UNIVERSITA' DI FIRENZE – CDL IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020

Prova scritta "a distanza" di "Matematica Discreta e Logica" del giorno 3 settembre 2020

Soluzione degli esercizi

Esercizio 1

Si dica, motivando la risposta, quanti sono i numeri naturali minori di un milione nella cui scrittura in base dieci

(i) compaiono tutte le cifre $1, 2, 3$ e 4 ciascuna una sola volta (ed eventualmente anche altre cifre) (2 *punti*);

(ii) compaiono soltanto le cifre $1, 2, 3$ e 4, non necessariamente tutte, eventualmente ripetute e comunque disposte in ordine crescente (3 *punti*);

(iii) non compare nessuna delle cifre $1, 2, 3$ e 4 (2 *punti*).

Soluzione – Osserviamo in primo luogo che i numeri naturali minori di un milione sono in corrispondenza biunivoca con le $6-$ple ordinate di cifre decimali: le $6-$ple i cui primi elementi sono uguali a zero corrispondono ai numeri che in base dieci si scrivono con meno di sei cifre.

Per costruire tutte le $6-$ple ordinate di cifre decimali che verificano la condizione (i), possiamo procedere scegliendo la posizione delle quattro cifre richieste (cosa che si può fare in $\binom{6}{4}$ modi diversi), poi scegliendo la cifra che occupa la prima di queste posizioni (cosa che si può fare in 4 modi diversi), poi scegliendo la cifra che occupa la seconda di queste posizioni (cosa che si può fare in 3 modi diversi), poi disponendo le ultime due cifre nelle ultime due posizioni (cosa che si può fare in due modi diversi), poi scegliendo la prima delle rimanenti cifre (cosa che si può fare in 6 modi diversi, poi scegliendo l'ultima cifra (cosa che si può fare ancora in 6 modi diversi: applicando infine il porincipio di moltiplicazione, si trova cheil numero delle $6-$ple ordinate di cifre decimali che verificano la condizione (i) è

$$\binom{6}{4} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 = 12\,960\,.$$

I numeri che soddisfano la condizione (ii) si suddividono in modo naturale in tre sottoinsiemi a due a due disgiunti: i numeri formati da quattro cifre, quelli formati da cinque cifre e quelli formati da sei cifre; conviene contare quanti sono i numeri in ciascun sottoinsieme e poi applicare il principio di addizione. I numeri formati da quattro cifre in cui compaiono soltanto le cifre $1, 2, 3$ e 4 disposte in ordine crescente sono individuati da una scelta di quattro elementi, anche ripetuti, fra questi quattro, e dunque sono in numero di $\binom{4+4-1}{4}$; i numeri formati da cinque cifre in cui compaiono soltanto le cifre $1, 2, 3$ e 4 disposte in ordine crescente sono individuati da una scelta di cinque elementi, anche ripetuti, fra questi quattro, e dunque sono in numero di $\binom{4+5-1}{5}$; infine, i numeri formati da sei cifre in cui compaiono soltanto le cifre $1, 2, 3$ e 4 disposte in ordine crescente sono individuati da una scelta di sei elementi, anche ripetuti, fra questi quattro, e dunque sono in numero di $\binom{4+6-1}{6}$. Applicando il principio di addizione, si trova che i numeri che soddisfano la condizione (ii) sono

$$\binom{7}{4} + \binom{8}{5} + \binom{9}{6} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 35 + 56 + 84 = 175\,.$$

Per costruire infine tutte le $6-$ple ordinate di cifre decimali che verificano la condizione (iii), basta osservare che ciascuna cifra si può scegliere in sei modi diversi e applicare poi il principio di moltiplicazione, ottenendo 6^6, cioè $46\,656$.

Esercizio 2

Si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n} j^3 .$$

Soluzione – Conviene procedere per induzione su n. Se $n := 1$, è immediato verificare che

$$\left(\sum_{i=0}^{1} i\right)^2 = (0+1)^2 = 1 = 0^3 + 1^3 = \sum_{i=0}^{1} j^3 .$$

Supponiamo dunque che l'asserto sia vero per n e proviamolo per $n+1$: dobbiamo dimostrare che

(*)
$$\left(\sum_{i=0}^{n+1} i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n+1} j^3 .$$

Si ha

$$\left(\sum_{i=0}^{n+1} i\right)^2 = \left(\sum_{i=0}^{n} i + (n+1)\right)^2 = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2 + 2(n+1)\left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + (n+1)^2 =$$

(tenendo conto dell'ipotesi di induzione)

$$= \sum_{i=0}^{n} j^3 + 2(n+1)\left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + (n+1)^2.$$

Per dimostrare la (*) basterà dunque provare che

$$(n+1)^3 = 2(n+1)\left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + (n+1)^2$$

cioè (dividendo ambo i membri per $n+1$) che

$$(n+1)^2 = 2\left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + (n+1)$$

ossia che

$$\sum_{i=0}^{n} i = \tfrac{(n+1)^2-(n+1)}{2} .$$

Questa uguaglianza, a sua volta, si prova facilmente per induzione su n. Se $n := 1$, è immediato verificare che

$$\sum_{i=0}^{1} i = 0 + 1 = 1 = \tfrac{(1+1)^2-(1+1)}{2}\,.$$

Supponiamo dunque che l'asserto sia vero per n e proviamolo per $n+1$: dobbiamo dimostrare che

(**) $$\sum_{i=0}^{n+1} i = \tfrac{(n+2)^2-(n+2)}{2}\,.$$

Si ha

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) =$$

(tenendo conto dell'ipotesi di induzione)

$$= \tfrac{(n+1)^2-(n+1)}{2} + (n+1) = \tfrac{(n+1)^2-(n+1)+2(n+1)}{2} = \tfrac{(n+1)^2+(n+1)}{2}\,.$$

Per completare la dimostrazione, basta verificare che

$$(n+2)^2 - (n+2) = (n+1)^2 + (n+1)\,.$$

In effetti,

$$(n+2)^2 - (n+2) = n^2 + 4n + 4 - n - 2 = n^2 + 3n + 2$$

e

$$(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + 3n + 2\,.$$

La dimostrazione è così completa.

Esercizio 3

Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica se è vera (dimostrandolo) oppure è falsa (esibendo un controesempio):

(a) Se 45 oggetti vengono distribuiti fra dieci scatole, dopo la distribuzione ci sono almeno due scatole che contengono lo stesso numero di oggetti.

(b) Comunque si scelgano 5 punti in un triangolo equilatero di lato 2, fra essi ve ne sono almeno 2 la cui distanza non è superiore a 1 .

(c) Per ogni permutazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$$

dell'insieme $\mathcal{I} := \{1, 2, \ldots, 9\}$, il prodotto

$$(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)(a_4-4)(a_5-5)(a_6-6)(a_7-7)(a_8-8)(a_9-9)$$

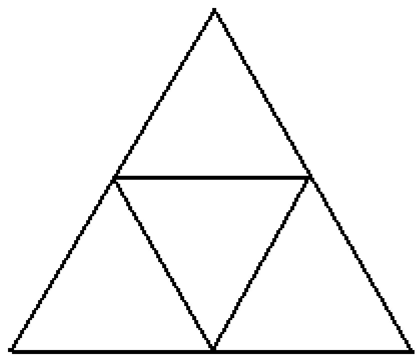
è pari.

Soluzione – L'affermazione (a) è falsa: se le dieci scatole all'inizio sono tutte vuote, possiamo distribuire i 45 oggetti mettendone 1 nella seconda scatola, 2 nella terza, 3 nella quarta e così via: dopo la distribuzione le scatole conterranno rispettivamente

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

ogetti, quindi non ci saranno due scatole che contengono lo stesso numero di oggetti.

L'affermazione (b) è vera. Il triangolo può essere suddiviso in quattro triangoli equilateri di lato 1, così:



Per il principio dei buchi di piccionaia, almeno due punti devono appartenere allo stesso triangolo di lato 1, e quindi la loro distanza sarà al più 1 .

Anche l'affermazione (c) è vera: se il prodotto considerato fosse dispari, tutti i fattori sarebbero dispari e in particolare a_1, a_3, a_5, a_7 e a_9 sarebbero tutti pari; ma questo è impossibile perché (per definizione di permutazione) a_1, a_3, a_5, a_7 e a_9 sono tutti diversi fra loro e possono assumere soltanto i valori $2, 4, 6$ e 8 .

<u>Esercizio 4</u>

Sia $\mathcal{G}$ un grafo connesso senza orientamento disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati con dieci vertici (dei quali cinque hanno grado 2, uno ha grado 4 e i rimanenti hanno tutti lo stesso grado g_0) e cinque facce (tutte, tranne una, col bordo formato da cinque lati).
Si dica, motivando la risposta,

- qual è il valore di g_0 (2 *punti*) ;
- se $\mathcal{G}$ è euleriano (1 *punto*) ;
- se $\mathcal{G}$ è hamiltoniano (4 *punti*) .

Soluzione – Per la formula di Euler, il numero λ dei lati di $\mathcal{G}$ soddisfa la relazione

$$10 - \lambda + 5 = 2$$

e dunque $\lambda = 13$. Pertanto la somma dei gradi dei dieci vertici è 26, cioè

$$5 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + (10 - 6) \cdot g_0 = 26$$

da cui si ricava subito che $g_0 = 3$.

Poiché in $\mathcal{G}$ ci sono vertici di grado dispari, $\mathcal{G}$ non è euleriano.

Poiché non conosciamo $\mathcal{G}$, non possiamo cercare direttamente un ciclo hamiltoniano in $\mathcal{G}$, e certamente il teorema di Ore non è applicabile; possiamo però cercare di escludere la possibilità che $\mathcal{G}$ sia hamiltoniano applicando il teorema di Grinberg: infatti, ogni lato appartiene al bordo di esattamente due facce (altrimenti in $\mathcal{G}$ ci sarebbero vertici di grado uno) e dunque la quinta faccia ha il bordo formato da sei lati. Supponiamo che in $\mathcal{G}$ ci sia un ciclo hamiltoniano $\mathcal{C}$, e indichiamo

- con e_5 il numero delle facce esterne a $\mathcal{C}$ col bordo formato da 5 lati
- con i_5 il numero delle facce interne a $\mathcal{C}$ col bordo formato da 5 lati
- con e_6 il numero delle facce esterne a $\mathcal{C}$ col bordo formato da 6 lati
- con i_6 il numero delle facce interne a $\mathcal{C}$ col bordo formato da 6 lati .

Per il teorema di Grinberg deve essere

$$3(e_5 - i_5) + 4(e_6 - i_6) = 0$$

ossia, poiché c'è una sola faccia col bordo formato da 6 lati, $\qquad 3(e_5 - i_5) = \pm 4$

e ciò è assurdo perché 3 non divide 4. Dunque possiamo concludere che $\mathcal{G}$ non è un grafo hamiltoniano.

Esercizio 5

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio della logica dei predicati con un simbolo di costante (c) e due simboli di predicato unari (P, Q). Sia x una variabile individuale di $\mathcal{L}$.

Si stabilisca, motivando la risposta, se in $\mathcal{L}$

$$(\forall x)\neg \mathrm{P}(x) \wedge (\exists x)\mathrm{P}(x) \models \mathrm{Q}(c) \wedge \neg \mathrm{Q}(c)\,.$$

Soluzione — La formula $\mathrm{Q}(c) \wedge \neg \mathrm{Q}(c)$ è conseguenza logica della formula $(\forall x)\neg \mathrm{P}(x) \wedge (\exists x)\mathrm{P}(x)$ se e soltanto se la formula

$$\varphi := (\forall x)\neg \mathrm{P}(x) \wedge (\exists x)\mathrm{P}(x) \wedge \neg(\mathrm{Q}(c) \wedge \neg \mathrm{Q}(c))$$

è insoddisfacibile. Trasformiamo φ in una formula logicamente equivalente in forma normale prenessa:

$$\varphi \equiv (\forall x)\neg \mathrm{P}(x) \wedge (\exists y)\mathrm{P}(y) \wedge (\neg \mathrm{Q}(c) \vee \mathrm{Q}(c)) \equiv (\exists y)(\forall x)(\neg \mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{P}(y) \wedge (\neg \mathrm{Q}(c) \vee \mathrm{Q}(c)))$$

La formula così ottenuta si può skolemizzare introducendo nel linguaggio un simbolo di costante k, sopprimendo il quantificatore esistenziale $\exists y$ e sostituendo ovunque il simbolo di costante k alla variabile individuale y. Si ottiene la formula

$$(\forall x)(\neg \mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{P}(k) \wedge (\neg \mathrm{Q}(c) \vee \mathrm{Q}(c)))$$

che dà luogo allo schema di clausole

$$\{\{\neg \mathrm{P}(x)\}, \{\mathrm{P}(k)\}, \{\neg \mathrm{Q}(c), \mathrm{Q}(c)\}\}\,.$$

Poiché l'universo di Herbrand consiste dei soli simboli di costante c e k, si ottiene lo schema di clausole

$$\{\{\neg \mathrm{P}(c)\}, \{\neg \mathrm{P}(k)\}, \{\mathrm{P}(k)\}, \{\neg \mathrm{Q}(c), \mathrm{Q}(c)\}\}$$

che è soddisfacibile se e soltanto se lo è la φ. Poiché abbiamo un numero finito di clausole, possiamo applicare l'algoritmo di Davis e Putnam!

Sopprimiamo la clausola $\{\neg \mathrm{Q}(c), \mathrm{Q}(c)\}$ che è una tautologia, e consideriamo l'insieme

$$\{\{\neg \mathrm{P}(c)\}, \{\neg \mathrm{P}(k)\}, \{\mathrm{P}(k)\}\}$$

Pivot $\mathrm{P}(k)$:

clausole non contenenti né $\mathrm{P}(k)$ né $\neg \mathrm{P}(k)$: $\neg \mathrm{P}(c)$.

$\mathrm{Ris}_{\mathrm{P}(k)}(\{\neg \mathrm{P}(k)\}, \{\mathrm{P}(k)\}) = []$;

$$\{\{\neg \mathrm{P}(c)\}, []\}$$

Poiché abbiamo ottenuto la clausola vuota, la formula da cui siamo partiti non è soddisfacibile e quindi $\mathrm{Q}(c) \wedge \neg \mathrm{Q}(c)$ è effettivamente conseguenza logica di $(\forall x)\neg \mathrm{P}(x) \wedge (\exists x)\mathrm{P}(x)$.