costitutiva diversa da quella dei fluidi viscosi newtoniani. In particolare vogliamo modellizzare i cosiddetti *fluidi di Bingham*, ossia fluidi che si comportano come fluidi viscosi solo se lo stress a cui sono sottoposti supera una certa soglia. Al di sotto di questa soglia essi si comportano come corpi rigidi, ossia non sono in alcun modo deformabili. Fluidi di questo tipo si incontrano comunemente nella vita di tutti i giorni. Basti pensare che il dentifricio, la maionese, il ketchup possono essere tutti considerati fluidi di Bingham. Prima di addentrarsi nello studio dei fluidi di Bingham rivediamo alcune nozioni sui fluidi newtoniani in una semplice geometria unidimensionale.

### 5.1 Moto alla Poiseuille di un fluido newtoniano

Consideriamo un fluido newtoniano incomprimibile che scorre fra due lastre parallele poste ad una distanza  $2H$  fra di loro, vedi Fig. 5.1. Supponiamo che il canale sia bi-dimensionale, ossia trascuriamo la coordinata  $z$  e supponiamo che il moto sia originato da una differenza di pressione applicata all'ingresso e all'uscita del canale (moto alla Poiseuille). Inoltre supponiamo che le forze di massa non siano presenti (trascuriamo la gravità) e che il campo di velocità abbia la forma  $\mathbf{v} = v(y, t) \mathbf{e}_1$ . In questo modo le equazioni di Navier-Stokes si riducono a

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y}, \end{cases} \quad (5.2)$$



**Figura 5.1.** Moto alla Poiseuille

dove  $\rho$  è la densità del fluido e  $\mu$  è la sua viscosità. Il bilancio di massa è automaticamente soddisfatto dato che

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Dalla seconda delle (5.2) otteniamo che  $p = p(x, t)$  e siccome nella prima delle (5.2) la variabile  $v$  dipende solo da  $y$  e  $t$  si trova

$$\frac{\partial p}{\partial x} = A \quad \Longrightarrow \quad p = Ax + B,$$

dove  $A$ ,  $B$  possono eventualmente dipendere dal tempo. Se la pressione  $p$  è nota all'ingresso e all'uscita del canale, le costanti  $A$  e  $B$  possono essere determinate risolvendo il sistema

$$\begin{cases} B = p_{in}, \\ AL + B = p_{out} \end{cases}$$

che fornisce

$$A = -\frac{\Delta p}{L} = -\frac{p_{in} - p_{out}}{L} \quad B = p_{in},$$

ossia

$$p = -\frac{\Delta p}{L}x + p_{in}.$$

Di conseguenza l'equazione per la velocità diventa

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\Delta p}{L},$$

cui dobbiamo aggiungere le condizioni al contorno e iniziali. Supponendo che il fluido si “attacchi” alla pareti del canale scriviamo le condizioni di aderenza alle pareti  $v(\pm H, t) = 0$ . In alternativa, sfruttando la simmetria del problema, possiamo anche scrivere

$$v(H, t) = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial y}(0, t) = 0.$$

La soluzione stazionaria (ossia quella in cui si trascura la dipendenza dal tempo) fornisce il classico profilo parabolico

$$v(y) = \frac{\Delta p}{2\mu L}(H^2 - y^2).$$

Ovviamente  $v(y) > 0$  se  $\Delta p > 0$  e  $v(y) < 0$  se  $\Delta p < 0$ . La componente tangenziale del tensore degli sforzi è data da

$$T_{12} = \mu \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (5.3)$$

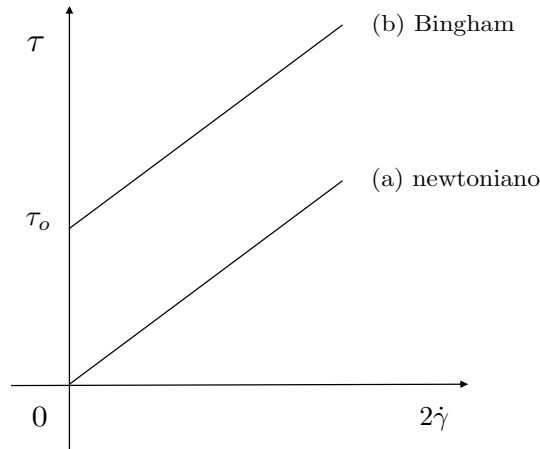
In pratica la (5.3) ci dice quanta forza per unità di superficie gli strati di fluido esercitano l'uno sull'altro (shear). Ovviamente lo shear è massimo alla parete e nullo su  $y = 0$ . La relazione (5.3) può essere visualizzata graficamente introducendo le grandezze

$$\tau = |T_{12}| \quad \dot{\gamma} = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| \quad (5.4)$$

che permettono di non preoccuparsi della positività o negatività dello stress  $T_{12}$  e dello strain-rate  $\partial v/\partial y$ . Infatti in questo modo abbiamo che la relazione (5.3) può essere scritta come

$$\tau = 2\mu\dot{\gamma},$$

la cui rappresentazione grafica è quella mostrata nel plot (a) della Fig. 5.2. La pendenza della retta



**Figura 5.2.** Relazioni costitutive: (a) fluido newtoniano; (b) fluido di Bingham

(a) è esattamente il coefficiente di viscosità  $\mu$ .

## 5.2 Moto alla Poiseuille di un fluido di Bingham

Supponiamo adesso di considerare la relazione stress/strain mostrata nel plot (b) della Fig. 5.2. Essa rappresenta l'equazione costitutiva di un *fluido di Bingham*. Come facilmente osservabile  $\dot{\gamma} > 0$  solo se  $\tau > \tau_0$ , ossia lo stress deve superare la soglia  $\tau_0$  affinché si osservino deformazioni nel mezzo. Confrontando la retta (b) con la retta (a) nella Fig. 5.2, si osserva che per il fluido di Bingham la

relazione costitutiva è sempre di tipo lineare ma con una singolarità in  $\dot{\gamma} = 0$ . La sua equazione costitutiva può essere dunque scritta come

$$T_{12} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tau_o \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (5.5)$$

dove  $\tau_o$  è il valore di soglia dello stress e dove  $\operatorname{sgn}$  è la funzione

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Notiamo che  $T_{12}$  ha lo stesso segno di  $\partial v / \partial y$ . Ricordando la (5.4), si ha che l'equazione costitutiva rappresentata dalla retta (b) di Fig. 5.2 può anche essere scritta come e

$$(\tau - \tau_o)_+ = 2\mu\dot{\gamma}. \quad (5.6)$$

dove  $+$  è la parte positiva. I fluidi con equazione costitutiva (5.5) o (5.6) si dicono di *Bingham* o *visco-plastici*. Essi si comportano come fluidi newtoniani quando lo stress a cui sono sottoposti risulta maggiore del valore di soglia  $\tau_o$ . Dalla Fig. 5.2 si evince inoltre che la relazione costitutiva di un fluido di Bingham non è una “funzione” ma un grafo. Infatti per  $\dot{\gamma} = 0$  lo stress non è definito univocamente. La relazione (5.5) può essere generalizzata al caso 3D. A questo scopo introduciamo la quantità scalare

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{D} : \mathbf{D}}$$

dove

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla v^T)$$

è la parte simmetrica del gradiente di velocità e dove

$$\mathbf{D} : \mathbf{D} = \sum_{i,j=1}^3 D_{ij} D_{ij}.$$

La quantità  $\dot{\gamma}$  può essere vista come una norma del tensore  $\mathbf{D}$  e nel caso unidimensionale si riduce alla quantità indicata in (5.4). Nei fluidi newtoniani incomprimibili il tensore dello stress può essere espresso come

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D},$$

con  $\operatorname{tr} \mathbf{D} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ . Più in generale, nei fluidi incomprimibili il tensore degli sforzi può essere decomposto come

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}$$

dove  $\mathbf{S}$ , che è detta la parte *deviatorica* del tensore, è a traccia nulla mentre  $-p\mathbf{I}$  è detta la parte *sferica*. Nel caso dei fluidi newtoniani  $\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{D}$ . Per scrivere l'equazione costitutiva di un fluido di Bingham si introduce

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}}$$

e si scrive



$$\begin{cases} \mathbf{S} = \left(2\mu + \frac{\tau_o}{\dot{\gamma}}\right) \mathbf{D} & \tau \geq \tau_o \\ \mathbf{D} = 0 & \tau \leq \tau_o \end{cases} \quad (5.7)$$

L'equazione (5.7) ci dice che per  $\tau \leq \tau_o$  si ha  $\dot{\gamma} = 0$ , che significa assenza di deformazioni. In modo analogo possiamo dire che per  $\dot{\gamma} = 0$  la norma dello stress  $\tau$  è indefinita ma limitata fra i valori 0 e  $\tau_o$ . Nel caso piano unidimensionale

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \quad \dot{\gamma} = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|,$$

$$\mathbf{S} = \left(2\mu + \frac{\tau_o}{\frac{1}{2} \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|}\right) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_o \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_o \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{12} = S_{12} = \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_o \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad \tau = \left| \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_o \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right|$$

È facile osservare che la componente di taglio  $T_{12}$ , il cui modulo coincide con  $\tau$ , fornisce esattamente la (5.5). Consideriamo nuovamente il caso del moto alla Poiseuille nel canale bidimensionale. Nel modello newtoniano abbiamo visto che in  $y = 0$  lo shear stress  $\tau$  è nullo per cui è ragionevole ipotizzare che, nel caso di un fluido di Bingham, esista una regione  $[-s(t), s(t)] \subset [-H, H]$  in cui lo stress è inferiore alla soglia  $\tau_o$ , come mostrato in Fig. 5.3. Per simmetria limitiamoci solo alla parte superiore del canale  $y \geq 0$ . Nella regione  $[s(t), H]$  lo stress in modulo è superiore a  $\tau_o$  e dunque l'equazione costitutiva è data dalla (5.5), ossia

$$T_{12} = S_{12} = \mu \frac{\partial v}{\partial y} - \tau_o, \quad (5.8)$$

dove abbiamo preso il segno  $-$  davanti a  $\tau_o$ , poiché stiamo considerando la parte superiore del canale, dove ha senso aspettarsi che  $\partial v / \partial y$  siano negativo. Nella regione  $[0, s(t)]$  invece lo stress (in valore assoluto) è inferiore a  $\tau_o$  e dunque si avrà  $\dot{\gamma} = 0$ . Il bilancio della quantità di moto allora sarà dato da

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\left( -\tau_o + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{T_{12}},$$

ossia, nuovamente

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (5.9)$$

La differenza con il caso newtoniano è che la (5.9) vale solo in  $[s, H]$ , con  $s(t)$  incognita. Sulla superficie  $y = s(t)$  lo stress  $T_{12}$  deve essere uguale a  $-\tau_o$ , per cui, dalla (5.8) si ottiene

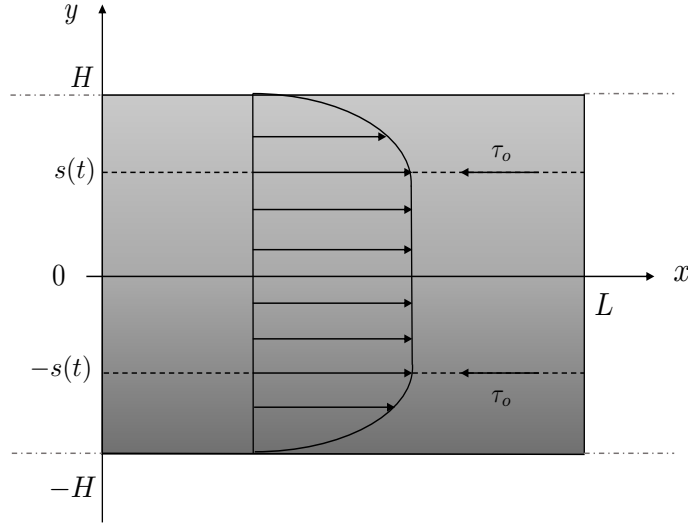


Figura 5.3. Moto alla Poiseuille per un fluido di Bingham

$$\frac{\partial v}{\partial y}(s, t) = 0.$$

Imponendo la condizione  $v(H, t) = 0$  e la condizione iniziale  $v(y, 0) = v_o(y)$  otteniamo

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ v(y, 0) = v_o(y), \\ v(H, t) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial y}(s, t) = 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

Il sistema (5.10) è costituito da una equazione parabolica in cui una parte del bordo del dominio (ossia la curva  $y = s(t)$ ) è incognita. Si tratta nuovamente di un problema a frontiera libera come quelli incontrati nei capitoli precedenti, la cui soluzione richiede l'imposizione di una ulteriore condizione su  $y = s(t)$ . Questa condizione si ottiene imponendo il bilancio della quantità di moto nella parte rigida.

Sempre con riferimento alla Fig. 5.3 osserviamo che la forza applicata sulle superfici  $x = 0$ ,  $x = L$  del nucleo rigido  $[-s, s]$  è data da  $2sp_{in}$  e  $2sp_{out}$ , mentre quella applicata sulle superfici laterali è  $-2L\tau_o$ . La forza risultante deve essere uguale, in base alla seconda legge di Newton, alla massa del nucleo rigido per l'accelerazione  $v_t(s, t)$ . In definitiva

$$2sp_{in} - 2sp_{out} - 2\tau_o L = 2sL\rho \frac{\partial v}{\partial t}(s, t),$$

che, dopo qualche semplificazione, si riduce a

$$\frac{\partial v}{\partial t}(s, t) = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\Delta p}{L} - \frac{\tau_o}{s(t)} \right). \quad (5.11)$$

La condizione (5.11) è la condizione che dobbiamo aggiungere al sistema (5.10) per chiudere il problema. Se il moto è guidato da un gradiente di pressione allora  $p$  è lo stesso del caso newtoniano, ossia

$$p = -\frac{\Delta p}{L}x + p_{in} \quad \Delta p = p_{in} - p_{out} > 0.$$

Ponendo

$$G = \frac{\Delta p}{L} > 0,$$

il problema da risolvere diventa

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial v}{\partial t} = G + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ v(y, 0) = v_o(y), \\ v(H, t) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial y}(s, t) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t}(s, t) = \frac{1}{\rho} \left( G - \frac{\tau_o}{s(t)} \right), \\ s(0) = s_o, \end{array} \right. \quad (5.12)$$

dove è stata aggiunta la condizione iniziale per la superficie mobile  $s(0) = s_o$ . Il problema a frontiera mobile (5.12) è stato studiato analiticamente in [4], dove è stata provata la buona posizione globale (ossia esistenza ed unicità per tutti i tempi). Qui non siamo interessati all'analisi matematica del problema, ma osserviamo che il problema può essere trasformato in modo simile al problema (3.28) della sezione 3.4 e risolto mediante tecniche di punto fisso. Introducendo infatti la variabile

$$z(y, t) = v_t(y, t)$$

si trova che  $z(y, t)$  deve soddisfare l'equazione del calore con sorgente nulla (se  $G$  è costante). Infatti

$$\rho z_t - \mu z_{yy} = (\rho v_t)_t - (\mu v_t)_{yy} = (\rho v_t - \mu v_{yy})_t = G_t = 0.$$

La condizione iniziale diventa

$$z(y, 0) = v_t(y, 0) = \frac{1}{\rho} (G + \mu v_{yy}(y, 0)) = \frac{1}{\rho} (G + \mu v_o''(y)) := z_o(y).$$

Inoltre, siccome  $v(H, t) = 0$  si ha  $v_t(H, t) = z(H, t) = 0$ . Per quanto riguarda le condizioni di frontiera mobile si trova

$$z(s, t) = \frac{1}{\rho} \left( G - \frac{\tau_o}{s} \right), \quad (5.13)$$

mentre derivando rispetto al tempo  $v_y(s, t)$  si trova

$$v_{yy}(s, t)\dot{s} + v_{yt}(s, t) = 0.$$

Di conseguenza

$$z_y(s, t) = -v_{yy}(s, t)\dot{s} = \left(\frac{G}{\mu} - \frac{\rho}{\mu}v_t(s, t)\right)\dot{s} = \left(\frac{G}{\mu} - \frac{\rho}{\mu}z(s, t)\right)\dot{s}$$

che, ricordando la (5.13), porta a

$$z_y(s, t) = \frac{\tau_o\dot{s}}{\mu s}$$

Di conseguenza il problema per  $z$  è

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho z_t - \mu z_{yy} = 0, \\ z(y, 0) = z_o(y) \\ z(H, t) = 0 \\ z(s, t) = \frac{1}{\rho} \left( G - \frac{\tau_o}{s} \right) \\ z_y(s, t) = \frac{\tau_o\dot{s}}{\mu s} \\ s(0) = s_o \end{array} \right.$$

la cui buona posizione può essere studiata mediante le tecniche di punto fisso esposte nella sezione 3.4. Studiamo la soluzione asintotica, ossia quella stazionaria che si ottiene nel limite  $t \rightarrow \infty$ , del problema (5.12). Osserviamo che, trascurando le derivate temporali, il problema (5.12)<sub>1-5</sub> è risolto da

$$v(y, t) = \frac{G}{2\mu} \left[ (H - s)^2 - (y - s)^2 \right], \quad (5.14)$$

dove  $s$  è determinato ponendo uguale a zero la derivata temporale in (5.12)<sub>5</sub>, ossia

$$s = \frac{\tau_o}{G}. \quad (5.15)$$

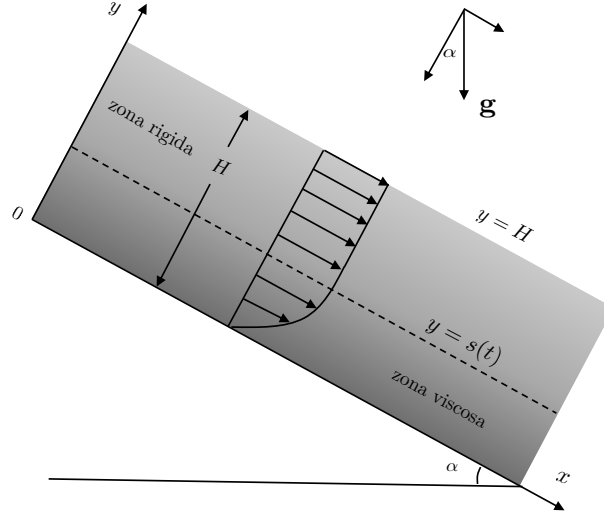
Il profilo di velocità (5.14) è quello mostrato in Fig. 5.3. Nel nucleo rigido il profilo è piatto in quanto la velocità è uniforme. Dalla (5.15) si può dedurre un vincolo sulla caduta di pressione  $\Delta p$ . Infatti, dal momento che dobbiamo richiedere  $s < H$  affinché il plug non abbia invaso tutto il canale e il flusso si sia bloccato, si trova che necessariamente

$$\Delta p > \frac{\tau_o L}{H}. \quad (5.16)$$

Questa condizione deve essere soddisfatta affinché ci sia moto nel canale.

### 5.3 Fluido di Bingham in un piano inclinato

Consideriamo adesso un fluido di Bingham che scorre lungo un piano inclinato come quello mostrato in Fig. 5.4. L'angolo che il piano inclinato forma con il piano orizzontale è indicato con  $\alpha$ . In questo caso il moto non è guidato da una differenza di pressione ma dalla gravità. La superficie superiore del fluido è libera. Il campo delle forze esterne  $\mathbf{f}$  che appaiono nel bilancio del momento (5.1) è dato da



**Figura 5.4.** Fluido di Bingham su un piano inclinato.

$$\mathbf{f} = (\rho g \sin \alpha, -\rho g \cos \alpha).$$

Si suppone che il fluido occupi uno strato uniforme di altezza  $H$  incognita. In un sistema di riferimento come quello mostrato in Fig. 5.4 e con un campo di velocità della forma  $\mathbf{v} = v(y, t)\mathbf{e}_1$  le equazioni di moto diventano

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau_o + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho g \sin \alpha, \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos \alpha. \end{cases} \quad (5.17)$$

In questa situazione lo stress di taglio dato dalla (5.5) diventa

$$T_{12} = \tau_o + \mu \frac{\partial v}{\partial y},$$

in cui abbiamo preso il segno  $+$  davanti a  $\tau_o$  poiché, come mostrato in Fig. 5.4, ci si aspetta che il gradiente di velocità  $v_y$  sia positivo nella regione sopra soglia. Sulla superficie  $y = H$  non è applicato nessuno sforzo di taglio (*stress free surface*) e l'unica forza esercitata su di essa è la pressione atmosferica che però agisce nella direzione normale alla superficie e non produce alcuno "shear". Questo comporta che nella parte superiore dello strato ci sia una regione sotto soglia in cui il fluido ha un comportamento di tipo rigido. Indichiamo con l'intervallo  $[s(t), H]$  tale regione, in cui anche  $s(t)$  è incognita. Senza perdere in generalità, la pressione atmosferica può essere riscalata a zero cosicché, integrando la (5.17)<sub>2</sub> con la condizione  $p(x, H, t) = 0$  si trova

$$p = \rho g \cos \alpha (H - y), \quad (5.18)$$

che ci fornisce la pressione in tutto lo strato. Lo spessore  $H$  dello strato è incognito e verrà determinato imponendo il flusso volumetrico (*volumetric flow-rate*). Dalla (5.18) si deduce facilmente che

$p_x = 0$ , ossia che la pressione non varia con la  $x$ . Consideriamo adesso la versione stazionaria di (5.17)<sub>1</sub> dove poniamo  $p_x = 0$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau_o + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho g \sin \alpha.$$

Integrando fra  $y$  ed  $s$  ( $s$  è dunque l'interfaccia fra la fase liquida e quella rigida) si trova

$$\mu \frac{\partial v}{\partial y} = \rho g \sin \alpha (s - y), \quad (5.19)$$

dove abbiamo sfruttato la condizione di soglia  $v_y = 0$  su  $y = s$ . Integrando nuovamente in  $y$

$$\mu v = -\rho g \sin \alpha \frac{(y - s)^2}{2} + c.$$

L'incognita  $c$  è determinata imponendo la condizione di aderenza  $v = 0$  su  $y = 0$ . Si trova

$$v = \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} \left[ \frac{s^2}{2} - \frac{(y - s)^2}{2} \right], \quad (5.20)$$

che fornisce il profilo parabolico di velocità nella regione sopra soglia. Adesso abbiamo bisogno di una ulteriore equazione per determinare la posizione di  $s$ . Dal momento che stiamo trascurando  $v_t$ , abbiamo che l'accelerazione del blocco rigido posto sulla sommità del fluido è nulla. Di conseguenza la risultante delle forze che agiscono su tale blocco deve essere nulla. Scriviamo dunque

$$\underbrace{\tau_o}_{\text{forza agente su } y = s} = \underbrace{\rho g \sin \alpha (H - s)}_{\text{forza dovuta alla gravità}}.$$

Allora

$$s = H - \frac{\tau_o}{\rho g \sin \alpha}. \quad (5.21)$$

Analogamente alla condizione (5.16) determinata per il canale, imponiamo qui la condizione  $s > 0$  che fornisce

$$\frac{\tau_o}{\rho g \sin \alpha} < H. \quad (5.22)$$

Questa condizione, se soddisfatta, garantisce che la parte fluida sia effettivamente presente e che si abbia dunque il moto. Se  $\tau_o$  è tale che al condizione (5.22) non è soddisfatta, allora si ha che la gravità non è sufficiente per far muovere il blocco di fluido. In questo caso tutto rimane fermo. Rimane da determinare lo spessore  $H$  dello strato. A questo scopo dobbiamo imporre una condizione di flusso per il moto. Dal momento che non stiamo imponendo una differenza di pressione come nel canale, qui dobbiamo specificare la quantità di fluido che attraversa la sezione  $x = cost$  nell'unità di tempo. Chiamiamo questa quantità  $Q$  ed imponiamo che sia la stessa per tutte le sezioni  $x = cost$ . Si ha

$$Q = \int_0^H v dy.$$

Integrando per parti si ottiene

$$Q = yv \Big|_0^H - \int_0^H y \frac{\partial v}{\partial y} dy = Hv \Big|_H - \int_0^s y \frac{\partial v}{\partial y} dy.$$

Nell'ultimo integrale abbiamo posto  $s$  come estremo superiore di integrazione dal momento che in  $[s, H]$  il gradiente di velocità  $v_y$  è identicamente nullo. Dalle (5.19), (5.20) si ha

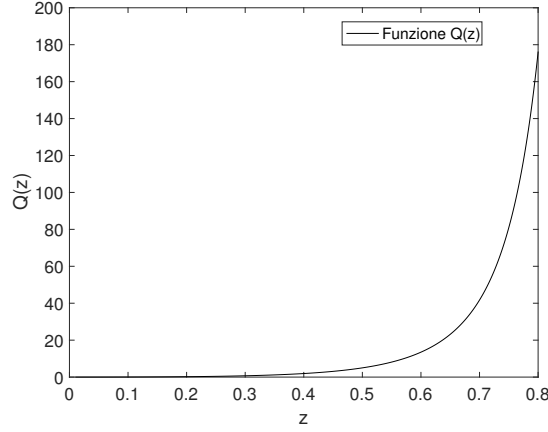


Figura 5.5. Grafico di  $Q$  in funzione di  $z$  dato dalla (5.24).

$$v \Big|_H = v \Big|_s = \frac{\rho g s^2 \sin \alpha}{2\mu} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} (s - y).$$

per cui

$$Q = \frac{\rho g H s^2 \sin \alpha}{2\mu} - \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} \int_0^s y(s - y) dy.$$

Integrando si trova

$$Q = \frac{\rho g H s^2 \sin \alpha}{2\mu} - \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} \underbrace{\left[ \frac{y^2 s}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^s}_{=s^3/6}$$

ossia

$$Q = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} \left[ H s^2 - \frac{s^3}{3} \right] = \frac{\rho g \sin \alpha H^3}{2\mu} \left[ \left( \frac{s}{H} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{s}{H} \right)^3 \right] \quad (5.23)$$

Ora, dalle (5.21), (5.22) si ha

$$0 < \frac{s}{H} = 1 - \frac{\tau_o}{\rho g \sin \alpha H} < 1.$$

Poniamo

$$z = \frac{s}{H} = 1 - \frac{\tau_o}{\rho g \sin \alpha H} \in (0, 1)$$

cosicché

$$1 - z = \frac{\tau_o}{\rho g \sin \alpha H} \quad \implies \quad H^3 = \frac{\tau_o^3}{(\rho g \sin \alpha)^3} \frac{1}{(1 - z)^3}.$$

Sostituendo nella (5.23) si trova

$$Q = \frac{\tau_o^3}{6\mu(\rho g \sin \alpha)^2} \frac{(3z^2 - z^3)}{(1 - z)^3}, \quad (5.24)$$

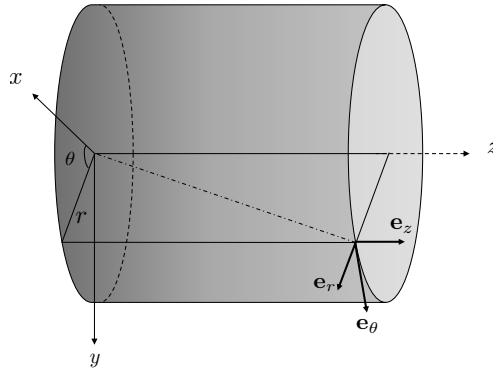
il cui grafico è mostrato in Fig. 5.5. Osserviamo che  $Q(0) = 0$  e che  $\lim_{z \rightarrow 1^-} Q(z) = \infty$ . Inoltre è facile verificare che

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{\tau_o^3}{6\mu(\rho g \sin \alpha)^2} \frac{6z}{(1-z)^4} > 0,$$

per cui la funzione  $Q(z)$  risulta positiva e strettamente crescente in  $(0, 1)$ . Di conseguenza, per ogni  $Q^* > 0$  fissato esiste un unico  $z^* \in (0, 1)$  tale che  $Q(z^*) = Q^*$ . Questo  $z^*$  è ottenuto numericamente tramite la (5.24). Lo spessore  $H^*$  corrispondente a  $Q^*$  è chiaramente dato da

$$H^* = \frac{\tau_o}{(\rho g \sin \alpha)} \frac{1}{(1-z^*)}.$$

Si osserva facilmente che più grande è  $Q^*$  più  $z^*$  è vicino ad 1. Di conseguenza più grande è  $Q^*$  più



**Figura 5.6.** Coordinate cilindriche.

grande risulterà lo spessore  $z^*$ .

## 5.4 Fluido di Bingham in una condotta cilindrica

Consideriamo adesso il flusso in una condotta di raggio  $R$  fissato. Per descrivere il moto in questo tipo di geometria conviene far uso delle coordinate cilindriche, vedi Fig. 5.6. In questo tipo di sistema di riferimento le coordinate di un punto  $(x, y, z)$  dello spazio sono espresse mediante le coordinate  $(r, \theta, \zeta)$  dove queste ultime sono legate alle prime per mezzo della mappa

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = \zeta.$$

dove

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

In questo modo ogni punto dello spazio è espresso mediante  $(r, \theta, \zeta)$ . La terna di riferimento nel nuovo sistema è  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\zeta$ , dove

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_\zeta = \mathbf{e}_3, \end{cases}$$



come mostrato in Fig. 5.6. Consideriamo il flusso di un fluido di Bingham incomprimibile in una condotta di sezione circolare di raggio  $R$ . Analogamente al caso del canale supponiamo che esista un “plug” centrale che si comporta come un corpo rigido di raggio  $r = s(t)$ . Supponiamo che il campo di velocità sia della forma

$$\mathbf{v} = v(r, t)\mathbf{e}_z$$

ossia che il flusso sia orientato lungo la direzione assiale e la velocità vari con la sola  $r$ . L'unica componente tangenziale dello stress è quella parallela a  $\mathbf{e}_z$ . Analogamente al caso del canale lo sforzo di taglio si esprime come

$$T_{rz} = -\tau_o + \mu \frac{\partial v}{\partial r},$$

dove  $T_{rz}$  è la componente dello sforzo diretta lungo  $z$  che agisce sulle superfici  $r = \text{cost}$ . Di conseguenza le equazioni di moto (5.1)<sub>2</sub> in coordinate cilindriche si riducono a

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial r}, \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( -\tau_o + \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right]. \end{cases} \quad (5.25)$$

Dalle (5.25) è evidente che

$$p = p(z, t) = Az + B$$

dove  $A$  e  $B$  possono essere determinate esattamente come nel canale per cui

$$p = -Gz + p_{in} \quad G = \frac{p_{in} - p_{out}}{L} > 0,$$

dove  $G$  può anche dipendere dal tempo. L'equazione di moto stazionario diventa

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( -\tau_o + \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] = -Gr$$

la cui integrazione conduce a

$$-\tau_o + \mu \frac{\partial v}{\partial r} = -G \frac{r}{2} + \frac{c}{r}, \quad (5.26)$$

dove  $c$  è incognita. Imponendo la condizione  $v_r = 0$  su  $r = s$  si trova

$$\frac{c}{s} - G \frac{s}{2} = -\tau_o \quad \implies \quad c = -\tau_o s + G \frac{s^2}{2}.$$

Sostituendo nella (5.26) si trova

$$\mu \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{G}{2} \left( \frac{s^2}{r} - r \right) - \tau_o \left( \frac{s}{r} - 1 \right)$$

Integrando tra  $r$  e  $R$  ed imponendo la condizione di non aderenza su  $y = R$ , troviamo

$$-\mu v = \frac{G}{2} \left( s^2 \ln r - \frac{r^2}{2} \right) \Big|_r^R - \tau_o \left( s \ln r - r \right) \Big|_r^R$$

che, dopo qualche calcolo, può essere riscritta come

$$v = \frac{G}{2\mu} \left[ \frac{R^2 - r^2}{2} - s^2 \ln \left( \frac{R}{r} \right) \right] + \frac{\tau_o}{\mu} \left[ r - R + s \ln \left( \frac{R}{r} \right) \right]. \quad (5.27)$$

Adesso rimane da scrivere l'equazione per  $s$ . Il bilancio delle forze nel plug rigido è dato da

$$\underbrace{(p_{in} - p_{out})\pi s^2}_{\text{forza applicata sulle superfici laterali del plug}} - \underbrace{2\pi s L \tau_o}_{\text{forza esercitata sulla superficie } y = s} = 0,$$

per cui

$$s = \frac{2\tau_o}{G}, \quad \tau_o = \frac{Gs}{2}.$$

Sostituendo  $\tau_o$  nella (5.27) si trova

$$v = \frac{G}{2\mu} \left[ \frac{R^2 - r^2}{2} - s(R - r) \right]. \quad (5.28)$$

Abbiamo trovato nuovamente un profilo parabolico. Supponendo per semplicità che tutto sia indipendente dal tempo possiamo riscrivere la velocità come

$$v(r) = \frac{GR^2}{4\mu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] - \frac{\tau_o R}{\mu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right) \right],$$

per cui la velocità nel plug diventa

$$v(s) = \frac{GR^2}{4\mu} \left[ 1 - \left( \frac{s}{R} \right)^2 \right] - \frac{\tau_o R}{\mu} \left[ 1 - \left( \frac{s}{R} \right) \right].$$

Mettendo in evidenza il termine  $GR^2/4\mu$  si trova

$$v(s) = \frac{GR^2}{4\mu} \left[ 1 - \left( \frac{s}{R} \right)^2 - \frac{2s}{R} \left( 1 - \frac{s}{R} \right) \right],$$

che conduce a

$$v(s) = \frac{GR^2}{4\mu} \left[ 1 - \left( \frac{s}{R} \right) \right]^2.$$

## 5.5 L'equazione di Buckingham

Consideriamo come per il caso del moto lungo il piano inclinato il flusso  $Q$  attraverso una sezione  $z = cost$ . Ovviamente il flusso è costante su ogni sezione dal momento che la velocità non dipende da  $z$  dato da

$$Q = \int_{\Sigma} v d\sigma$$

dove  $\Sigma$  è una qualsiasi sezione del tubo. Si ha

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R v(r) r dr d\theta = 2\pi \int_0^R v(r) r dr.$$

Integrando per parti

$$Q = 2\pi \left[ v \frac{r^2}{2} \Big|_0^R - \int_0^R \frac{\partial v}{\partial r} \frac{r^2}{2} dr \right] = -\pi \int_s^R \frac{\partial v}{\partial r} r^2 dr.$$

Dalla (5.28) è facile osservare che

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{G}{2\mu}(s-r),$$

per cui

$$Q = \frac{\pi G}{2\mu} \int_s^R r^2 (r-s) dr = \frac{\pi G}{2\mu} \left[ \frac{r^4}{4} - \frac{sr^3}{3} \right] \Big|_s^R$$

e quindi

$$Q = \frac{\pi G}{8\mu} \left[ R^4 - s^4 - \frac{4}{3} s R^3 + \frac{4}{3} s^4 \right].$$

In conclusione possiamo scrivere

$$Q = \frac{\pi G R^4}{8\mu} \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{s}{R} \right)^4 - \frac{4}{3} \left( \frac{s}{R} \right) \right]. \quad (5.29)$$

A questo punto introduciamo la nuova variabile  $\xi = s/R$  e d osserviamo che

$$Q = U \pi R^2 \quad G = \frac{2\tau_o}{\xi R},$$

dove  $U$  è la velocità di immissione all'ingresso del canale. Sostituendo nella (5.29) troviamo

$$U = \frac{\tau_o R}{4\mu \xi} \left[ 1 + \frac{1}{3} \xi^4 - \frac{4}{3} \xi \right]. \quad (5.30)$$

Introduciamo il *numero di Bingham*

$$\text{Bn} = \frac{\tau_o R}{\mu U},$$

che rappresenta il rapporto fra lo sforzo di soglia e lo stress caratteristico viscoso. L'equazione (5.31) diventa

$$4\xi = \text{Bn} \left[ 1 + \frac{1}{3} \xi^4 - \frac{4}{3} \xi \right]. \quad (5.31)$$

e, dopo qualche calcolo, si ottiene

$$\xi^4 - 4\xi \left( 1 + \frac{3}{\text{Bn}} \right) + 3 = 0. \quad (5.32)$$

La (5.33) prende il nome di *equazione di Buckingham*. Ponendo

$$f(\xi) = \xi^4 - 4\xi \left( 1 + \frac{3}{\text{Bn}} \right) + 3. \quad (5.33)$$

si osserva facilmente che

$$f(0) = 3 \quad f(1) = -\frac{12}{\text{Bn}} \quad f'(\xi) = 4(\xi^3 - 1) - \frac{12}{\text{Bn}} < 0 \quad \xi \in [0, 1],$$

per cui esiste un'unica soluzione  $\xi^* = \xi^*(\text{Bn}) \in (0, 1)$  per ogni  $\text{Bn} > 0$ . Questo significa che per ogni  $\text{Bn}$ , ossia per ogni valore del flusso  $Q = U \pi R^2$ , esiste una unica soluzione dell'equazione di Buckingham. Quindi, qualunque sia il flusso assegnato trovo sempre una soluzione per la superficie di separazione liquido/rigido.

## 5.6 Fluido di Bingham fra cilindri concentrici

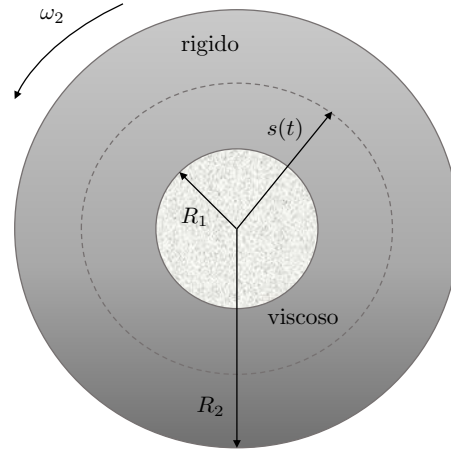


Figura 5.7. Fluido di Bingham fra cilindri concentrici

Consideriamo adesso un fluido di Bingham posto fra due cilindri concentrici di raggi  $R_1 < R_2$ . Supponiamo che il cilindro interno sia fermo, mentre quello esterno venga fatto ruotare con velocità angolare  $\omega_2$  (supposta per semplicità costante ed indipendente dal tempo). Il moto è piano e verrà descritto mediante coordinate polari.

**Osservazione 2** *In coordinate polari piane le equazioni di continuità e di moto per un campo di velocità e pressione*

$$\mathbf{v} = v(r, \theta, t)\mathbf{e}_r + u(r, \theta, t)\mathbf{e}_\theta \quad p = p(r, \theta, t),$$

sono date da

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u) = 0, \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{S_{\theta\theta}}{r} \\ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\theta\theta}}{\partial \theta} \end{array} \right. \quad (5.34)$$

Nel caso specifico considerato, data la simmetria del problema, ha senso supporre che il campo di velocità e quello di pressione abbiano la forma

$$\mathbf{v} = u(r)\mathbf{e}_\theta \quad p = p(r). \quad (5.35)$$

Introduciamo inoltre la velocità angolare

$$\omega(r) = \frac{u(r)}{r}.$$

Con un campo di velocità siffatto l'unica componente dello shear è quella diretta lungo  $\mathbf{e}_\theta$  e tangente alle superfici  $r = cost$  (tutte le altre componenti sono nulle), ossia

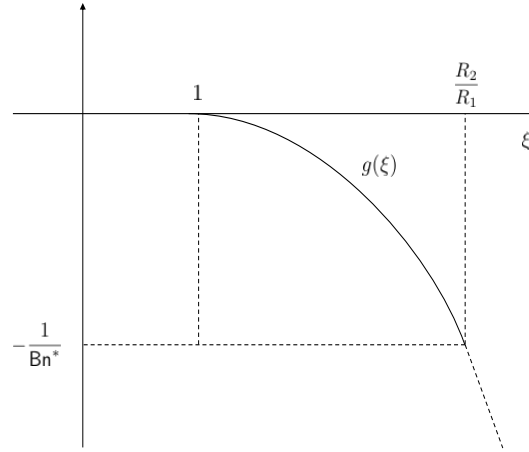
$$S_{r\theta} = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{u}{r} \right) + \tau_o = \mu r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \tau_o.$$

Questa relazione per  $S_{r\theta}$  si trova utilizzando l'equazione (5.7) riscritta in coordinate cilindriche per il campo di velocità (??). In questo caso prendiamo il segno positivo per  $\tau_o$  poiché ci aspettiamo che la velocità angolare  $\omega$  passi da 0 sul cilindro interno a  $\omega_2$  su quello esterno. Con un campo di velocità e pressione della forma (??) le equazioni (??) si riducono a

$$\begin{cases} -\rho \frac{u^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r}, \\ 0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{u}{r} \right) + \tau_o \right) \right]. \end{cases} \quad (5.36)$$

L'equazione di continuità è anche in questo caso automaticamente soddisfatta. Ipotizziamo, al solito, che esista una superficie  $r = s$  che separa la parte sopra soglia da quella sotto soglia. Lo sforzo sarà massimo sul cilindro interno che non ruota, per cui ci aspettiamo che la regione fluida sia adiacente al cilindro interno, mentre quella rigida sia adiacente al cilindro esterno, come mostrato in Fig. ??.

Si trova



**Figura 5.8.** Fluido di Bingham fra cilindri concentrici

$$r^2 \left( \mu r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \tau_o \right) = c,$$

con  $c$  costante positiva da determinare. Dal momento che  $\omega_r(s) = 0$  troviamo

$$c = s^2 \tau_o.$$

Di conseguenza

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{\tau_o}{\mu} \left[ \frac{s^2}{r^3} - \frac{1}{r} \right].$$

Integrando tra  $r$  e  $s$  con la condizione  $\omega(s) = \omega_2$  si trova

$$\omega_2 - \omega(r) = \frac{\tau_o}{\mu} \left[ -\frac{s^2}{2\zeta^2} - \ln \zeta \right] \Big|_r^s$$

che fornisce

$$\omega(r) = \omega_2 + \frac{\tau_o}{\mu} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{s^2}{r^2} \right) + \ln \left( \frac{s}{r} \right) \right].$$

Per determinare la posizione di  $s$  imponiamo  $\omega(R_1) = 0$  cosicché

$$\omega_2 + \frac{\tau_o}{\mu} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{s^2}{R_1^2} \right) + \ln \left( \frac{s}{R_1} \right) \right] = 0$$

che fornisce una equazione per  $s$  in forma implicita. Poniamo

$$\xi = \frac{s}{R_1} \quad g(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2) + \ln \xi$$

Per determinare  $s$  dobbiamo risolvere l'equazione

$$g(\xi) = -\frac{\omega_2 \mu}{\tau_o} = -\frac{U \mu}{R_2 \tau_o} = -\frac{1}{\text{Bn}}, \quad (5.37)$$

dove  $U$  è la velocità lineare in  $R_2$  e  $\text{Bn}$  è nuovamente il numero di Bingham. La funzione  $g$  è definita in  $[1, R_2/R_1]$  ed inoltre

$$g(1) = 0 \quad g'(\xi) = \frac{1 - \xi^2}{\xi} < 0 \quad \text{per } \xi > 1.$$

Poniamo

$$-\frac{1}{\text{Bn}^*} = g\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

cosicché l'immagine di  $g$  risulti  $[-\text{Bn}^{*-1}, 0]$ , come mostrato in Fig. ???. Risulta evidente che se

$$\text{Bn} < \text{Bn}^* \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{\text{Bn}} < -\frac{1}{\text{Bn}^*}$$

la soluzione  $\xi$  dell'equazione (??) è maggiore del limite  $R_2/R_1$  per cui non esiste regione rigida (il valore di soglia per lo stress è superato ovunque). Osservando che

$$\text{Bn} = \frac{\tau_o R_2}{\mu U} \quad \text{Bn}^* = \frac{\tau_o R_2}{\mu U^*}$$

dire  $\text{Bn} < \text{Bn}^*$  significa considerare una velocità lineare  $U > U^*$  (o analogamente una velocità angolare  $\omega > \omega^*$ ) che produce uno stress ovunque superiore alla soglia  $\tau_o$ . Se viceversa  $\text{Bn} > \text{Bn}^*$  allora siamo sicuri che la fase solida è presente poiché la soluzione di (??) appartiene all'intervallo  $(1, R_2/R_1)$ . Dal momento che

$$\text{Bn}^* = -\frac{1}{g\left(\frac{R_2}{R_1}\right)},$$

possiamo affermare che la fase rigida esiste solamente se

$$\text{Bn} > -\frac{1}{g\left(\frac{R_2}{R_1}\right)},$$

che corrisponde a

$$\omega_2 < \frac{-\tau_o g(R_2/R_1)}{\mu}.$$

In conclusione possiamo affermare che esiste un limite per la velocità angolare  $\omega_2$  oltre il quale lo stress è ovunque superiore al valore di soglia e la fase rigida non è presente.





## Modelli per la dinamica dei ghiacciai

In questo capitolo ci occupiamo della descrizione della dinamica dei ghiacciai. I ghiacciai possono essere considerati come enormi fiumi che scorrono lentamente. Sebbene sia naturale identificarli come dei solidi rigidi, in realtà possono esibire deformazioni dovute alle dislocazioni dei cristalli da cui sono formati. In pratica i ghiacciai possono essere considerati come fluidi in cui la viscosità è molto grande (6 bar per anno), addirittura tre ordini di grandezza più grande di quella dell'acqua. A causa dell'enorme viscosità i ghiacciai si muovono molto lentamente. Una velocità tipica per un ghiacciaio rientra nel range di 10-100 metri per anno. Le profondità sono dell'ordine delle centinaia di metri e le larghezze dell'ordine dei chilometri, mentre le lunghezze possono essere anche dell'ordine delle decine di chilometri.

Un'altra caratteristica di cui tener conto nella modellizzazione dei ghiacciai è la temperatura. Il ghiaccio infatti può raggiungere la temperatura di scioglimento sulla base su cui poggia per varie ragioni: attrito col terreno, sorgenti geotermali ecc. Le conseguenze della non costanza della temperatura possono essere importanti, si pensi alla impossibilità dell'imposizione delle no-slip condition per via dello strato di acqua disciolta che si forma, o alla variazione della viscosità dovuta al gradiente termico. Per queste ragioni, un modello per la dinamica di evoluzione di un ghiacciaio deve tenere conto anche dell'evoluzione del campo termico.

### 6.1 Il modello non isoterma

Per descrivere la dinamica di un ghiacciaio cominciamo con lo scrivere le equazioni di moto di un mezzo continuo incomprimibile. Per adesso non facciamo alcuna ipotesi sul tipo di equazione costitutiva. Decomponiamo, sulla falsariga di quanto visto per i fluidi di Bingham, il tensore degli sforzi nella sua parte deviatorica e sferica

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}.$$

Le equazioni di bilancio della massa e della quantità di moto diventano:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{S} + \rho \mathbf{f}, \end{cases} \quad (6.1)$$

A queste equazioni dobbiamo aggiungere quella dell'energia che regola l'evoluzione del campo termico. Con riferimento alla notazione utilizzata per la meccanica dei continui definiamo l'energia

interna di una porzione materiale di dominio  $\Omega_t$

$$E(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \rho e(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

dove  $e(\mathbf{x}, t)$  è l'energia interna specifica (energia per unità di massa). Supponiamo che il calore possa essere generato o assorbito internamente a  $\Omega_t$  mediante una sorgente la cui densità sia data da  $r(\mathbf{x}, t)$ . Supponiamo inoltre che il calore possa essere scambiato attraverso il bordo  $\partial\Omega_t$  e chiamiamo  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$  il flusso di calore in un punto  $\mathbf{x}$  del bordo al tempo  $t$ . In pratica  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$  rappresenta l'energia per unità di superficie e per unità di tempo che fluisce attraverso una porzione infinitesima di superficie  $d\sigma$ . Il primo principio della termodinamica afferma che

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega_t} r(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Omega_t} \mathbf{S} : \mathbf{D} d\mathbf{x}$$

dove

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$$

è la parte simmetrica del tensore velocità di deformazione ed  $\mathbf{S}$  è la parte del tensore a traccia nulla. Il prodotto tensoriale si calcola come

$$\mathbf{S} : \mathbf{D} = \sum_{i,j=1}^3 S_{ij} D_{ij}.$$

e rappresenta l'energia dissipata. Supponiamo che non esistano sorgenti di calore all'interno del dominio, ossia  $r = 0$  e assumiamo che il flusso sia dato dalla legge di Fourier

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -k \nabla T(\mathbf{x}, t)$$

dove  $k$  (supposta per semplicità costante) è la conducibilità termica e  $T(\mathbf{x}, t)$  rappresenta il campo termico. La densità di energia interna può essere scritta come

$$e(\mathbf{x}, t) = cT(\mathbf{x}, t),$$

dove  $c$  è la capacità termica (supposta anch'essa costante). Si ha

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega_t} \rho c T d\mathbf{x} \right] = \int_{\partial\Omega_t} k \nabla T \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Omega_t} \mathbf{S} : \mathbf{D} d\mathbf{x}$$

Ricordando il teorema del trasporto di Reynolds troviamo che

$$\rho c \int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} (T \mathbf{v}) \right] d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \left[ \operatorname{div} (k \nabla T) + \mathbf{S} : \mathbf{D} \right] d\mathbf{x}.$$

Per cui, ricordando che  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  e che la scelta del dominio  $\Omega_t$  è arbitraria, otteniamo

$$\rho c \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} (T \mathbf{v}) \right] = k \Delta T + \mathbf{S} : \mathbf{D}. \quad (6.2)$$

**Osservazione 3** Notiamo che in assenza di moto, ossia per  $\mathbf{v} = 0$  e  $\mathbf{D} = 0$ , la (6.2) si riduce all'equazione del calore (1.2).

Il sistema di equazioni da risolvere diventa dunque

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{S} + \rho \mathbf{f}, \\ \rho c \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} (T \mathbf{v}) \right] = k \Delta T + \mathbf{S} : \mathbf{D}. \end{cases} \quad (6.3)$$

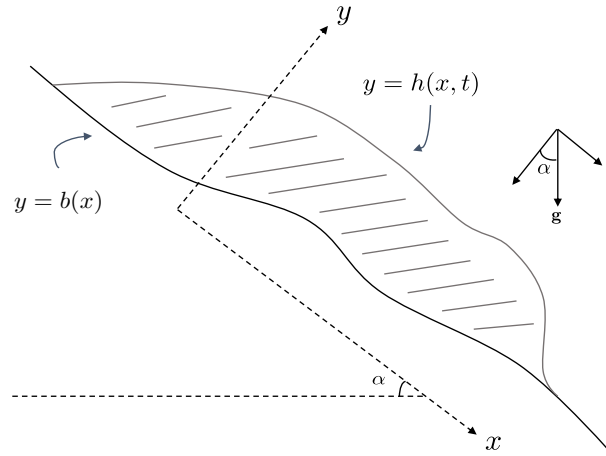
Sperimentalmente si è osservato che nel ghiaccio l'equazione costitutiva è la cosiddetta equazione di Glenn

$$\mathbf{D} = A(T) \tau^{n-1} \mathbf{S} \quad (6.4)$$

dove  $n$  è un parametro e

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}}.$$

Il coefficiente  $A(T)$  è un termine che può variare anche di tre ordini di grandezza nei range di temperatura tipici dei ghiacciai. Le sue dimensioni, nel caso  $n = 1$  sono quelle dell'inverso di una viscosità.



**Figura 6.1.** Schema di un ghiacciaio in movimento lungo una superficie inclinata.

## 6.2 Il caso bidimensionale

Consideriamo una situazione come quella rappresentata in Fig. 6.1. La superficie  $y = h(x, t)$  rappresenta la superficie superiore del ghiacciaio, mentre  $y = b(x)$  quella su cui il ghiacciaio poggia. Supponiamo che il campo di velocità abbia la forma

$$\mathbf{v}(x, y, t) = u(x, y, t) \mathbf{e}_1 + v(x, y, t) \mathbf{e}_2$$

Le componenti delle forze di massa (gravità) nel sistema di riferimento indicato in figura sono

$$\rho \mathbf{f} = (\rho g \sin \alpha) \mathbf{e}_1 - (\rho g \cos \alpha) \mathbf{e}_2$$

Il sistema (6.3) diventa

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial S_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S_{12}}{\partial y} + \rho g \sin \alpha \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x} + \frac{\partial S_{22}}{\partial y} - \rho g \cos \alpha \\ \rho c \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = k \Delta T + S_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + S_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + S_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right. \quad (6.5)$$

A questo problema vanno aggiunte le condizioni al bordo sulla frontiera libera  $y = h$  e sulla base  $y = b$ . Su quest'ultima in particolare supponiamo di conoscere la velocità longitudinale  $u_b(x, t)$

$$u(x, b, t) = u_b(x, t). \quad (6.6)$$

Inoltre imponiamo la condizione di non penetrabilità

$$\mathbf{v}(x, b, t) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (6.7)$$

dove

$$\mathbf{n} = \frac{(-b_x, 1)}{\sqrt{1 + b_x^2}}$$

è la normale alla superficie  $y = b(x)$ . La condizione (6.7) diventa

$$v_b(x, t) = v(x, b, t) = u_b(x, t) \frac{\partial b}{\partial x}. \quad (6.8)$$

Se imponiamo che su  $y = h(x, t)$  non ci sia stress tangenziale (l'aria esercita uno "shear" trascurabile) e che l'unica forza che agisce sia la pressione atmosferica  $p_a$  (stress normale, che per semplicità riscaliamo a zero) scriviamo

$$\mathbf{T} \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{n} = \frac{(-h_x, 1)}{\sqrt{1 + h_x^2}}. \quad (6.9)$$

dove  $\mathbf{n}$  questa volta rappresenta la normale esterna alla superficie  $y = h$ . Dalla relazione (6.9) si ha

$$\begin{pmatrix} -p + S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & -p + S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h_x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che porta a

$$\begin{cases} h_x(p - S_{11}) + S_{12} = 0 \\ h_x S_{12} + (p - S_{22}) = 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

Osserviamo inoltre che la superficie  $y = h(x, t)$  è una superficie materiale, per cui i punti appartenenti ad essa si muovono con la stessa velocità delle particelle che la compongono. Indicando con  $(x(t), y(t))$  una particella che appartiene alla superficie  $y = h$  si ha

$$y(t) = h(x(t), t).$$

Derivando e ricordando che  $\dot{x} = u$ ,  $\dot{y} = v$  si trova

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u(x, h, t) \frac{\partial h}{\partial x} = v(x, h, t) \quad (6.11)$$

Se ipotizziamo che sulla superficie  $y = h$  si possa accumulare (nevica) o rimuovere (ablazione dovuta al vento) del materiale allora modifichiamo la (6.11) in

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u(x, h, t) \frac{\partial h}{\partial x} - a = v(x, h, t) \quad (6.12)$$

dove la costante  $a > 0$  rappresenta il caso con accumulo, mentre  $a < 0$  rappresenta il caso con ablazione. Il flusso ad una sezione fissata  $x$  può essere scritto come

$$Q = \int_b^h u(x, y, t) dy.$$

Definiamo lo spessore dello strato del ghiacciaio  $Z = h - b$ . E' facile osservare che

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial h}{\partial t}, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= u \Big|_h \frac{\partial h}{\partial x} - u \Big|_b \frac{\partial b}{\partial x} + \int_b^h u_x(x, y, t) dy. \end{aligned}$$

Ricordando che  $u_x = -v_y$  si trova facilmente che

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = u \Big|_h \frac{\partial h}{\partial x} - u \Big|_b \frac{\partial b}{\partial x} - v \Big|_h + v \Big|_b.$$

Di conseguenza, dalle (6.8), (6.12) si trova che

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = a. \quad (6.13)$$

La (6.13) è un altro modo per scrivere il bilancio di massa.

### 6.3 Le condizioni al contorno per il campo termico

Per scrivere le condizioni al contorno per la temperatura consideriamo la base su cui poggia il ghiacciaio  $y = b(x)$ . Il flusso di calore è dato da

$$\mathbf{q} = -k \nabla T d\sigma.$$

Se supponiamo che del calore fluisca dalla terra verso il ghiacciaio (flusso geotermico) scriveremo

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -k \nabla T \cdot \mathbf{n} = -k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = G > 0, \quad (6.14)$$

dove supponiamo che  $G$  sia costante per semplicità. Se la terra fosse più fredda del ghiaccio allora il calore fluirebbe dal ghiacciaio verso la terra e  $G < 0$ . Quando la temperatura alla base è minore di quella di scioglimento del ghiaccio  $T_m$  è ragionevole supporre che la velocità del ghiacciaio alla base sia nulla, ossia  $u = 0$  per  $y = b$ . Quando invece  $T \geq T_m$  ha senso supporre che ci sia uno strato liquido in cui il ghiaccio si è sciolto e sia presente una velocità di scivolamento  $u_b$  non nulla. In questo caso al bilancio energetico (6.14) dobbiamo aggiungere un termine che rappresenta la produzione di calore dovuto all'attrito. Scriveremo pertanto

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -k \nabla T \cdot \mathbf{n} = -k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = G + \tau_b u_b. \quad (6.15)$$

dove  $\tau_b$  è la norma dello stress calcolata sulla base  $y = b(x)$ . Unendo (6.14) con (6.15) possiamo scrivere che su  $y = b$

$$-k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = G + \mathcal{H}(T - T_m) \tau_b u_b, \quad (6.16)$$

dove  $\mathcal{H}$  è la funzione di Heaviside

$$\mathcal{H}(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \geq 0 \\ 0 & \theta < 0 \end{cases} \quad (6.17)$$

Ovviamente la (6.16) ha senso fino a che lo spessore in cui  $T \geq T_m$  è sufficientemente piccolo (boundary layer). L'altra condizione da imporre è quella sulla superficie  $y = h$  dove assumiamo

$$T = T_{amb} < T_m, \quad (6.18)$$

dove  $T_{amb}$  è la temperatura ambiente supposta inferiore al punto di scioglimento. Quando consideriamo anche l'evoluzione della temperatura dobbiamo dunque considerare la velocità di scivolamento sulla base come dipendente dalla temperatura alla base, ossia dobbiamo rimpiazzare  $u_b(x, t)$  con

$$\mathcal{H}(T - T_m) u_b(x, t)$$

## 6.4 Dinamica di scivolamento

Adesso supponiamo che l'altezza caratteristica  $H$  del ghiacciaio sia molto piccola rispetto alla sua lunghezza caratteristica  $L$ , ipotesi plausibile se si pensa che tipicamente  $H = 100 \text{ mt}$  e  $L = 10 \text{ Km}$ . In questo caso possiamo introdurre il parametro

$$\varepsilon = \frac{H}{L} = O(10^{-2}).$$

Riscaldiamo il sistema con le seguenti variabili adimensionali:

$$\begin{aligned} x &= L\tilde{x} & y &= H\tilde{y} & u &= U\tilde{u} & v &= \varepsilon U\tilde{v} & h &= H\tilde{h} & b &= H\tilde{b} \\ t &= \left(\frac{L}{U}\right)\tilde{t} & p &= P_c\tilde{p} & \tau &= S_c\tilde{\tau} & S_{12} &= S_c\tilde{S}_{12} \\ S_{11} &= (\varepsilon S_c)\tilde{S}_{11} & S_{22} &= (\varepsilon S_c)\tilde{S}_{22} & T &= T_m\tilde{T} & A &= A_c\tilde{A}(\tilde{T}), \end{aligned}$$

dove  $S_c$  è lo stress tangenziale caratteristico,  $P_c$  è la pressione caratteristica,  $T_m$  è la temperatura di scioglimento e  $U$  è la velocità caratteristica del ghiacciaio. Dato che la forza che trascina il ghiacciaio è la gravità ha senso selezionare

$$S_c = \rho g H \sin \alpha \quad (6.19)$$

e dato che lo stress normale è dato dalla pressione è altrettanto ragionevole supporre che

$$P_c = \varepsilon S_c = \varepsilon \rho g H \sin \alpha. \quad (6.20)$$

L'equazione costitutiva (6.4) diventa

$$\left( \frac{U}{2HA_c S_c^n} \right) \begin{bmatrix} 2\varepsilon \tilde{u}_x & \tilde{u}_y + \varepsilon^2 \tilde{v}_x \\ \tilde{u}_y + \varepsilon^2 \tilde{v}_x & 2\varepsilon \tilde{v}_y \end{bmatrix} = \tilde{A}(\tilde{T}) \tilde{\tau}^{n-1} \begin{bmatrix} \varepsilon \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12} & \varepsilon \tilde{S}_{22} \end{bmatrix}$$

con

$$\tau^2 = \frac{\varepsilon^2}{2} (\tilde{S}_{11}^2 + \tilde{S}_{22}^2) + \tilde{S}_{12}^2$$

Ricordando che  $\tilde{S}_{11} = -\tilde{S}_{22}$  (la traccia di  $\tilde{\mathbf{S}}$  deve essere nulla) e ponendo

$$\left( \frac{U}{2HA_c S_c^n} \right) = 1,$$

si ottiene che

$$\begin{cases} 2\tilde{u}_x = -2\tilde{v}_y = \tilde{A}(\tilde{T}) \left( \varepsilon^2 \tilde{S}_{11}^2 + \tilde{S}_{12}^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \tilde{S}_{11} \\ \tilde{u}_y + \varepsilon^2 \tilde{v}_x = \tilde{A}(\tilde{T}) \left( \varepsilon^2 \tilde{S}_{11}^2 + \tilde{S}_{12}^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \tilde{S}_{12} \end{cases} \quad (6.21)$$

L'equazione di bilancio di massa adimensionale è data da

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0.$$

Le equazioni di moto sono invece date da

$$\begin{cases} \left( \frac{\rho U^2}{L} \right) \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} = - \left( \frac{P_c}{L} \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \left( \frac{\varepsilon S_c}{L} \right) \frac{\partial \tilde{S}_{11}}{\partial \tilde{x}} + \left( \frac{S_c}{H} \right) \frac{\partial \tilde{S}_{12}}{\partial \tilde{y}} + \frac{S_c}{H}, \\ \left( \frac{\rho U^2 \varepsilon}{L} \right) \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = - \left( \frac{P_c}{H} \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \left( \frac{S_c}{L} \right) \frac{\partial \tilde{S}_{12}}{\partial \tilde{x}} + \left( \frac{\varepsilon S_c}{H} \right) \frac{\partial \tilde{S}_{22}}{\partial \tilde{y}} - \frac{P_c}{\varepsilon H} \cot \alpha, \end{cases} \quad (6.22)$$

dove  $d/d\tilde{t}$  rappresenta la derivata materiale. Ricordando la (6.20), ossia  $P_c = \varepsilon S_c$ , il sistema (6.22) può essere riscritto come

$$\begin{cases} \varepsilon \left( \frac{\rho U^2}{S_c} \right) \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} = -\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{S}_{11}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{S}_{12}}{\partial \tilde{y}} + 1, \\ \varepsilon \left( \frac{\rho U^2}{S_c} \right) \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{S}_{12}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{S}_{22}}{\partial \tilde{y}} - \frac{\cot \alpha}{\varepsilon}, \end{cases} \quad (6.23)$$

Il numero

$$\Theta =: \frac{\rho U^2}{S_c}$$

rappresenta il rapporto fra le forze inerziali e quelle di shear dovute al fluire del ghiacciaio. Se supponiamo che queste forze siano bilanciate allora ha senso considerare  $\Theta = O(1)$ . Le condizioni (6.10) diventano

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \tilde{h}_x (\tilde{p} - \tilde{S}_{11}) + \tilde{S}_{12} = 0 \\ \tilde{h}_x \tilde{S}_{12} + (\tilde{p} - \tilde{S}_{22}) = 0 \end{cases} \quad (6.24)$$

che valgono ovviamente su  $\tilde{y} = \tilde{h}$ . Introduciamo la pressione modificata

$$-\tilde{\pi} = -\tilde{p} + (\tilde{h} - \tilde{y}) \frac{\cot \alpha}{\varepsilon} \quad (6.25)$$

che implica

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = -\gamma \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial \tilde{x}} \quad \gamma = \varepsilon \cot \alpha. \quad (6.26)$$

$$-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} - \frac{\cot \alpha}{\varepsilon} = -\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial \tilde{y}} \quad (6.27)$$

Ovviamente  $\tilde{p}$  e  $\tilde{\pi}$  sono uguali su  $\tilde{y} = \tilde{h}$ . Supponiamo che  $\cot \alpha = O(1)$ , ossia che l'angolo  $\alpha$  sia abbastanza piccolo. Tipicamente  $\cot \alpha = 10$  mentre  $\varepsilon = 10^{-2}$  per cui  $\gamma = 10^{-1}$  e dunque non trascurabile. Trascurando i termini  $O(\varepsilon)$ , ossia focalizzandoci sull'ordine zero della espansione asintotica, troviamo (trascuriamo i tilde per semplicità)

$$\begin{cases} u_x + u_y = 0 \\ 0 = \frac{\partial S_{12}}{\partial y} + 1 - \gamma \frac{\partial h}{\partial x} \\ 0 = -\frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x} - \frac{\partial S_{11}}{\partial y} \end{cases} \quad (6.28)$$

Le condizioni su  $y = h$  invece diventano

$$\begin{cases} S_{12}|_h = 0 \\ (\pi - S_{22})|_h = 0 \end{cases} \quad (6.29)$$

Le relazioni costitutive (6.21) invece diventano

$$\begin{cases} 2u_x = -2v_y = A(T)|S_{12}|^{n-1} S_{11} \\ u_y = A(T)|S_{12}|^{n-1} S_{12} \end{cases} \quad (6.30)$$

Integrando la (6.28)<sub>2</sub> fra  $y$  e  $h$  troviamo

$$\int_y^h \frac{\partial S_{12}}{\partial y} dy = -S_{12} = -\left(1 - \gamma \frac{\partial h}{\partial x}\right) (h - y)$$

per cui



$$S_{12} = \left(1 - \gamma \frac{\partial h}{\partial x}\right) (h - y).$$

Dalla (6.30)<sub>2</sub> troviamo che

$$u_y = A(T) \left|1 - \gamma \frac{\partial h}{\partial x}\right|^{n-1} \left(1 - \gamma \frac{\partial h}{\partial x}\right) (h - y)^n$$

Integrando tra  $b$  e  $y$  troviamo

$$u = \mathcal{H}(T - 1)u_b + \left|1 - \gamma \frac{\partial h}{\partial x}\right|^{n-1} \left(1 - \gamma \frac{\partial h}{\partial x}\right) \int_b^y A(T)(h - \eta)^n d\eta \quad (6.31)$$

La versione riscaldata di (6.13) è

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \theta \quad \theta = \frac{aL}{UH} \quad (6.32)$$

dove  $\theta$  rappresenta il coefficiente di accumulo/rimozione adimensionale. Dalla (6.31) è facile vedere che

$$Q = \mathcal{H}(T - 1)u_b Z + \left|1 - \gamma \frac{\partial h}{\partial x}\right|^{n-1} \left(1 - \gamma \frac{\partial h}{\partial x}\right) \int_b^h dy \int_b^y A(T)(h - \eta)^n d\eta \quad (6.33)$$

Quindi l'equazione da risolvere è la (6.32) accoppiata al problema per il campo termico.

**Osservazione 4** *Supponiamo che la temperatura sia fissata e maggiore della temperatura di scioglimento. In questo caso  $A = 1$  e  $\mathcal{H}(T - 1) = 1$ . Inoltre, l'integrale che appare in  $Q$  può essere risolto. infatti si vede facilmente che*

$$Q = u_b Z - \left|1 - \gamma \frac{\partial h}{\partial x}\right|^{n-1} \left(1 - \gamma \frac{\partial h}{\partial x}\right) \int_b^h \left[ \frac{(h - y)^{n+1} - Z^{n+1}}{(n + 1)} \right] dy,$$

che dopo alcuni calcoli diventa

$$Q = u_b Z - \left|1 - \gamma \frac{\partial h}{\partial x}\right|^{n-1} \left(1 - \gamma \frac{\partial h}{\partial x}\right) \frac{Z^{n+2}}{n + 2}.$$

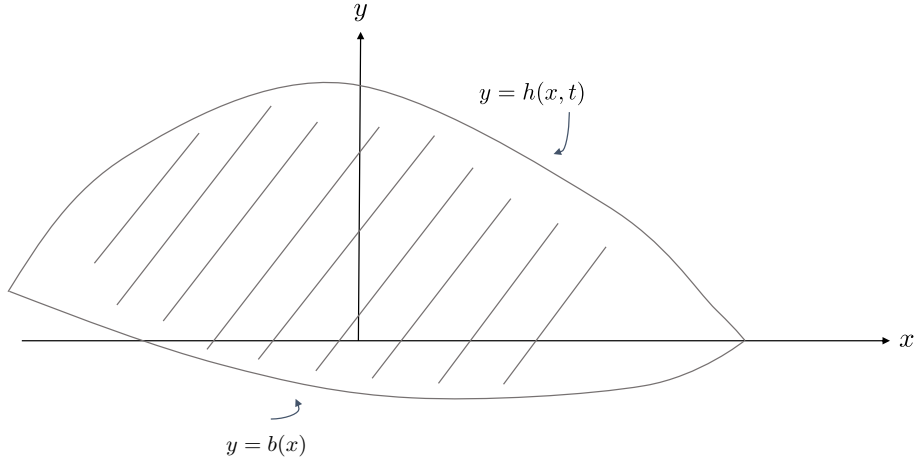
Osservando che  $Z_x = h_x - b_x$  si vede che l'equazione da risolvere è data da

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ u_b Z - \left|1 - \gamma Z_x - \gamma b_x\right|^{n-1} (1 - \gamma Z_x - \gamma b_x) \frac{Z^{n+2}}{n + 2} \right] = \theta \quad (6.34)$$

Notiamo che l'equazione (6.34) è una equazione di diffusione parabolica degenera. Infatti alle estremità del ghiacciaio  $Z = 0$ , cosicché il flusso ai margini risulta nullo. L'equazione 6.34 è ovviamente indipendente dal campo termico ed il problema per il profilo del ghiacciaio può essere risolto autonomamente.

## 6.5 Modello per la calotta glaciale

Consideriamo il caso in cui il piano non sia inclinato, ossia il caso in cui l'angolo  $\alpha$  sia nullo, vedi Fig. 6.2. In questo caso non possiamo utilizzare la riscaldatura per lo stress (6.19), poiché significherebbe



**Figura 6.2.** Sketch of the system

scegliere  $S_c = 0$ . Dal momento che in questo caso le equazioni per il bilancio del momento sono date da

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial S_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S_{12}}{\partial y} \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x} + \frac{\partial S_{22}}{\partial y} - \rho g \end{cases} \quad (6.35)$$

ha senso riscrivere lo stress e la pressione nel seguente modo:

$$S_c = \rho g H \varepsilon \quad P_c = \varepsilon S_c. \quad (6.36)$$

Procedendo come nel caso del piano inclinato si trova facilmente che

$$\begin{cases} \varepsilon \left( \frac{\rho U^2}{S_c} \right) \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} = -\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{S}_{11}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{S}_{12}}{\partial \tilde{y}}, \\ \varepsilon^3 \left( \frac{\rho U^2}{S_c} \right) \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{S}_{12}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{S}_{22}}{\partial \tilde{y}} - \frac{1}{\varepsilon^2}, \end{cases} \quad (6.37)$$

Manteniamo l'ipotesi  $\Theta = O(1)$  e introduciamo la pressione modificata

$$-\tilde{\pi} = -\tilde{p} + (h - y) \frac{1}{\varepsilon^2} \quad (6.38)$$

che implica

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = -\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial \tilde{y}}, \quad (6.39)$$

$$-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} - \frac{1}{\varepsilon^2} = -\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial \tilde{y}} \quad (6.40)$$

Ovviamente  $\tilde{p}$  e  $\tilde{\pi}$  sono uguali su  $\tilde{y} = \tilde{h}$ . Trascurando i termini  $O(\varepsilon)$  si trova (omettiamo nuovamente i tilde)

$$\begin{cases} u_x + u_y = 0 \\ 0 = \frac{\partial S_{12}}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} \\ 0 = -\frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x} - \frac{\partial S_{11}}{\partial y} \end{cases} \quad (6.41)$$

Le condizioni (6.29) e le relazioni costitutive (6.30) rimangono ovviamente le stesse anche se adesso  $U$  è diverso poiché  $S_c$  è diverso. In particolare  $U = 2HA_c S_c^n$  con  $S_c = \rho g H \varepsilon$ . La integrazione della (6.41)<sub>2</sub> porta a

$$-\int_y^h \frac{\partial S_{12}}{\partial y} dy = S_{12} = -\frac{\partial h}{\partial x}(h-y)$$

Di conseguenza

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -A(T) \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x} (h-y)^n$$

Integrando si trova che

$$u = \mathcal{H}(T-1)u_b - \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x} \int_b^y A(T)(h-\eta)^n d\eta$$

Il flusso diventa

$$Q = \mathcal{H}(T-1)u_b Z - \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x} \int_b^h dy \int_b^y A(T)(h-y)^n d\eta$$

Nel caso  $A = 1$  e  $u_b = 0$ , procedendo come nella sezione precedente si trova che

$$Q = - \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{Z^{n+2}}{n+2}$$

L'equazione di evoluzione per lo spessore diventa allora

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ -|Z_x + b_x|^{n-1} (Z_x + b_x) \frac{Z^{n+2}}{n+2} \right] = \theta \quad (6.42)$$

Notiamo che l'equazione (6.42) è nuovamente una equazione di diffusione parabolica degenera.

## 6.6 Il caso non isoterma per la calotta di ghiaccio con $A(T) = 1$ e $b = 0$

Consideriamo l'equazione per il campo termico dimensionale (6.5)<sub>4</sub>

$$\rho c \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = k \Delta T + S_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + S_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + S_{22} \frac{\partial v}{\partial y}$$

Imponiamo che la temperatura ambiente sia inferiore a quella dello scioglimento del ghiaccio  $T_m$

$$T(x, h, t) = T_{amb}(x, t) < T_m \quad (6.43)$$

Riscaldiamo la temperatura con  $T_m$  e, facendo riferimento alla riscalatura per  $S_c$  data dalla (6.36), possiamo riscrivere l'equazione per  $T$  nel seguente modo

$$\left(\frac{\rho c T_m U}{L}\right) \frac{d\tilde{T}}{d\tilde{t}} = \left(\frac{T_m k}{H^2}\right) [\varepsilon^2 \tilde{T}_{xx} + \tilde{T}_{yy}] + \left(\frac{S_c U}{H}\right) [\varepsilon^2 \tilde{u}_x \tilde{S}_{11} + \tilde{S}_{12}(\tilde{u}_y + \varepsilon^2 \tilde{v}_x) + \varepsilon^2 \tilde{v}_y \tilde{S}_{22}]$$

dove, al solito, i tilda rappresentano le varibili adimensionali. É facile osservare che, all'ordine zero, il problema si riduce a (omettiamo i tilda per semplicità)

$$\frac{dT}{dt} = \underbrace{\left(\frac{kL}{\rho c U H^2}\right) T_{yy}}_{=\beta} + \underbrace{\left(\frac{S_c L}{T_m \rho c H}\right) S_{12} u_y}_{=\alpha}$$

Osserviamo che  $\beta = Pe^{-1}$  dove  $Pe$  è il numero di Péclet. Ricordiamo che, nel caso della calotta di ghiaccio con coefficiente  $A = 1$ , si ha

$$u_y = |S_{12}|^{n-1} S_{12} \quad S_{12} = h_x (y - h)$$

cosicché l'equazione per il campo termico diventa

$$\frac{dT}{dt} = \beta T_{yy} + \alpha |h_x|^{n-1} h_x^2 (h - y)^{n+1}$$

La riscalatura della (6.16) porta a

$$-\nabla T \cdot \mathbf{n} = \underbrace{\left(\frac{GH}{kT_m}\right)}_{=\gamma} + \mathcal{H}(T - 1) |\tau| u_b \underbrace{\left(\frac{S_c U H}{kT_m}\right)}_{=\delta}$$

mentre la condizione su  $y = h$  è  $T = T_a$  dove  $T_a = T_{amb}/T_m < 1$ . Se consideriamo il caso stazionario e supponiamo che la base sia piatta  $b = 0$ , troviamo che il problema da risolvere è il seguente

$$\begin{cases} \beta T_{yy} = -\alpha |h_x|^{n-1} h_x^2 (h - y)^{n+1} & y \in [0, h] \\ -T_y = \gamma + \mathcal{H}(T - 1) |h_x| h u_b & y = 0 \\ T = T_a & y = h \end{cases} \quad (6.44)$$

Integrando la (6.44) due volte si trova

$$\beta T = -\alpha |h_x|^{n-1} h_x^2 \frac{(h - y)^{n+3}}{(n + 2)(n + 3)} + cy + d$$

dove  $c = c(x, t)$  e  $d = d(x, t)$  sono incognite. Si trova facilmente che  $\beta T_a = ch + d$  per cui

$$\beta T = -\alpha |h_x|^{n-1} h_x^2 \frac{(h - y)^{n+3}}{(n + 2)(n + 3)} + c(y - h) + \beta T_a. \quad (6.45)$$

$$\beta T_y = \alpha |h_x|^{n-1} h_x^2 \frac{(h - y)^{n+2}}{(n + 2)} + c.$$

Imponendo la (6.44)<sub>2</sub> si trova allora

$$\beta \left[ -\gamma - \mathcal{H}(T-1)|h_x|hu_b \right] = \alpha|h_x|^{n-1}h_x^2 \frac{h^{n+2}}{(n+2)} + c$$

per cui

$$c = \beta \left[ -\gamma - \mathcal{H}(T-1)|h_x|hu_b \right] = \alpha|h_x|^{n-1}h_x^2 \frac{h^{n+2}}{(n+2)} - \alpha|h_x|^{n-1}h_x^2 \frac{h^{n+2}}{(n+2)}$$

Sostituendo  $c$  nella (6.45) si trova l'espressione del campo termico nel ghiacciaio. Questa situazione è una delle poche in cui è possibile determinare una espressione esplicita del campo termico. Nella maggior parte dei casi il problema deve essere risolto per via numerica.



## Tremori vulcanici

Nelle settimane precedenti ad una eruzione i vulcani possono produrre dei tremori (vibrazioni) con una frequenza che solitamente varia tra gli 0.5 e i 2 Hertz. Il tremore vulcanico consiste in un segnale emesso dai fluidi che circolano all'interno del sistema di alimentazione. In alcuni vulcani, a causa della loro persistente attività, tali tremori sono prodotti in maniera continuativa. In questi casi, la variazione della frequenza di vibrazione può rappresentare un utile indicatore di cambiamenti imminenti dell'attività vulcanica come le cosiddette fontane di lava. A volte questi episodi possono avvenire anche con cadenza regolare, su scale temporali dell'ordine di ore o giorni. Il tracciato sismico consente il monitoraggio dell'evoluzione di questi fenomeni. L'innescò di una fontana di lava mette infatti in gioco una rilevante quantità di fluidi magmatici, in grado di causare un temporaneo e vistoso incremento dell'ampiezza del tremore.

La causa esatta dell'insorgenza di questi tremori è attualmente oggetto di dibattito nella comunità scientifica. Una ipotesi plausibile è che essi siano generati dall'oscillazione di bolle di vapore confinate nelle cavità dei bacini idrotermali che circondano il vulcano stesso. Le rocce presenti nel sistema vulcanico infatti presentano tipicamente delle fratture la cui larghezza è dell'ordine dei millimetri e la cui lunghezza varia da qualche centimetro a qualche metro. Le bolle che si formano in queste fratture oscillano a causa dei forti gradienti termici presenti producendo i segnali che sono poi registrati dalle stazioni di rilevamento.

Al fine di modellizzare i tremori vulcanici possiamo cercare di riprodurre il fenomeno in laboratorio utilizzando un sistema sperimentale che riproduca la dinamica delle bolle e sviluppando un modello matematico che ne descriva quantitativamente l'evoluzione. A questo scopo consideriamo un apparato costituito da un tubo capillare riempito d'acqua pura riscaldato dal basso. Quando l'acqua raggiunge la temperatura di ebollizione osserviamo la formazione di una bolla di vapore che comincia a crescere fino a raggiungere una configurazione stabile attorno alla quale si cominciano ad osservare piccole oscillazioni. Noi modelleremo esattamente queste oscillazioni e calcoleremo mediante il modello le frequenze di oscillazione. Il modello sviluppato per il tubo capillare è di importanza fondamentale dal momento che risulta impossibile effettuare esperimenti controllati sul campo. Anche se esso è formulato e validato su un'apparecchiatura sperimentale, fornisce informazioni che possono essere utilizzate per la predizione dei fenomeni su scala reale.

### 7.1 Il modello matematico

Consideriamo il sistema schematizzato in Fig. 7.1 che riproduce con un tubo capillare quello che succede in una frattura della roccia dell'area vulcanica. Focalizziamoci sullo stadio "oscillatorio",

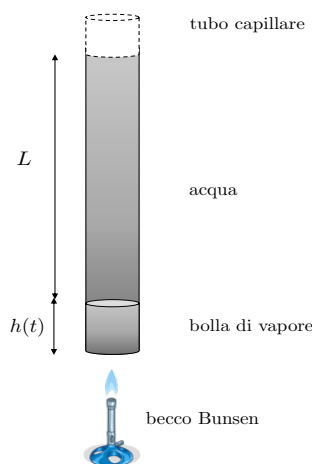


Figura 7.1. Schema dell'apparato sperimentale

cosicché il tempo  $t = 0$  sia quello in cui si è formata la bolla. Indichiamo con  $L$  l'altezza della colonna d'acqua e con  $y$  la coordinata verticale del sistema che punta verso l'alto. La posizione  $y = 0$  rappresenta la base del tubo capillare al tempo e  $y = h(t)$  rappresenta l'altezza della bolla al tempo  $t$ . Assumiamo che nella fase gassosa  $y \in [0, h]$  le variabili termodinamiche (pressione, densità e temperatura) non dipendano da  $y$  e trattiamo la colonna d'acqua  $[h, h + L]$  come un corpo rigido che si muove con velocità uniforme.

Il modello che sviluppiamo simula l'oscillazione della colonna d'acqua per via dell'espansione e contrazione della bolla. Infatti la bolla di vapore scaldandosi aumenta il suo volume ed esercita una pressione sulla colonna d'acqua spostandola verso l'alto. Quando questa pressione bilancia la forza esercitata dalla colonna d'acqua più la pressione atmosferica, la bolla smette di espandersi e comincia a contrarsi riducendo il suo volume e innalzando la sua pressione. Quando la pressione della bolla diventa nuovamente più grande di quella esercitata dalla colonna, la bolla riprende nuovamente ad espandersi. Il sistema dunque è regolato da un fenomeno oscillatorio ed è proprio questo fenomeno che andiamo a modellizzare.

Il problema matematico viene formulato scrivendo il bilancio di energia per le fasi liquida e gassosa e scrivendo il problema del moto della colonna d'acqua. Osserviamo che sulla frontiera libera  $y = h(t)$  si ha una transizione di fase e dunque in generale questa non è una superficie materiale. Nella colonna di liquido l'equazione della energia si riduce all'equazione del calore con convezione

$$\rho_l c_l \left( \frac{\partial \theta_l}{\partial t} + \dot{h}(t) \frac{\partial \theta_l}{\partial y} \right) = k_l \frac{\partial^2 \theta_l}{\partial y^2}, \quad (7.1)$$

dove  $\theta_l(y, t)$  è la temperatura dell'acqua,  $\dot{h}(t)$  è la velocità dell'interfaccia vapore-liquido e  $\rho_l$ ,  $c_l$ ,  $k_l$  sono la densità, il calore specifico e la conducibilità termica dell'acqua. Le condizioni al contorno e iniziale sono

$$\theta_l(h + L, t) = \theta_a, \quad \theta_l(h, t) = \theta(t), \quad \theta_l(y, 0) = \theta_{in}(y), \quad (7.2)$$

dove  $\theta_a$  è la temperatura ambiente,  $\theta(t)$  è la temperatura nella bolla di vapore,  $\theta_{in}(y)$  è la temperatura iniziale nella colonna d'acqua. Nella sezione 7.4 illustreremo un metodo per determinare il profilo iniziale  $\theta_{in}(y)$ . Notiamo che la condizione  $\theta_l(h, t) = \theta(t)$  fornisce l'accoppiamento fra la temperatura dell'acqua e la temperatura della bolla. Introduciamo la trasformazione



$$\xi = y - h(t)$$

e la funzione

$$\Theta(\xi, t) = \theta_l(\xi + h(t), t).$$

L'equazione (7.1) e le condizioni (7.2) diventano

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2}, \quad 0 \leq \xi \leq L, \quad (7.3)$$

$$\Theta(L, t) = \theta_a, \quad \Theta(0, t) = \theta(t), \quad \Theta(\xi, 0) = \theta_{in}(\xi + h_o), \quad (7.4)$$

dove

$$D = \frac{k_l}{\rho_l c_l}, \quad (7.5)$$

è la diffusività dell'acqua (si veda la Tavola 7.1 per i valori di  $D$ ) e dove  $h_o$  è l'altezza di equilibrio della bolla di vapore. Modellizziamo il vapore come un gas ideale in cui la temperatura e la pressione sono legate dall'equazione di Clayperon [12]. Scriviamo

$$\begin{cases} p = p_o \exp \left[ -\frac{\lambda}{r} \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_o} \right) \right], \\ p = r \rho \theta, \end{cases} \quad (7.6)$$

dove  $p$  è la pressione del vapore,  $\rho$  è la densità,  $\lambda$  è il calore latente di vaporizzazione,  $r$  è la costante specifica dei gas e  $\theta_o$  è la temperatura di ebollizione alla pressione di riferimento  $p_o$ . Dalla (7.6) si vede facilmente che

$$\rho(\theta) = \frac{p_o}{r\theta} \exp \left[ -\frac{\lambda}{r} \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_o} \right) \right], \quad (7.7)$$

## 7.2 Il bilancio di energia

Dal primo principio della termodinamica abbiamo che la variazione di energia interna della bolla di vapore è data da

$$dU = \delta Q - p dV, \quad (7.8)$$

dove  $\delta Q$  è l'incremento infinitesimo di calore fornito al sistema e  $p dV$  è il lavoro infinitesimo fatto dal sistema. La quantità  $V$  rappresenta il volume della bolla. Più precisamente,  $V(t) = Ah(t)$ , dove  $A$  è l'area della sezione del tubo capillare. Supponendo che le pareti laterali siano adiabatiche (non scambiano calore con l'esterno poiché intorno alla bolla viene messo un isolante termico) e supponendo che non ci siano sorgenti/pozzi interni di calore si ha

$$\delta Q = (\dot{Q}_b - \dot{Q}_h) dt,$$

dove  $\dot{Q}_b > 0$  è la velocità con cui il calore viene fornito dal becco Bunsen sulla parte inferiore del tubo capillare (supposto costante) e dove  $\dot{Q}_h$  è la velocità con cui viene ceduto/assorbito calore attraverso l'interfaccia  $y = h(t)$ . Le dimensioni di  $\dot{Q}_b$  e  $\dot{Q}_h$  sono di un'energia per unità di tempo

$$[\dot{Q}_b] = [\dot{Q}_h] = \frac{\text{Joule}}{\text{sec}} = \text{Watt}$$

Per ottenere il flusso di calore (ossia energia per unità di tempo e per unità di superficie) si deve dividere  $\dot{Q}_b$  e  $\dot{Q}_h$  per l'area della sezione del tubo capillare, ossia

$$\frac{\dot{Q}_b}{A} = \text{flusso di calore alla base } y = 0 \quad \frac{\dot{Q}_h}{A} = \text{flusso di calore su } y = h.$$

Nella sezione 7.4 viene riportata una procedura per ottenere una stima di  $\dot{Q}_b$ . L'energia interna della bolla è data da

$$U = \rho V c_v \theta$$

dove  $c_v$  è il calore specifico a volume costante e dove  $\rho V$  è la massa di vapore nella bolla. La variazione infinitesima di energia interna  $dU$  nella bolla è data dunque da  $dU = d(\rho V c_v \theta)$ . La costante specifica dei gas  $r$  è data da

$$r = c_p - c_v$$

dove  $c_p$  è il calore specifico a pressione costante. L'equazione (7.8) può essere riscritta come

$$d[\rho V(c_p - r)\theta] = (\dot{Q}_b - \dot{Q}_h) dt - pdV. \quad (7.9)$$

Dalle (7.6) si ha che

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{\lambda p}{r\theta^2} = \frac{\lambda \rho}{\theta}$$

per cui

$$pdV = d(pV) - dpV = d(r\rho\theta V) - \frac{\lambda\rho V}{\theta} d\theta,$$

Di conseguenza, dalla (7.9)

$$\rho V \left( c_p - \frac{\lambda}{\theta} \right) d\theta + c_p \theta d(\rho V) = (\dot{Q}_b - \dot{Q}_h) dt, \quad (7.10)$$

Per chiudere il problema abbiamo bisogno di una espressione per  $\dot{Q}_h$ , dal momento che  $\dot{Q}_b$  può essere stimata (si veda la sezione 7.4). Ricordiamo che  $h(t)$  è una superficie di evaporazione per cui il flusso di calore deve avere un "salto" proporzionale al calore latente dovuto alla transizione di fase. Applicando la condizione di Stefan<sup>1</sup> (si veda il capitolo 1 o [9])

$$\lambda \underbrace{\frac{d(\rho V)}{dt}}_{\text{Variazione di massa}} = \underbrace{(\dot{Q}_h - \dot{Q}_l)}_{\text{Salto di energia su } y=h} dt,$$

dove  $\dot{Q}_l$  è la velocità con cui viene ceduto/assorbito calore nella fase liquida. Sfruttando la legge di Fourier possiamo scrivere

$$\dot{Q}_l = -k_l A \left. \frac{\partial \theta_l}{\partial y} \right|_{y=h(t)},$$

dove  $\theta_l$  è ottenuto risolvendo (7.3), (7.4). In conclusione l'equazione (7.10) può essere riscritta nel seguente modo

$$\rho V \left( c_p - \frac{\lambda}{\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} + (c_p \theta + \lambda) \frac{d(\rho V)}{dt} = \dot{Q}_b + k_l A \left. \frac{\partial \theta_l}{\partial y} \right|_{y=h(t)}$$

<sup>1</sup> In questo caso  $\lambda$  rappresenta il calore latente di evaporazione.

o analogamente

$$\frac{\rho Ah \lambda}{\theta} \left( \frac{c_p \theta}{\lambda} - 1 \right) \frac{d\theta}{dt} + \lambda \left( \frac{c_p \theta}{\lambda} + 1 \right) \frac{d(\rho Ah)}{dt} = \dot{Q}_b + k_l A \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}(0, t). \quad (7.11)$$

Adesso imponiamo la conservazione della quantità di moto (seconda legge di Newton) alla colonna d'acqua. Ricordiamo che quest'ultima viene trattata come un corpo rigido in cui tutti i punti hanno la medesima velocità. La velocità e l'accelerazione della colonna d'acqua sono date pertanto da  $\dot{h}(t)$  e  $\ddot{h}(t)$ . Il bilancio della quantità di moto è dunque dato da

$$m_l \ddot{h}(t) = F$$

dove  $m_l = \rho_l A L$  è la massa di acqua e  $F$  è la risultante delle forze agenti sulla colonna che può essere scritta come

$$F = \underbrace{-m_l g}_{\text{forza di gravità}} \quad \underbrace{-p_a A}_{\text{forza esercitata dalla pressione atmosferica}} \quad \underbrace{+pA}_{\text{forza esercitata dalla pressione della bolla}} \quad \underbrace{-\beta \dot{h}}_{\text{forza esercitata dall'attrito viscoso dell'acqua.}}$$

Abbiamo quindi

$$m_l \ddot{h} = -m_l g - p_a A + pA - \beta \dot{h} \quad (7.12)$$

dove  $p_a$  è la pressione atmosferica che agisce sulla superficie libera dell'acqua e dove l'ultimo termine rappresenta lo smorzamento dovuto all'attrito viscoso. Il membro di destra della (7.12) è dunque la forza netta che agisce sulla colonna. Scegliendo come pressione di riferimento<sup>2</sup>

$$p_o = \frac{m_l g}{A} + p_a, \quad (7.13)$$

possiamo riscrivere la (7.12) come

$$m_l \ddot{h} = (pA - p_o A) - \beta \dot{h}.$$

Ricordando la (7.6) si ottiene

$$m_l \ddot{h} = p_o A \left\{ \exp \left[ -\frac{\lambda}{r} \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_o} \right) \right] - 1 \right\} - \beta \dot{h}. \quad (7.14)$$

Osserviamo che le dimensioni di  $\beta$  sono di una massa diviso un tempo.

### 7.3 Il problema adimensionale

Riscaliamo il problema con le seguenti variabili adimensionali

$$\xi = L \tilde{\xi}, \quad h = h_o \tilde{h}, \quad V = A h_o \tilde{h}, \quad t = t_c \tilde{t},$$

dove  $t_c$  è un tempo caratteristico da selezionare e  $h_o$  è l'altezza caratteristica della bolla (vedi la tabella 7.1). Poniamo

<sup>2</sup> La pressione di riferimento è dunque la somma della pressione atmosferica e della pressione esercitata dalla colonna d'acqua.

$$\theta = \theta_o \tilde{\theta}, \quad \Theta = \theta_o \tilde{\Theta}, \quad p = p_o \tilde{p}, \quad \rho = \rho_o \tilde{\rho},$$

dove  $p_o$  è la pressione di riferimento data da (7.13) e riportata nella tabella 7.1,  $\theta_o$  è la temperatura di ebollizione alla pressione  $p_o$  (vedi tabella 7.1) e  $\rho_o = p_o/(r\theta_o)$ . In particolare, (7.7) diventa

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{\tilde{\theta}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{r\theta_o} \left( \frac{1}{\tilde{\theta}} - 1 \right) \right\}. \quad (7.15)$$

L'equazione (7.3) diventa

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \tilde{t}} = \left( \frac{t_c}{t_D} \right) \frac{\partial^2 \tilde{\Theta}}{\partial \tilde{\xi}^2},$$

dove

$$D = \left( \frac{k_l}{\rho_l c_l} \right) \quad t_D = \frac{L^2}{D}$$

rappresentano la diffusività termica dell'acqua (vedi tabella 7.1) e il tempo caratteristico diffusivo dell'acqua (vedi tabella 7.2). Le condizioni al contorno ed iniziali diventano

$$\tilde{\Theta} \Big|_{\tilde{\xi}=1} = \frac{\theta_a}{\theta_o} = \tilde{\Theta}_a, \quad \tilde{\Theta} \Big|_{\tilde{\xi}=0} = \tilde{\theta}, \quad \tilde{\Theta}(\tilde{\xi}, 0) = \frac{\theta_{in}(\tilde{\xi}L + h_o)}{\theta_o} = \tilde{\Theta}_{in}(\tilde{\xi}).$$

L'equazione (7.11) diventa

$$\left( \frac{\rho_o A h_o \lambda}{t_c} \right) \frac{\tilde{\rho} \tilde{h}}{\tilde{\theta}} \left( \frac{c_p \theta_o \tilde{\theta}}{\lambda} - 1 \right) \frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{t}} + \left( \frac{\rho_o A h_o \lambda}{t_c} \right) \left( \frac{c_p \theta_o \tilde{\theta}}{\lambda} + 1 \right) \frac{d(\tilde{\rho} \tilde{h})}{d\tilde{t}} = \dot{Q}_b + \left( \frac{k_l A \theta_o}{L} \right) \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \tilde{\xi}}(0, \tilde{t}).$$

Introduciamo il tempo caratteristico di produzione di calore del becco Bunsen

$$t_b = \frac{\rho_o A h_o \lambda}{\dot{Q}_b},$$

cosicché il bilancio di energia adimensionale diventa

$$\left( \frac{t_b}{t_c} \right) \left[ \frac{\tilde{\rho} \tilde{h}}{\tilde{\theta}} \left( \frac{c_p \theta_o \tilde{\theta}}{\lambda} - 1 \right) \frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{t}} + \left( \frac{c_p \theta_o \tilde{\theta}}{\lambda} + 1 \right) \frac{d(\tilde{\rho} \tilde{h})}{d\tilde{t}} \right] = 1 + \left( \frac{k_l A \theta_o}{L \dot{Q}_b} \right) \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \tilde{\xi}}(0, \tilde{t}). \quad (7.16)$$

Osserviamo che

$$\left( \frac{k_l A \theta_o}{L \dot{Q}_b} \right) = \left( \frac{k_l A \theta_o}{L} \right) \left( \frac{t_b}{\rho_o A h_o \lambda} \right) = \left( \frac{k_l \theta_o}{L \rho_o h_o \lambda} \right) t_b.$$

Introducendo il tempo caratteristico della transizione di fase

$$t_h = \frac{\rho_o h_o L \lambda}{k_l \theta_o}$$

la (7.16) diventa

$$\frac{\tilde{\rho} \tilde{h}}{\tilde{\theta}} \left( \frac{c_p \theta_o \tilde{\theta}}{\lambda} - 1 \right) \frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{t}} + \left( \frac{c_p \theta_o \tilde{\theta}}{\lambda} + 1 \right) \frac{d(\tilde{\rho} \tilde{h})}{d\tilde{t}} = \left( \frac{t_c}{t_b} \right) + \left( \frac{t_c}{t_h} \right) \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \tilde{\xi}} \Big|_0, \quad (7.17)$$

con  $\tilde{\rho}$  dato dalla (7.15). Introduciamo poi la nuova variabile dipendente

$$\tilde{\zeta}(\tilde{t}) = \frac{\tilde{\zeta}_o}{\tilde{\theta}(\tilde{t})}, \quad \text{con} \quad \tilde{\zeta}_o = \frac{\lambda}{r\theta_o},$$

e il coefficiente di espansione adiabatica

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad \frac{c_p}{r} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}.$$

Osserviamo che

$$\frac{c_p \theta_o \tilde{\theta}}{\lambda} = \frac{c_p \theta_o \tilde{\zeta}_o}{\lambda \tilde{\zeta}} = \frac{c_p}{r} \frac{1}{\tilde{\zeta}} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{\tilde{\zeta}}$$

e che

$$\frac{d\tilde{\zeta}}{d\tilde{t}} = -\frac{\tilde{\zeta}_o}{\tilde{\theta}^2} \frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{t}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\tilde{\zeta}} \frac{d\tilde{\zeta}}{d\tilde{t}} = -\frac{1}{\tilde{\theta}} \frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{t}}$$

L'equazione (7.17) diventa

$$\tilde{\rho}\tilde{h} \left(1 - \frac{1}{\tilde{\zeta}} \frac{\gamma}{\gamma - 1}\right) \frac{1}{\tilde{\zeta}} \frac{d\tilde{\zeta}}{d\tilde{t}} + \left(1 + \frac{1}{\tilde{\zeta}} \frac{\gamma}{\gamma - 1}\right) \frac{d(\tilde{\rho}\tilde{h})}{d\tilde{t}} = \left(\frac{t_c}{t_b}\right) + \left(\frac{t_c}{t_h}\right) \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \tilde{\xi}}(0, t), \quad (7.18)$$

dove, ricordando la (7.15),

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta}_o} \exp(\tilde{\zeta}_o - \tilde{\zeta}). \quad (7.19)$$

Osserviamo che

$$\frac{d(\tilde{\rho}\tilde{h})}{d\tilde{t}} = \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}}\tilde{h} + \frac{d\tilde{h}}{d\tilde{t}}\tilde{\rho}$$

e che

$$\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}}\tilde{h} = \tilde{\rho}\tilde{h} \frac{d\tilde{\zeta}}{d\tilde{t}} \left(\frac{1}{\tilde{\zeta}} - 1\right).$$

Di conseguenza la (7.18) diventa

$$\tilde{\rho}\tilde{h} \left(2 - \tilde{\zeta} - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\right) \frac{1}{\tilde{\zeta}} \frac{d\tilde{\zeta}}{d\tilde{t}} + \left(1 + \frac{1}{\tilde{\zeta}} \frac{\gamma}{\gamma - 1}\right) \tilde{\rho} \frac{d\tilde{h}}{d\tilde{t}} = \left(\frac{t_c}{t_b}\right) + \left(\frac{t_c}{t_h}\right) \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \tilde{\xi}}(0, t),$$

Per scrivere la versione non dimensionale del bilancio di momento della colonna d'acqua introduciamo il tempo caratteristico di oscillazione e il tempo caratteristico di smorzamento

$$t_o = \sqrt{\frac{m_l h_o}{p_o A}} \stackrel{(7.13)}{=} \sqrt{\frac{m_l h_o}{m_l g + p_a A}}, \quad t_d = \frac{m_l}{\beta},$$

cosicché l'equazione (7.14) diventa

$$\frac{d^2 \tilde{h}}{d\tilde{t}^2} = \left(\frac{t_c}{t_o}\right)^2 \left[\exp(\tilde{\zeta}_o - \tilde{\zeta}) - 1\right] - \left(\frac{t_c}{t_d}\right) \frac{d\tilde{h}}{d\tilde{t}}. \quad (7.20)$$

Dal momento che siamo interessati al fenomeno oscillatorio, selezioniamo  $t_o$  come tempo caratteristico, cioè  $t_c = t_o$ . Con questa scelta otteniamo il seguente problema matematico per le incognite <sup>3</sup>  $\Theta(\xi, t)$ ,  $\zeta(t)$  and  $h(t)$

<sup>3</sup> Qui e di seguito omettiamo i “~” per semplicità.

Parametro	Valore	Dimensioni	Descrizione
$\rho_o$	$6 \cdot 10^{-1}$	$\text{Kg}/\text{m}^3$	densità del vapore a $p_o$ e $\theta_o$
$\rho_l$	$1 \cdot 10^3$	$\text{Kg}/\text{m}^3$	densità dell'acqua
$p_a$	$1 \cdot 10^5$	$\text{Kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$	pressione atmosferica
$A$	$5 \cdot 10^{-5}$	$\text{m}^2$	area della sezione di tubo
$h_o$	$5 \cdot 10^{-2}$	$\text{m}$	altezza iniziale della bolla
$g$	9.8	$\text{m}/\text{s}^2$	gravità
$\dot{Q}_b$	$3 \cdot 10^{-2}$	$\text{W}$	flusso di calore del Bunsen
$L$	$6 \cdot 10^{-1}$	$\text{m}$	altezza della colonna d'acqua
$\lambda$	$2.25 \cdot 10^3$	$\text{J}/\text{Kg}$	calore latente di vaporizzazione
$k_l$	$6.8 \cdot 10^{-1}$	$\text{W}/(\text{m} \cdot ^\circ \text{K})$	conducibilità termica dell'acqua
$c_l$	$4.18 \cdot 10^3$	$\text{J}/(\text{Kg} \cdot ^\circ \text{K})$	calore specifico dell'acqua
$\theta_o$	375	$^\circ \text{K}$	temperatura del vapore a $p_o$
$\theta_a$	293	$^\circ \text{K}$	temperatura ambiente
$\mu$	$1 \cdot 10^{-3}$	$\text{Kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$	viscosità dell'acqua
$r$	$4.6 \cdot 10^2$	$\text{J}/(\text{Kg} \cdot ^\circ \text{K})$	costante dei gas specifica
$c_p$	$1.94 \cdot 10^3$	$\text{J}/(\text{Kg} \cdot ^\circ \text{K})$	calore specifico a pressione costante
$c_v$	$1.48 \cdot 10^3$	$\text{J}/(\text{Kg} \cdot ^\circ \text{K})$	calore specifico a volume costante
$D$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$\text{m}^2/\text{s}$	diffusività termica dell'acqua

**Tabella 7.1.** Valori dei parametri del modello. Rimandiamo a 7.4 per una stima di  $\dot{Q}_b$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho h}{\zeta} \left( 2 - \zeta - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{d\zeta}{dt} + \left( 1 + \frac{1}{\zeta} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \rho \frac{dh}{dt} = \alpha + \delta \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}, \\ \frac{d^2 h}{dt^2} = [\exp(\zeta_o - \zeta) - 1] - \chi \frac{dh}{dt}, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2}, \end{array} \right. \quad (7.21)$$

dove abbiamo posto

$$\alpha = \left( \frac{t_o}{t_b} \right), \quad \delta = \left( \frac{t_o}{t_h} \right), \quad \chi = \left( \frac{t_o}{t_d} \right), \quad \nu = \left( \frac{t_o}{t_D} \right).$$

I valori dei suddetti parametri sono riportati nella tabella 7.2. Le condizioni iniziali ed al contorno sono

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta(\xi, 0) = \Theta_{in}(\xi), \quad \zeta(0) = \zeta_{in} = \frac{\zeta_o}{\theta_o}, \quad h(0) = 1, \\ \Theta(0, t) = \frac{\zeta_o}{\zeta}, \quad \Theta(1, t) = \theta_a. \end{array} \right. \quad (7.22)$$

Come detto in precedenza, nella sezione 7.5 descriveremo un metodo per determinare  $\Theta_{in}(\xi)$ . Il sistema (7.21) è abbastanza complesso poiché formato da due ODE's nonlineari accoppiate con una equazione parabolica per  $\Theta$ . Osserviamo che  $\nu \sim 10^{-9}$ , che indica che solo un piccolo strato di acqua vicino all'interfaccia è riscaldato dal vapore. Infatti  $\nu \sim 10^{-9}$  implica che

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0,$$

tempo caratteristico	valore	parametro	valore
$t_o$	$1.67 \cdot 10^{-2}$ s	$\alpha$	4.95
$t_b$	$3.40 \cdot 10^{-3}$ s	$\delta$	$1.4 \cdot 10^{-5}$
$t_h$	$1.19 \cdot 10^3$ s	$\chi$	$8.4 \cdot 10^{-3}$
$t_d$	1.98 s	$\nu$	$7.5 \cdot 10^{-9}$
$t_D$	$2.21 \cdot 10^6$ s	$\xi_d$	$71.67 \cdot 10^{-2}$
$\zeta_o$	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$\gamma$	1.31
$\Theta_a$	$7.81 \cdot 10^{-1}$		

**Tabella 7.2.** Valori dei parametri adimensionali.

ossia  $\Theta = \Theta_{in}(\xi)$ . Sperimentalmente si vede che la temperatura del liquido quando la bolla si forma è essenzialmente quella ambiente (si possono appoggiare le mani sulla quasi totalità del tubo). Per cui

$$\Theta_{in} \sim \Theta_a,$$

mentre sull'interfaccia  $\xi = 0$  (ossia  $y = h$ ) si ha

$$\Theta(0, t) = \theta(t) \gg \Theta_a.$$

Questo vuol dire che in prossimità della bolla deve esistere uno strato limite termico in cui la temperatura passa bruscamente dai quasi 100 gradi della bolla alla temperatura ambiente. Il gradiente termico in tale strato limite può essere calcolato esplicitamente (si veda la sezione 7.5 per tutti i dettagli) fornendo

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = F(t)$$

dove

$$F(t) = -\frac{(1 - \Theta_a)}{\sqrt{\pi \nu t}} \exp\left(-\frac{\xi_d^2}{4\nu t}\right), \quad (7.23)$$

e dove  $\xi_d$  rappresenta lo spessore dello strato limite adimensionale. Quindi, ponendo  $v = \dot{h}$ , il sistema (7.21) può essere scritto come sistema del primo ordine di ODE's

$$\begin{cases} \dot{h} = v, \\ \dot{v} = \exp(\zeta_o - \zeta) - 1 - \chi v, \\ \dot{\zeta} = \zeta \frac{\alpha + \delta F(t) - \left(1 + \frac{1}{\zeta} \frac{\gamma}{\gamma - 1}\right) \rho(\zeta) z}{\rho(\zeta) h \left(2 - \zeta - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\right)}, \end{cases} \quad (7.24)$$

dove  $\rho(\zeta)$  è dato dalla (7.19) e  $F(t)$  è dato dalla (7.23). La soluzione di (7.24) ci fornisce l'andamento di  $h(t)$  e quindi ci permette di visualizzare il fenomeno oscillatorio della bolla. In pratica, dal grafico di  $h$  in funzione del tempo possiamo ricavare il periodo dell'oscillazione e, prendendo l'inverso del periodo, ottenere la frequenza.

### 7.4 Stima del flusso termico alla base del tubo capillare

In questa sezione mostriamo una procedura per determinare la velocità di produzione di calore  $\dot{Q}_b$  del becco Bunsen. Ricordiamo che nel nostro modello il tempo  $t = 0$  è quello della formazione della bolla.

Consideriamo l'evoluzione della temperatura dell'acqua dal tempo in cui il tubo capillare riempito di acqua a temperatura ambiente è messo a contatto con il becco Bunsen. In pratica stiamo considerando la fase precedente al tempo  $t = 0$ , dato che quest'ultimo rappresenta l'istante in cui la bolla si è formata. In questa fase il tempo sarà indicato con la variabile  $\tau$ . Dato che sperimentalmente si osserva che la formazione della bolla avviene dopo circa 20 minuti, possiamo affermare che  $\tau = 20$  minuti equivale a  $t = 0$ . La temperatura nel liquido evolve secondo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_l}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 \theta_l}{\partial y^2}, \quad 0 \leq y \leq L, \quad \tau \geq 0, \\ k_l A \frac{\partial \theta_l}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\dot{Q}_b, \quad \tau \geq 0, \\ \theta_l|_{y=L} = \theta_a, \quad \tau \geq 0, \\ \theta_l|_{\tau=0} = \theta_a, \quad 0 \leq y \leq L. \end{array} \right. \quad (7.25)$$

dove  $D$  è dato dalla (7.5) e dove  $\theta_a$  è la temperatura ambiente. Introduciamo

$$T = \theta_l - \theta_a$$

e le variabile adimensionali

$$\tau = \tau_s \eta \quad y = (\sqrt{D\tau_s}) z$$

dove scegliamo  $\tau_s = 1$  s. La frontiera  $y = L$  diventa  $z = L/\sqrt{D\tau_s} \sim 10^3$ , che approssimiamo con  $\infty$ . Il problema (7.25) diventa

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad 0 \leq z, \quad \eta \geq 0, \\ \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = -B, \quad \eta \geq 0, \\ T(\infty, \eta) = 0, \quad \eta \geq 0, \\ T(z, 0) = 0, \quad z \geq 0. \end{array} \right. \quad (7.26)$$

dove abbiamo posto

$$B = \frac{\dot{Q}_b}{Ak_l} \sqrt{D\tau_s}.$$

Il sistema (7.26) ammette la soluzione analitica (si veda per i dettagli [3])

$$T(z, \eta) = \frac{B}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \frac{1}{\sqrt{\eta - \xi}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{4(\eta - \xi)} \right\} d\xi \quad (7.27)$$



È facile verificare che (7.27) soddisfa il problema. Infatti osserviamo che

$$\lim_{\xi \rightarrow \eta^-} \frac{1}{\sqrt{\eta - \xi}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{4(\eta - \xi)} \right\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{4\alpha} \right\} = 0,$$

per cui

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \eta} &= \frac{B}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \frac{d}{d\eta} \underbrace{\left[ \frac{1}{\sqrt{\eta - \xi}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{4(\eta - \xi)} \right\} \right]}_{=\Gamma(z, \eta, \xi)} d\xi \\ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= \frac{B}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \frac{d^2}{dz^2} \underbrace{\left[ \frac{1}{\sqrt{\eta - \xi}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{4(\eta - \xi)} \right\} \right]}_{=\Gamma(z, \eta, \xi)} d\xi \end{aligned}$$

dove  $\Gamma(z, \eta, \xi)$  è detta *soluzione fondamentale*. Infine si vede che

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{d\eta} &= -\frac{1}{2}(\eta - \xi)^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{z^2}{4(\eta - \xi)} \right\} + \frac{z^2}{4}(\eta - \xi)^{-5/2} \exp \left\{ -\frac{z^2}{4(\eta - \xi)} \right\} \\ \frac{d\Gamma}{dz} &= -\frac{z}{2}(\eta - \xi)^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{z^2}{4(\eta - \xi)} \right\} \\ \frac{d^2\Gamma}{dz^2} &= -\frac{1}{2}(\eta - \xi)^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{z^2}{4(\eta - \xi)} \right\} + \frac{z^2}{4}(\eta - \xi)^{-5/2} \exp \left\{ -\frac{z^2}{4(\eta - \xi)} \right\} \end{aligned}$$

per cui  $T$  soddisfa l'equazione del calore. Dalla (7.27) si vede facilmente che

$$T(0, \eta) = 2B \sqrt{\frac{\eta}{\pi}}$$

Possiamo scrivere allora una espressione esplicita per la temperatura  $\theta_l$  in  $y = 0$  al tempo  $\tau$

$$\theta_l(0, \tau) = \theta_a + \frac{2\dot{Q}_b}{A k_l} \sqrt{\frac{D\tau}{\pi}}. \quad (7.28)$$

Quando si forma la bolla di vapore, dopo circa 20 min,  $\theta_l$  ha raggiunto il valore  $\theta_o$  (praticamente 100°C), cioè la temperatura di ebollizione alla pressione  $p_o$ . Di conseguenza, ponendo  $\tau = \tau_{boil}$ , con  $\tau_{boil} = 20$  min, e  $\theta_l(0, \tau_{boil}) - \theta_a = 80^\circ K$  in (7.28) possiamo stimare  $\dot{Q}_b$ , ottenendo

$$\dot{Q}_b \sim 3 \cdot 10^{-2} \text{ W}.$$

## 7.5 Il flusso di calore nella fase liquida

In questa sezione mostriamo una procedura per ottenere una espressione approssimata per  $\Theta_\xi(0, t)$  che compare nel sistema (7.21). In pratica mostriamo la procedura per determinare la funzione  $F(\zeta, t)$  descritta in (7.23), (7.24). All'istante  $t = 0$  la temperatura è praticamente quella ambiente  $\Theta_a$  in tutta la colonna d'acqua eccetto in un sottile strato vicino alla superficie di evaporazione  $\xi = 0$ . Seguendo le osservazioni sperimentali, supponiamo che il profilo termico iniziale nel liquido sia dato da

$$\Theta(\xi, 0) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \xi_d < \xi, \\ \Theta_a & \xi_d \leq \xi \leq 1, \end{cases} \quad (7.29)$$

dove ricordiamo che  $\Theta_a$  è la temperatura ambiente riscalata e 1 è sostanzialmente la temperatura di ebollizione non dimensionale. In pratica stiamo dicendo che in uno strato di spessore  $\xi_d$  la temperatura del liquido è quella di evaporazione, mentre al di fuori dello strato il fluido è ovunque alla temperatura ambiente. Un valore ragionevole per  $\xi_d$  è 1/60. Infatti, ricordando che la lunghezza della colonna è di 60 cm, l'assunzione  $\xi_d = 1/60$  significa che abbiamo 1 cm di colonna d'acqua vicino alla bolla alla temperatura di ebollizione, mentre la restante porzione si trova essenzialmente alla temperatura ambiente. Il problema per  $\Theta$  è dunque

$$\begin{cases} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} & \xi \in [0, 1], \quad t > 0, \\ \Theta(\xi, 0) = \Theta_{in}(\xi) & \xi \in [0, 1], \\ \Theta(0, t) = \frac{\zeta_o}{\zeta} = \theta(t) & t > 0, \\ \Theta(1, t) = \Theta_a & t > 0. \end{cases} \quad (7.30)$$

Per semplificare le cose assumiamo che  $\theta(t)$  si discosti poco dalla temperatura di ebollizione ossia  $\theta(t) \sim 1$ . Introducendo le nuove variabili

$$z = \frac{\xi}{\sqrt{\nu}} \quad v(z, t) = \Theta(\xi, t) - \Theta_a,$$

otteniamo (vedi la tabella 7.2)

$$\xi = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad z = \nu^{-1/2} = O(10^4) \gg 1.$$

Allora nel problema per  $v$  la condizione al contorno corrispondente a  $\xi = 1$  può essere presa come  $z = \infty$ . problema per  $v(z, t)$  diventa

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} & z \geq 0, \quad t > 0, \\ v(z, 0) = v_{in}(z) & z \geq 0, \\ v(0, t) = 1 - \Theta_a & t \geq 0, \\ v(\infty, t) = 0 & t \geq 0. \end{cases} \quad (7.31)$$

dove

$$v_{in}(z) = \begin{cases} 1 - \Theta_a & 0 \leq z_d < \eta, \\ 0 & z_d \leq z, \end{cases} \quad (7.32)$$

e dove

$$z_d = \frac{1}{60\sqrt{\nu}} \approx 190$$

Seguendo nuovamente [3] possiamo facilmente verificare che la soluzione esplicita di (7.31) è data da

$$v(z, t) = (1 - \Theta_a) \left[ 1 - \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{z - z_d}{2\sqrt{t}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{z + z_d}{2\sqrt{t}} \right) \right] \right] \quad (7.33)$$

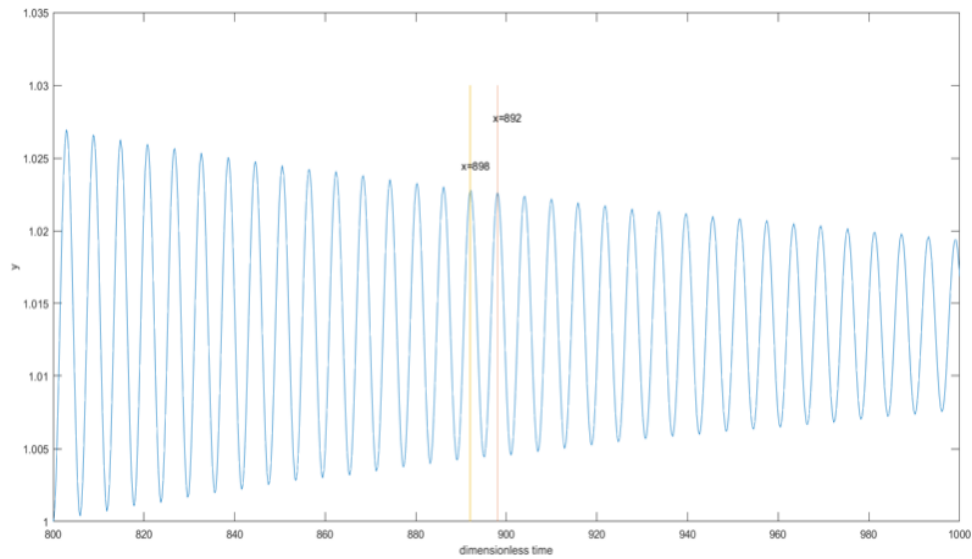
Per esercizio si può facilmente verificare che la (7.33) soddisfa il problema (7.31). Derivando si ottiene

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \sqrt{\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = -\frac{1 - \Theta_a}{2\sqrt{\pi t}} \left[ \exp \left( -\frac{(z - z_d)^2}{4t} \right) + \exp \left( -\frac{(z + z_d)^2}{4t} \right) \right]. \quad (7.34)$$

per cui

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}(0, t) = -\frac{1 - \Theta_a}{\sqrt{\pi \nu t}} \exp \left( -\frac{\xi_d^2}{4\nu t} \right), \quad (7.35)$$

ossia la  $F$  definita in (7.23).



**Figura 7.2.** Altezza della bolla di vapore ottenuta dalla soluzione numerica del sistema 7.24. La frequenza misurata è di 1.6 Hz.



---

## Bibliografia

1. George Keith Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge university press, 2000.
2. John Rozier Cannon. *The one-dimensional heat equation*. Number 23. Cambridge University Press, 1984.
3. Horatio Scott Carslaw and John Conrad Jaeger. *Conduction of heat in solids*. Oxford: Clarendon Press, 1959, 2nd ed., 1959.
4. Elena Comparini. A one-dimensional bingham flow. *Journal of mathematical analysis and applications*, 169(1):127–139, 1992.
5. Sebastiano Corra, Antonio Fasano, Lorenzo Fusi, Mario Primicerio, and Fabio Rosso. Wax diffusivity under given thermal gradient: a mathematical model. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 87(1):24–36, 2007.
6. Lorenzo Fusi, Angiolo Farina, and Mario Primicerio. A free boundary problem for neutralization of acid waters. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 15:42–50, 2014.
7. Morton E Gurtin. *An introduction to continuum mechanics*, volume 158. Academic press, 1982.
8. B G Korenev. *Bessel functions and their applications*. Analytical methods and special functions v.8. Chapman & Hall, 1 edition, 2002.
9. LI Rubinshtein. *The stefan problem*, volume 27. American Mathematical Soc., 1971.
10. Andrej N Tichonov and Aleksandr Andreevich Samarskii. *Equazioni della fisica matematica*. Edizioni Mir, 1981.
11. JS Weingarten, JA Euchner, et al. Methods for predicting wax precipitation and deposition. *SPE Production Engineering*, 3(01):121–126, 1988.
12. Mark Waldo Zemansky and Richard H Dittman. *Heat and thermodynamics: an intermediate textbook*. McGraw-Hill New York, 1968.