

1. Studiare al variare del parametro $a > 0$ la funzione

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin x} - ax.$$

2. Studiare al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(n^3) \right) \left[\left(n + \frac{\sqrt{n}}{\log n} \right)^{\beta} - (n+1)^{\beta} \right].$$

3. Poniamo

$$g(x) = \begin{cases} \left(\int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t^3} dt \right)^{-1} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(i) Dimostrare che la funzione $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è ben definita $\forall x \in [0, \infty)$.

(ii) Stabilire se g è continua in 0.

(iii) Stabilire se g è derivabile in 0, e calcolare $g'(0)$ in caso affermativo.