Soluzioni degli esercizi della prova scritta di fisica per tecnologie alimentari del 16/6/2020

Esercizio 1

a) La massa del cilindro di raggio minore vale

$$m_2 = \rho V_2 = 35{,}1 \text{ kg} \qquad \text{ove} \quad V_2 = \pi r_2^2 h_2 = 4{,}68 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \quad \text{è il suo volume.}$$

b) Il momento di inerzia I del corpo rigido è la somma dei momenti di inerzia dei due cilindri:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} m_1 r_1^2 = 0{,}252 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ I_2 &= \frac{1}{2} m_2 r_2^2 = 0{,}422 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ I &= I_1 + I_2 = 0{,}674 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \, . \end{aligned}$$

c) Sul corpo rigido agiscono le forze dei fili ai quali sono appesi i corpi A e B. (Agisce anche una reazione vincolare che mantiene fisso l'asse di rotazione, ma questa forza ha momento nullo, avendo braccio nullo.) Ogni forza produce un momento torcente dato dal prodotto *braccio* per *forza*, con segno positivo se tale forza tende a far ruotare il corpo in senso antiorario, negativo nel caso contrario.

Il sistema è in quiete, quindi la tensione (forza) di ciascun filo è pari alla forza peso del corpo appeso. I moduli delle forze sono

$$F_A = m_A g = 8{,}93 \text{ N} \, , \qquad F_B = m_B g = 18{,}8 \text{ N}$$

ove $g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$ è l'accelerazione di gravità. I bracci delle forze rispetto all'asse di rotazione sono rispettivamente $r_A = r_1$ ed $r_B = r_2$, quindi i momenti delle forze valgono

$$\tau_A = -r_1 F_A = -3{,}97 \text{ N} \cdot \text{m} \, , \qquad \tau_B = +r_2 F_B = 2{,}92 \text{ N} \cdot \text{m} \, .$$

Si osservi come F_A abbia un momento negativo, in quanto tende a far ruotare i cilindri in senso orario.

d) Ora la situazione è dinamica, in quanto i corpi si muovono, perciò bisogna tenere in conto le accelerazioni dei corpi A, B e l'accelerazione angolare del corpo rigido. Indichiamo con T_A e T_B le tensioni dei fili collegati ai corpi A e B.

Orientiamo l'asse y verticale verso l'alto, in modo che velocità, accelerazioni e forze siano positive se rivolte verso l'alto. Sul corpo A agiscono:

- la forza peso $\vec{F}_A$ diretta verso il basso (quindi con componente y negativa: $F_{Ay} = -m_A g$);
- la tensione del filo $\vec{T}_A$ diretta verso l'alto (quindi con componente y positiva: $T_{Ay} = T_A$).

Dalla seconda legge della dinamica sappiamo che $\vec{F}_A + \vec{T}_A = m_A \vec{a}_A$ e analogamente per il corpo B. Tutti i vettori sono diretti verticalmente, e prendendone la componente y troviamo

$$\begin{aligned} m_A a_A &= -m_A g + T_A \\ m_B a_B &= -m_B g + T_B \, . \end{aligned}$$

Le tensioni dei fili producono dei momenti torcenti sul corpo rigido dati da

$$\begin{aligned}\tau_A &= -r_1 T_A \\ \tau_B &= +r_2 T_B\ .\end{aligned}$$

Il momento totale $\tau = \tau_A + \tau_B$ produce un'accelerazione angolare α del corpo rigido tale che

$$I\,\alpha = \tau = \tau_A + \tau_B = -r_1 T_A + r_2 T_B\ .$$

Abbiamo quindi il sistema di 3 equazioni

$$\begin{cases} m_A\, a_A = -m_A\, g + T_A \\ m_B\, a_B = -m_B\, g + T_B \\ I\,\alpha = -r_1 T_A + r_2 T_B \end{cases}$$

in cui ci sono 5 incognite: a_A, a_B, α, T_A e T_B. Abbiamo quindi bisogno di altre 2 equazioni per risolvere il sistema. Osserviamo che i fili inestensibili vincolano le accelerazioni a_A ed a_B ad essere legate all'accelerazione angolare α. Infatti, se il corpo rigido ruota di un angolo $\Delta\theta$, il filo "1" scorre per una lunghezza $\Delta l_1 = r_1|\Delta\theta|$, quindi il corpo A subisce uno spostamento $\Delta y_A = +r_1\Delta\theta$ (positivo perché verso l'alto se $\Delta\theta$ è positivo). Analogamente, il filo "2" scorre per una lunghezza $l_2 = r_2|\Delta\theta|$ ed il corpo B si sposta di $\Delta y_B = -r_2\Delta\theta$ (negativo perché verso il basso se $\Delta\theta$ è positivo).

Dividendo per l'intervallo di tempo Δt in cui avvengono questi spostamenti, troviamo la relazione tra le componenti y delle velocità v_A e v_B dei corpi e la velocità angolare ω del corpo rigido:

$$\begin{cases} v_A = r_1\omega \\ v_B = -r_2\omega \end{cases}$$

e derivando una seconda volta rispetto al tempo troviamo le relazioni tra le accelerazioni:

$$\begin{cases} a_A = r_1\alpha \\ a_B = -r_2\alpha\ . \end{cases}$$

È facile a questo punto risolvere il sistema. Ricaviamo per esempio le tensioni

$$\begin{cases} T_A = m_A(a_A + g) = m_A(r_1\alpha + g) \\ T_B = m_B(a_B + g) = m_B(-r_2\alpha + g) \end{cases}$$

e le sostituiamo nella terza equazione:

$$\begin{aligned} I\alpha &= -r_1 m_A(r_1\alpha + g) + r_2 m_B(-r_2\alpha + g) \\ &= -\alpha(m_A r_1^2 + m_B r_2^2) + g(-m_A r_1 + m_B r_2) \end{aligned}$$

Risolvendo quest'ultima equazione nell'unica incognita α otteniamo

$$\alpha = g\frac{m_B r_2 - m_A r_1}{I + m_A r_1^2 + m_B r_2^2} = -1{,}17\ \mathrm{rad/s^2}\ .$$

Osservando la soluzione, si capisce che si poteva risolvere questo problema in modo più veloce facendo le seguenti considerazioni:

- il denominatore a secondo membro della precedente equazione è esattamente il momento di inerzia totale di un nuovo corpo rigido formato dai due cilindri, da una massa m_A fissata a distanza r_1 dall'asse di rotazione e da una massa m_B fissata a distanza r_2 dall'asse;

– il numeratore è la somma algebrica dei momenti delle forze peso dei corpi A e B.

Insomma, dal punto di vista dell'inerzia, cioè dell'opposizione dei corpi a cambiare velocità, il vincolo dei fili è equivalente a fissare A e B sui due cilindri alle distanze r_1 ed r_2. Questo è il nuovo sistema che possiamo considerare in rotazione attorno all'asse fisso. Il suo moto è determinato unicamente dai momenti delle forze *esterne* che agiscono su di lui. E chi sono le forze esterne a questo nuovo sistema? Sono solamente le forze peso dei corpi A e B, le quali però agiscono sempre lungo le rette individuate dai fili, e quindi producono un momento torcente totale dato dal numeratore dell'equazione precedente. (La reazioni vincolari e le forze peso dei cilindri ci sono, ma hanno momento nullo e possono essere escluse dal calcolo).

Questo metodo di soluzione richiede una certa esperienza e padronanza nella valutazione dei vincoli e delle forze esterne, per cui è consigliabile usare il metodo più lungo ma più elementare. Tuttavia uno sguardo alla soluzione finale può aiutare a capire se il risultato è plausibile oppure no.

e) Non essendoci attriti, vale la conservazione dell'energia meccanica:

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

ove K indica l'energia cinetica totale, U l'energia potenziale totale, ed i suffissi i ed f si riferiscono allo stato "iniziale" e "finale". L'energia cinetica iniziale è zero, perché tutti i corpi inizialmente sono fermi. Quindi l'energia cinetica finale è data da

$$K_f = U_i - U_f = (U_{Ai} + U_{Bi} + U_{Ci}) - (U_{Af} + U_{Bf} + U_{Cf}) = -\Delta U \ .$$

In altre parole, l'energia cinetica finale è data dall'opposto della variazione dell'energia potenziale totale. La variazione di energia potenziale dei cilindri è zero, perché essi non variano la loro altezza:

$$\Delta U_C = U_{Cf} - U_{Ci} = 0 \ .$$

Le variazioni di energia potenziale dei corpi A e B dipendono da quanto si sono alzati rispetto alla loro posizione iniziale:

$$\begin{aligned} \Delta U_A &= U_{Af} - U_{Ai} = m_A\, g\, \Delta y_A \\ \Delta U_B &= U_{Bf} - U_{Bi} = m_B\, g\, \Delta y_B \ . \end{aligned}$$

Chiaramente Δy_A e Δy_B non sono indipendenti, ma sono legati alla rotazione $\Delta\theta$ come ricavato in precedenza:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta y_A}{r_1} = -\frac{\Delta y_B}{r_2} \quad \Longrightarrow \quad \Delta y_A = -\Delta y_B \frac{r_2}{r_1} \ .$$

Inoltre, se dopo tale spostamento i due corpi devono avere la stessa altezza, vale

$$\begin{aligned} & y_{Af} = y_{Ai} + \Delta y_A \ , \qquad y_{Bf} = y_{Bi} + \Delta y_B \ , \quad y_{Af} = y_{Bf} \\ \Longrightarrow \quad & \Delta y_B - \Delta y_A = y_{Ai} - y_{Bi} = \Delta y \ . \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema nelle due incognite Δy_A e Δy_B

$$\begin{cases} \Delta y_A = -\Delta y_B \frac{r_2}{r_1} \\ \Delta y_B - \Delta y_A = \Delta y \end{cases}$$

si ricava

$$\Delta y_B \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right) = \Delta y \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \Delta y_B = \Delta y \frac{r_1}{r_1+r_2} = 111 \text{ cm} \\ \Delta y_A = -\Delta y \frac{r_2}{r_1+r_2} = -39 \text{ cm} \ . \end{cases}$$

Quindi l'energia cinetica finale del sistema vale

$$K_f = -\Delta U = -g(m_A\, \Delta y_A + m_B\, \Delta y_B) = 2{,}63 \text{ J} \ .$$

f) Entrambi i corpi A e B si muovono di un moto rettilineo uniformemente accelerato (con partenza da fermo). Considerando uno qualsiasi dei due, per esempio il corpo B; si ha

$$\Delta y_B = v_{B0}\, t + \frac{1}{2} a_B\, t^2 \quad \text{con} \quad v_{B0} = 0 \;, \quad a_B = -r_2 \alpha = 0{,}181 \text{ m/s}^2$$

$$\Longrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2\Delta y_B}{a_B}} = 2{,}07 \text{ s} \;.$$

Lo stesso risultato si troverebbe ovviamente sostituendo B con A.

Esercizio 2

a) Il modulo della forza della spinta di Archimede sul blocco di legno vale

$$F_A = \rho_a g V_i$$

dove $\rho_a = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$ è la densità del liquido (acqua) e V_i è il volume del corpo immerso nel liquido. Siccome il volume del blocco di legno è

$$V_L = \frac{m}{\rho} = 7{,}39 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3\ ,$$

ed il volume immerso è la sua metà, si trova

$$V_i = 0{,}5 \cdot V_L = 3{,}69 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$$

e quindi $F_A = 36{,}2$ N.

b) All'equilibrio statico la somma delle forze che agiscono su ciascun corpo deve essere nulla. Sul blocco di legno agiscono la forza peso $\vec{F}_P$, la spinta di Archimede $\vec{F}_A$ e la forza $\vec{F}_c$ del filo verticale c. Siccome tutte e tre le forze sono verticali, con F_P diretta verso il basso e $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_c$ verso l'alto, i loro moduli devono soddisfare

$$F_P = F_A + F_c \quad \Longrightarrow \quad F_c = F_P - F_A = mg - F_A = 23{,}2\ \mathrm{N}\ .$$

Analogamente, il bilancio delle forze nel punto di unione delle tre funi deve essere nullo:

$$\vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c = 0$$

(Qui con $\vec{F}_c$ si indica la forza della fune c sul punto di unione, che è diretta verso il basso). Orientiamo un sistema di assi cartesiani in modo che l'asse x sia orizzontale e diretto verso destra, mentre l'asse y sia verticale e diretto verso l'alto. Scomponendo le forze nelle componenti cartesiane abbiamo:

$$\begin{aligned} F_a \cos\theta - F_b &= 0 \qquad\qquad \text{(componente } x\text{)} \\ F_a \sin\theta - F_c &= 0 \qquad\qquad \text{(componente } y\text{)} \end{aligned}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{aligned} F_a &= \frac{F_c}{\sin\theta} = 32{,}8\ \mathrm{N} \\ F_b &= F_a \cos\theta = 23{,}2\ \mathrm{N}\ . \end{aligned}$$

c) Il blocco di legno, non più sorretto dalla fune c, raggiunge la nuova configurazione di equilibrio quando la spinta di Archimede diventa uguale (in modulo) alla sua forza peso. Indicando con V_i' il volume del legno immerso in questa condizione, abbiamo

$$F_A' = F_P \quad \Longrightarrow \quad \rho_a\, g\, V_i' = mg \quad \Longrightarrow \quad V_i' = \frac{m}{\rho_a} = 6{,}06 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$$

e quindi la percentuale del volume del legno immerso vale

$$p_i = \frac{V_i'}{V_L} = \frac{m/\rho_a}{m/\rho} = \frac{\rho}{\rho_a} = 0{,}82 = 82\%\ .$$

Pertanto la percentuale di legno al di sopra del livello dell'acqua è

$$p_s = 1 - p_i = 0{,}18 = 18\%\ .$$

d) Il volume d'acqua uscita dal recipiente è pari alla differenza del volume di legno immerso:

$$V_u = V_i' - V_i = 2{,}37 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3\ .$$

Esercizio 3

a) Dall'equazione di stato dei gas perfetti ricaviamo

$$P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 8{,}07 \cdot 10^4 \text{ Pa} .$$

b) Nella trasformazione isobara $A \to B$, il lavoro compiuto dal gas è proporzionale alla *variazione* di volume $\Delta V = V_B - V_A$ e vale

$$W_{AB} = P\,\Delta V \quad \Longrightarrow \quad \Delta V = \frac{W_{AB}}{P} = 7{,}00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$
$$\Longrightarrow \quad V_B = V_A + \Delta V = 100 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 .$$

Qui P indica la pressione costante $P_A = P_B$.

c) T_B si può ricavare dall'equazione dei gas perfetti

$$T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = 381 \text{ K} ,$$

o ancora più semplicemente dalla legge dell'isobara (legge di Charles)

$$\frac{V_B}{T_B} = \frac{V_A}{T_A} \quad \Longrightarrow \quad T_B = T_A \frac{V_B}{V_A} = 381 \text{ K} ,$$

ove T rappresenta la temperatura assoluta (misurata in Kelvin).

Un modo alternativo, che non richiede il calcolo di V_B, è il seguente: a pressione costante il calore assorbito è $Q_{AB} = n\,c_P\,\Delta T_{AB}$, dove c_P è il calore molare a pressione costante e $\Delta T_{AB} = T_B - T_A$, mentre la variazione di energia interna è $\Delta E_{AB} = n\,c_V\,\Delta T_{AB}$, dove c_V è il calore molare a volume costante. Per il primo principio della termodinamica

$$W_{AB} = Q_{AB} - \Delta E_{AB} = n(c_P - c_V)\Delta T_{AB} = nR\,\Delta T_{AB}$$

in quanto $c_P = c_V + R$. Si ha pertanto che

$$\Delta T_{AB} = \frac{W_{AB}}{nR} = 26{,}6 \text{ K} \quad \Longrightarrow \quad T_B = T_A + \Delta T_{AB} = 381 \text{ K} .$$

d) L'idrogeno molecolare è un gas biatomico, quindi $c_V = \frac{5}{2}R$, pertanto la variazione di energia interna è

$$\Delta E_{AB} = n\,c_V\,\Delta T_{AB} = 1410 \text{ J} .$$

e) Dal primo principio della termodinamica

$$Q_{AB} = \Delta E_{AB} + W_{AB} = 1980 \text{ J} ,$$

arrotondando a tre cifre significative.

f) La trasformazione è a volume costante, quindi il sistema non fa lavoro: $W_{BC} = 0$, pertanto $Q_{BC} = \Delta E_{BC} = -2300$ J.

g) La trasformazione AC non è una delle trasformazioni tipiche che abbiamo incontrato. L'unico modo per calcolare il calore Q_{AC} è sfruttare il primo principio della termodinamica, calcolando

ΔE_{AC} e W_{AC}. Possiamo calcolare ΔE_{AC} dalle temperature negli stati A e C. T_A è nota. T_C si calcola dalla variazione di energia interna nella trasformazione BC:

$$\Delta E_{BC} = n\, c_V\, \Delta T_{BC} \quad \Longrightarrow \quad \Delta T_{BC} = \frac{\Delta E_{BC}}{n\, c_V} = -43{,}4\ \mathrm{K} \quad \Longrightarrow \quad T_C = T_B + \Delta T_{BC} = 337\ \mathrm{K}\ .$$

Troviamo così $\Delta E_{AC} = nc_V(T_C - T_A) = -888$ J.

Calcoliamo ora W_{AC}. Nel diagramma P-V l'area sottesa dal grafico di una trasformazione reversibile corrisponde al lavoro compiuto dal sistema. Nel nostro caso la superficie compresa tra l'asse V ed il segmento AC è un trapezio rettangolo con le basi parallele all'asse P, in particolare la base maggiore è lunga P_A, la base minore è lunga P_C e l'altezza misura $V_C - V_A = V_B - V_A$. Bisogna quindi trovare P_C. Conosciamo $V_C = V_B$ e T_C, dall'equazione di stato ricaviamo

$$P_C = \frac{n\, R\, T_C}{V_C} = 7{,}15 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa}$$

ed infine otteniamo

$$W_{AC} = \frac{1}{2}(P_A + P_C)(V_C - V_A) = 533\ \mathrm{J}\ .$$

Dal primo principio determiniamo infine

$$Q_{AC} = \Delta E_{AC} + W_{AC} = -355\ \mathrm{J}\ .$$

Vediamo che Q_{AC} è diverso da $Q_{AB} + Q_{BC}$. Infatti il calore non è una variabile di stato, cioè il calore assorbito dal sistema tra gli stati A e C dipende da quale trasformazione si compie.

Esercizio 4

a) Le resistenze R_2 ed R_3 sono collegate in parallelo, pertanto nel circuito si comportano come un'unica resistenza di valore

$$R_{23} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 51\ \Omega\ ,$$

in cui usiamo due cifre significative, come i dati del problema. A questo punto il circuito si comporta come se avesse due resistenze in serie: R_1 ed R_{23} (che formano un partitore di tensione) la cui resistenza equivalente è

$$R = R_1 + R_{23} = 112\ \Omega\ .$$

Quindi la corrente che esce dal generatore vale $I = V/R = 0{,}63$ A ed è anche uguale alla corrente che scorre in R_1:

$$I_1 = I = 0{,}63\ \text{A}\ .$$

La tensione ai capi di R_1 vale

$$V_1 = R_1 I_1 = 39\ \text{V}\ ,$$

per cui la tensione a cui sono sottoposte R_2 ed R_3 vale

$$V_2 = V_3 = V - V_1 = 32\ \text{V}\ .$$

Possiamo così ricavare le correnti che scorrono attraverso R_2 ed R_3:

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = 0{,}36\ \text{A}\ , \qquad I_3 = \frac{V_3}{R_3} = 0{,}27\ \text{A}\ .$$

b) Dai calcoli precedenti, si vede che la resistenza sottoposta alla maggior differenza di potenziale, cioè alla tensione maggiore, è R_1.

c) $p_1 = V_1 I_1 = 24$ W, $p_2 = V_2 I_2 = 12$ W, $p_3 = V_3 R_3 = 8{,}8$ W.

d) La potenza erogata dal generatore è uguale alla somma delle potenze dissipate dalle resistenze nel circuito: $p = p_1 + p_2 + p_3 = 45$ W. Equivalentemente, $p = V\, I = 45$ W.

In un minuto ($\Delta t = 60$ s), il generatore eroga un energia pari a $E = p\, \Delta t = 2700$ J.

e) Indicando con A la sezione del filo, cioè l'area della sua sezione, abbiamo

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{\rho\, l}{R} = 1{,}6 \cdot 10^{-9}\ \text{m}^2 = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{mm}^2\ .$$

Esercizio 5

a) Indicando con p la distanza tra l'oggetto e la lente, con q la distanza tra l'immagine e la lente, si ha

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \; .$$

Se $p = q$ la precedente equazione diventa

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{f} \qquad \Longrightarrow \qquad p = 2f = 1{,}62 \text{ dm}$$

b) L'ingrandimento dell'immagine rispetto all'oggetto è dato da

$$m = \frac{q}{p} = 1 \; .$$

c) Dalle formule precedenti abbiamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \\ m = \frac{q}{p} \end{cases}$$

in cui sono dati f ed $m = 6$ e sono incognite p e q. Si può risolvere il sistema ricavando dalla seconda equazione $q = mp$ e sostituendo quest'espressione nella prima equazione:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{mp} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)\frac{1}{p} = \frac{m+1}{m} \cdot \frac{1}{p}$$

da cui

$$p = \frac{m+1}{m} f = 0{,}95 \text{ dm} \; .$$