

UNIVERSITA' DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA PRELIMINARE "IN PRESENZA"
PER L'ESAME DI "MATEMATICA DISCRETA E LOGICA" - 20200903

Avvertenze

Tutte le pagine devono essere progressivamente e ordinatamente numerate con i numeri naturali da 1 a n .

All'inizio di *ogni pagina* devono essere indicati: il nome e il cognome del candidato (in questo ordine) e il numero di matricola del candidato.

Il voto dell'elaborato risulterà dalla somma dei punteggi conseguiti nello svolgimento dei singoli esercizi diminuita di k punti, con $0 \leq k \leq 3$ dipendente da quante delle precedenti indicazioni non sono state rispettate.

Il candidato è tenuto a *scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni*: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato *non svolto*.

Esercizio 1 (3 punti)

Sia n il numero che in base *quindici* si scrive

$$9C30.$$

Si scriva n in base *quattordici*.

Esercizio 2 (3 punti)

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 7 & 2 & 5 & 9 & 12 & 8 & 4 & 3 & 10 & 1 & 11 \end{pmatrix},$$

$$\beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 8 & 10 & 9 & 7 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 & 1 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β .

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

Esercizio 3 (5 punti)

Sia \mathbb{Z}_{847} l'anello delle classi di resto modulo 847. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di \mathbb{Z}_{847} a cui z appartiene. Per ciascuno dei seguenti elementi di \mathbb{Z}_{847} si stabilisca, motivando la risposta, se è invertibile in \mathbb{Z}_{847} e nel caso che la risposta sia affermativa si dica quanti inversi ha e si determini esplicitamente ogni suo inverso:

$$[56], \quad [256], \quad [319].$$

Esercizio 4 (4 punti)

Sia \mathbb{Z}_{6413} l'anello delle classi di resto modulo 6413. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di \mathbb{Z}_{6413} a cui z appartiene.

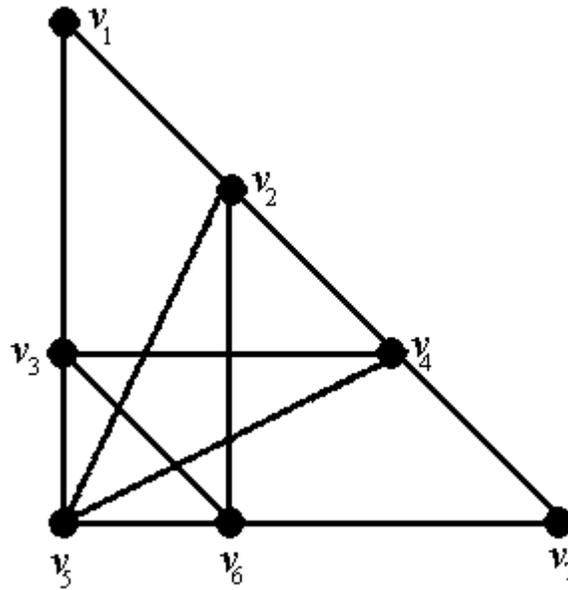
Si dica, motivando la risposta, quanti sono i numeri interi positivi $x \in \mathbb{Z}^+$ per i quali

$$[52]^x = [1]$$

e, se ne esistono, se ne trovino almeno due.

Esercizio 5 (6 punti)

Sia \mathcal{G} il grafo senza orientamento con 7 vertici ($v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ e v_7), qui disegnato:



Si dica, motivando ciascuna risposta:

(i) se \mathcal{G} è semplice;

(ii) che grado ha ciascun vertice di \mathcal{G} , e che legame c'è fra la somma di tutti i gradi dei vertici di \mathcal{G} e il numero dei lati di \mathcal{G} ;

(iii) se \mathcal{G} è piano;

(iv) se \mathcal{G} è euleriano;

(v) se \mathcal{G} è hamiltoniano.

Nelle risposte, qualora si voglia far riferimento a cammini di \mathcal{G} , si indichi con ℓ_{ij} il lato di estremi v_i e v_j .

Esercizio 6 (5 punti)

Siano x, y, z, t, u, w variabili proposizionali. Si stabilisca, motivando la risposta, se il seguente insieme \mathbf{K} di clausole è soddisfacibile; e, nel caso che la risposta sia affermativa, si determini una valutazione di verità che lo soddisfa:

$$\mathbf{K} := \{\{x, y\}, \{\neg x, y\}, \{x, \neg z\}, \{\neg x, t\}, \{\neg y, t\}, \{t, z\}, \{\neg t, \neg w\}, \{y, \neg t, u\}, \\ \{u, w, z\}, \{\neg u, w, \neg z\}, \{\neg u, \neg w, z\}, \{w, t, \neg z\}\}.$$

Esercizio 7 (4 punti)

Sia \mathcal{L} un linguaggio della logica dei predicati con un simbolo di costante (c) e due simboli di predicato unari (P, Q). Sia x una variabile individuale di \mathcal{L} .

Si stabilisca, motivando la risposta, se in \mathcal{L}

$$(\forall x)\neg P(x) \wedge (\exists x)P(x) \models Q(c) \wedge \neg Q(c).$$