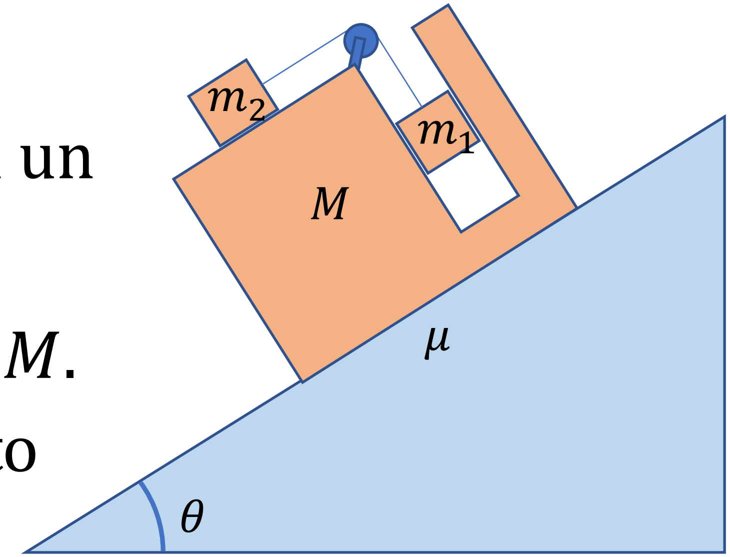
Compito Fisica 1 ETL 7/9/2020

Franco Bagnoli

Esercizio 1



Il sistema in esame è composto da un blocco in cui è stato praticato un buco (lo vediamo in sezione), la massa del blocco (già bucato) è M.

Nel buco può scorrere senza attrito un cilindro di massa m_1.

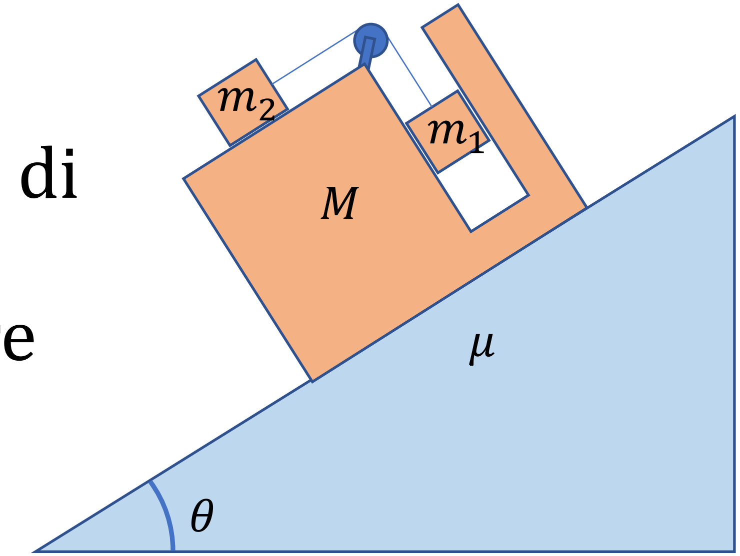
Sopra il blocco M è poggiato un altro blocco di massa m_2, collegato a m_1 da una corda inestensibile e di massa trascurabile, che passa da una carrucola (anche lei di massa trascurabile e senza attriti).

Tra m_2 e M non c'è attrito. Il tutto è posto su un piano, inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale.

Tra blocco M e piano c'è attrito, di coefficiente μ.

1) Supponendo che μ sia tale da tenere fermo il blocco M, per quale angolo θ i due blocchi m_1 e m_2 stanno pure fermi?

Esercizio 1



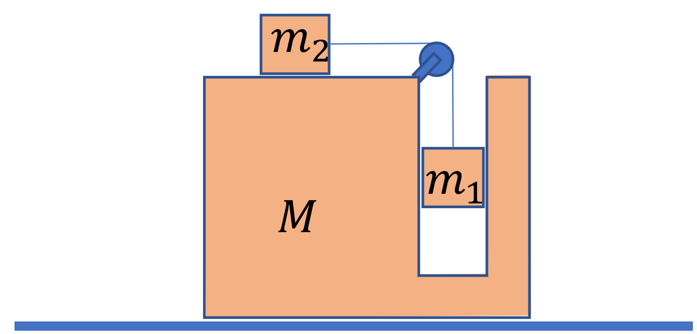
2) Si supponga che il coefficiente di attrito μ tra blocco M e piano sia abbastanza piccolo da permettere al sistema di scendere lungo il piano.

Per quale valore di μ i due blocchi m_1 e m_2 stanno fermi rispetto a M? Il risultato dipende dall'angolo θ?

3) l'angolo θ viene messo a zero (il piano è orizzontale), e si ponga $\mu = 0$.

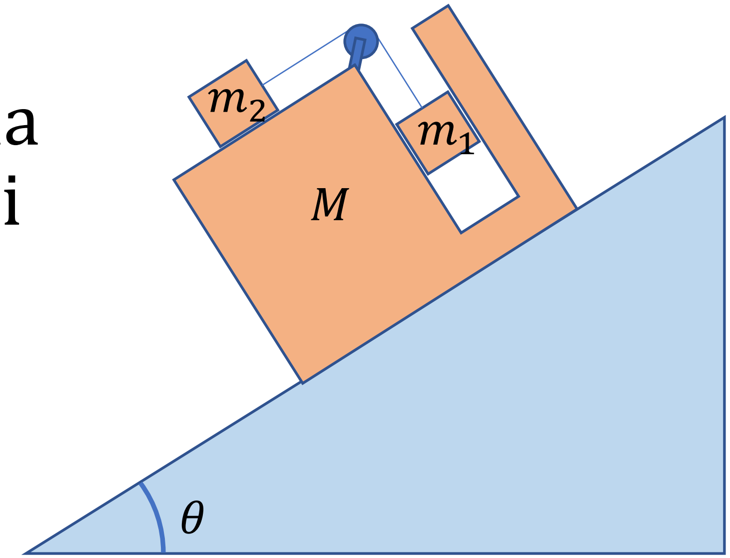
Il sistema viene lasciato andare.

Quanto vale l'accelerazione a del blocco M?



Soluzione esercizio 1-1

1) Prendendo le componenti della forza peso tangenti ai piani su cui i blocchetti strisciano, sul blocco m_1 agisce la forza $m_1 g \cos(\theta)$ e sul blocco m_2 la forza $m_2 g \sin(\theta)$.



Usando la seconda cardinale sulla carrucola abbiamo

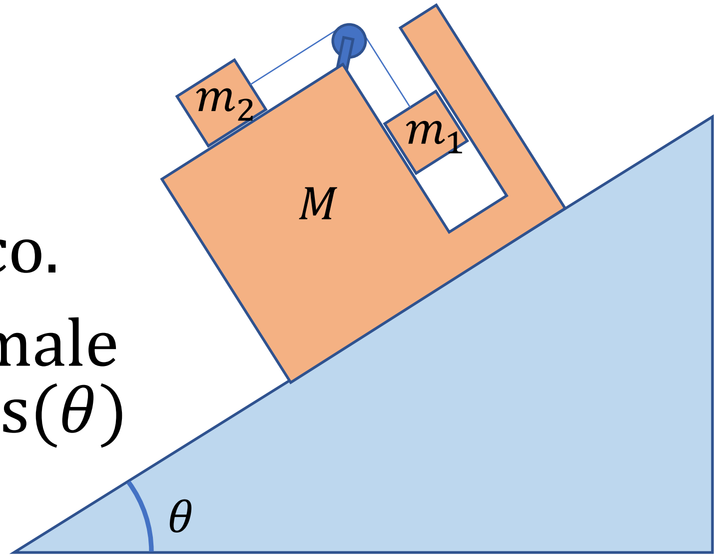
$$m_2 g \sin(\theta) - m_1 g \cos(\theta) = 0$$

da cui

$$\tan(\theta) = \frac{m_1}{m_2}.$$

Soluzione esercizio 1-2

2) Se i blocchi non si muovono rispetto ad M, il tutto scende lungo il piano come se fosse un blocco unico.



La forza premente e la reazione normale sono in modulo $(M + m_1 + m_2)\, g \cos(\theta)$ e la forza tangenziale è $(M + m_1 + m_2)\, g \sin(\theta)$, quindi

$$a = g\,(\sin(\theta) - \mu \cos(\theta))\,.$$

Nel sistema di riferimento del blocco M, l'accelerazione a dà una forza di inerzia diretta parallelamente al piano. Sul blocco m_1 questa forza è neutralizzata dai vincoli, mentre agisce sul blocco m_2. Procedendo come prima abbiamo

$$\mu m_2 g - m_1 g = 0$$

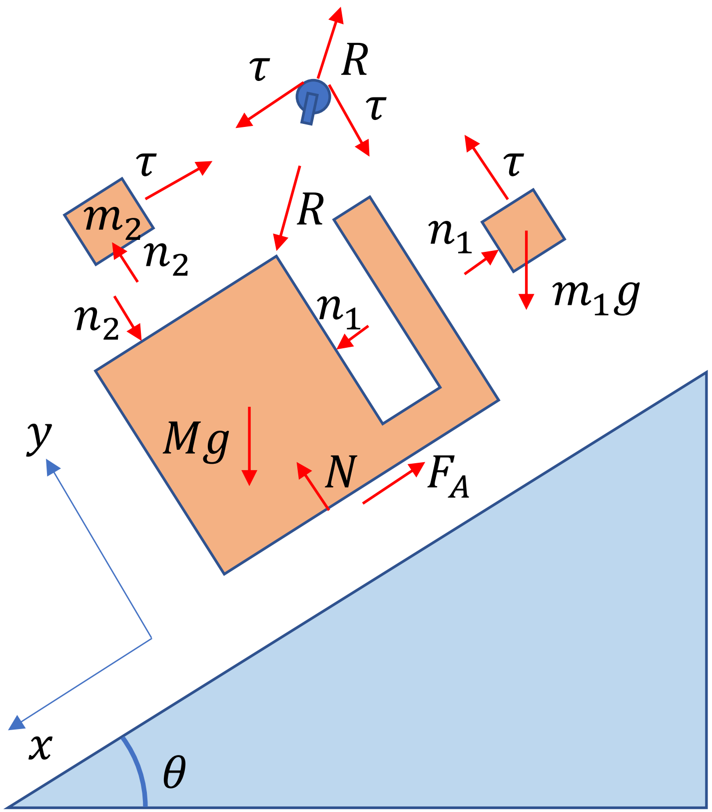
da cui

$$\mu = \frac{m_1}{m_2}$$

indipendentemente da θ (infatti vale anche per $\theta = 0$).

Soluzione esercizio 1-2

Volendo farlo con le forze, ecco quelle da considerare.



Corpo m_1:

$$x)\ m_1 a = -n_1 + m_1 g \cos(\theta)$$
$$y)\ \tau - m_1 g \sin(\theta) = 0\,.$$

Corpo m_2:

$$x)\ m_2 a = m_2 g \cos(\theta) - \tau$$
$$y)\ n_2 - m_2 g \sin(\theta) = 0\,.$$

Carrucola (senza massa):

$$R_x = R_y = \tau.$$

Corpo M:

$$x)\ n_1 + R_x + Mg \sin(\theta) - F_A = Ma$$
$$y)\ N - n_2 - R_y - Mg \cos(\theta) = 0\,.$$

Soluzione esercizio 1-2

Quindi, sostituendo

$$N = (M + m_1 + m_2)g\cos(\theta),$$

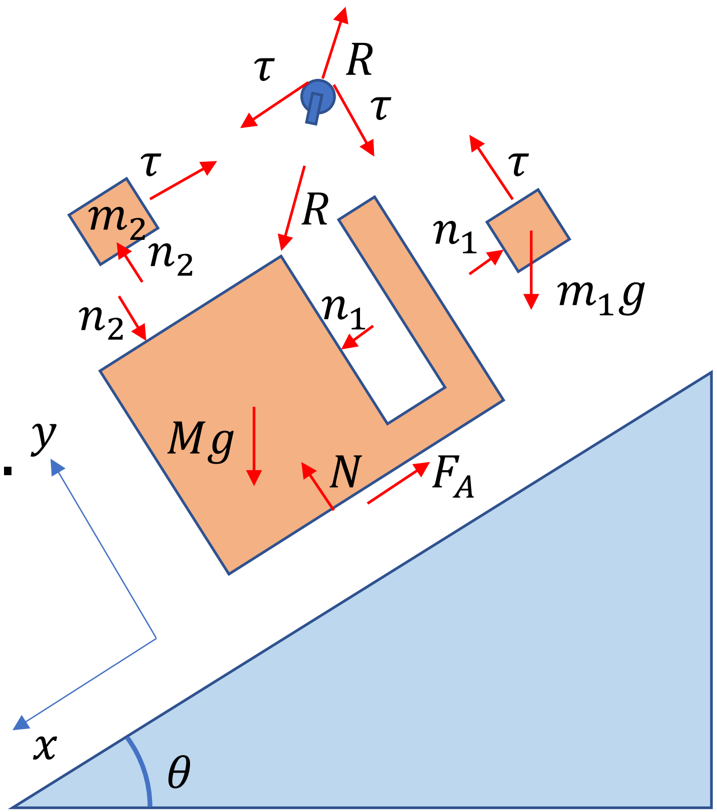
$$F_A = \mu N.$$

$$a = g(\sin(\theta) - \mu\cos(\theta)).$$

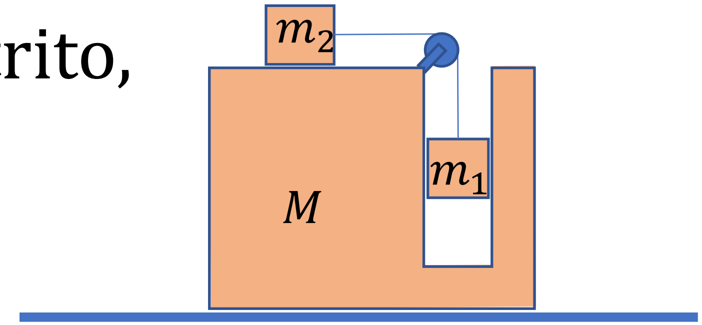
$$m_1 g\cos(\theta) = m_2 a - m_2 g\sin(\theta).$$

E sostituendo a

$$\mu = \frac{m_1}{m_2}.$$



Soluzione esercizio 1-3



3) Nel caso orizzontale, senza attrito, abbiamo che il centro di massa del sistema totale non si sposta orizzontalmente (non ci sono forze esterne orizzontali).

Se il blocco M e m_1 si muovono con accelerazione a, e il blocco m_2 si muove con accelerazione $-a'$, abbiamo

$$(M + m_1)a - m_2 a' = 0.$$

La forza peso di m_1 accelera (con la stessa accelerazione a'), sia m_1 che m_2 quindi

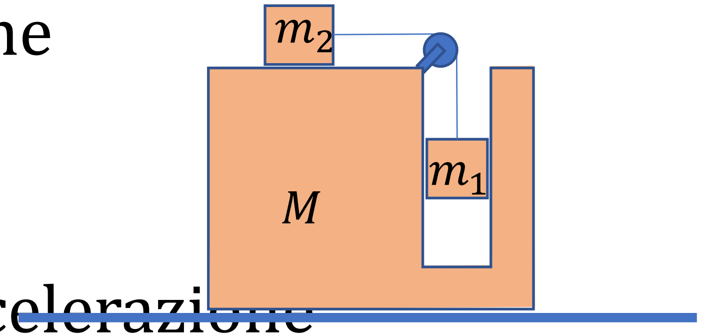
$$(m_1 + m_2)a' = m_1 g \;\Rightarrow\; a' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g,$$

quindi

$$a = \frac{m_2}{M + m_1} a' = \frac{m_1 m_2}{(M + m_1)(m_1 + m_2)} g.$$

Soluzione esercizio 1-3

Con le forze: chiamiamo τ la tensione della corda, che accelera il corpo m_2 con accelerazione a'



$$\tau = m_2 a'$$

Il corpo m_1 scendo con la stessa accelerazione

$$m_1 a' = m_1 g - \tau$$

Da cui

$$a' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g.$$

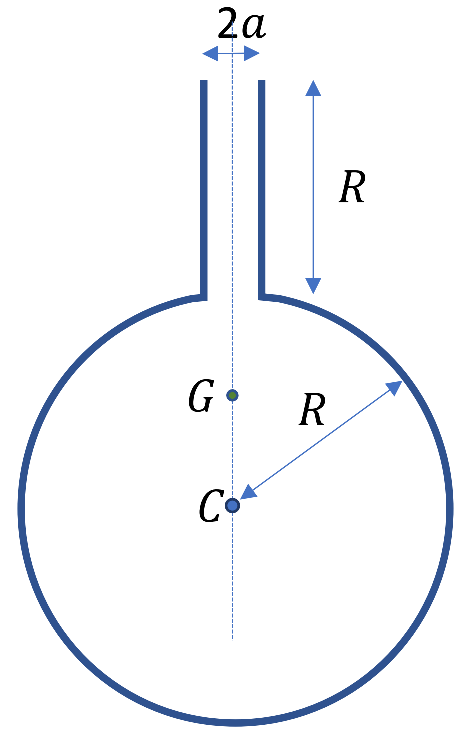
Orizzontalmente, sulla carrucola (che ha massa 0) agisce la tensione τ e una forza F che accelera M e m con accelerazione a

$$(M + m_1)a = \tau = m_2 a' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

E quindi

$$a = \frac{m_1 m_2}{(M + m_1)(m_1 + m_2)} g.$$

Esercizio 2



Un pallone da laboratorio è schematicamente formato da una sfera di raggio R e da un tubo lungo R e di diametro $2a$, come si vede in sezione.

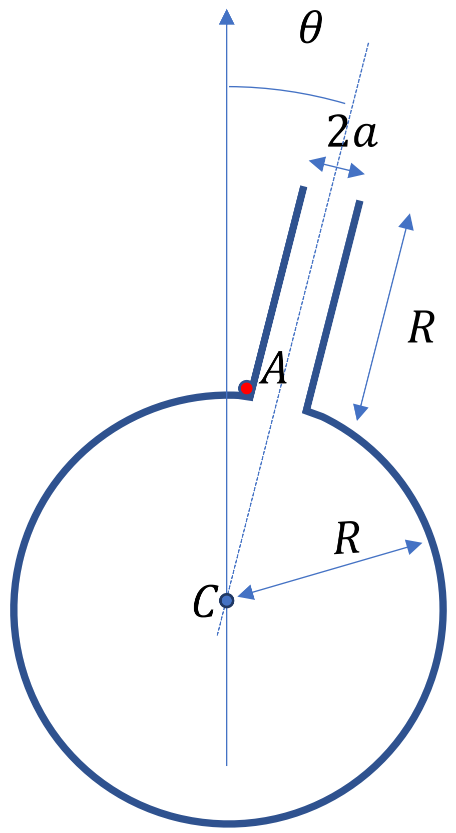
Lo spessore del vetro è trascurabile, e la sua densità superficiale è σ.

1) Trovare la posizione G del centro di massa del sistema e il momento di inerzia baricentrale I_G **rispetto a un asse perpendicolare all'asse del cilindro (uscente dal piano).** Si può trascurare il "foro" di raggio a nella sfera. Indicare le componenti del momento di inerzia senza ridurre l'espressione ai minimi termini.

Nota*: il momento d'inerzia I_S di una guscio sferico di massa m (sfera cava) è $I_s = (2/3)mR^2$. Il momento d'inerzia baricentrale I_T di un tubo (cilindro cavo) lungo R, di raggio a e massa m è $I_T = (1/2)ma^2 + (1/12)mR^2$.*

Esercizio 2

2) La base del cilindro del pallone viene agganciata ad un supporto, libero di ruotare rispetto al punto A della figura attorno ad un asse perpendicolare al piano di figura. Trascurando la massa della pinza, trovare l'angolo θ che l'asse del cilindro fa con la verticale, nell'approssimazione di angoli piccoli ($\sin(\theta) \simeq \theta$).



3) Il pallone fa delle piccole oscillazioni, sempre imperniato liberamente in A. Determinarne il periodo T.

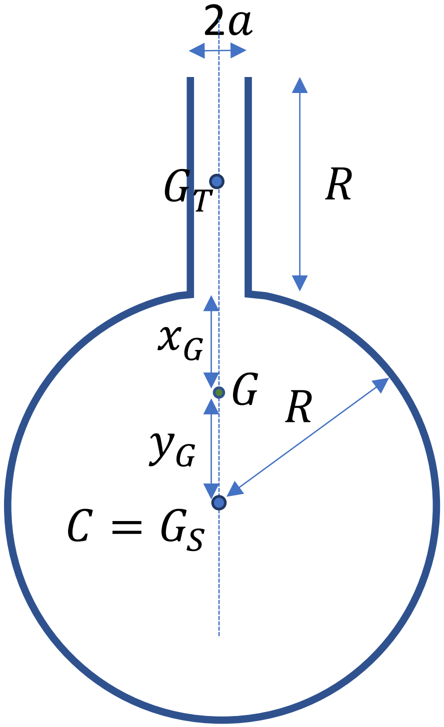
Soluzione esercizio 2-1

1) La massa del guscio sferico è $m_s = 4\pi R^2\sigma$.

Quella del cilindro è $m_T = 2\pi aR\sigma$.

La massa totale è $M = 2\pi R\sigma(2R + a)$.

Indicando con y_G la posizione del c.m. dal centro della sfera abbiamo



$$y_G = \frac{\frac{3}{2}R\,m_t}{M} = \frac{3}{2}\frac{Ra}{2R + a}$$

e la distanza x_G di G dall'inizio del tubo è

$$x_G = R - y_G = \frac{R(4R - a)}{2(2R + a)}.$$

Il momento d'inerzia è

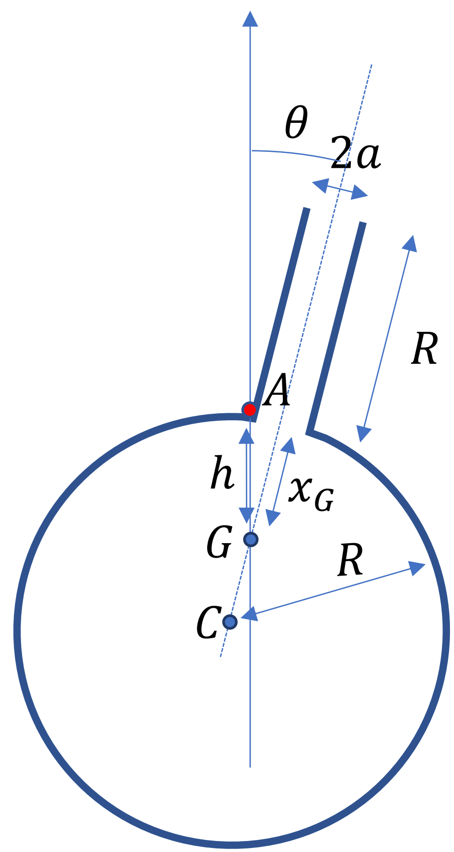
$$I_G = I_S + m_S(R - x_G)^2 + I_T + m_T\left(\frac{R}{2} + x_G\right)^2$$

$$= m_S\left(\frac{2}{3}R^2 + (R - x_G)^2\right) + m_T\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{12}R^2 + \left(\frac{R}{2} + x_G\right)^2\right)$$

Soluzione esercizio 2-2 e 2-3

2) La posizione di equilibrio è tale che il centro di massa sia sotto la verticale di A, quindi (per piccoli angoli)

$$\theta = \frac{a}{x_G} = \frac{2(2R+a)a}{(4R-a)R}$$



3) Il periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo fisico è $T = 2\pi/\omega$ con

$$\omega^2 = \frac{Mgh}{I_A}$$

e

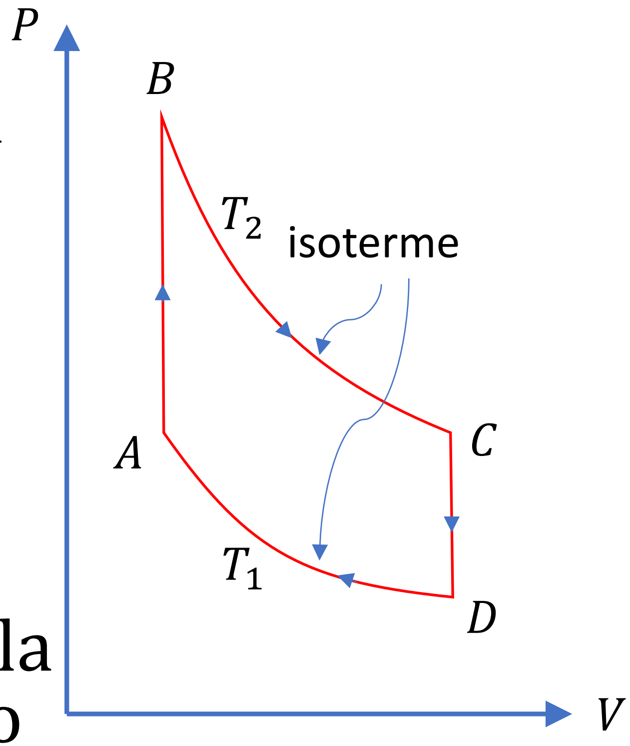
$$I_A = I_G + Mh^2$$

dove

$$h^2 = x_g^2 + a^2 \quad \text{o anche} \quad h = \frac{x_G}{\cos(\theta)}$$

Esercizio 3

Un ciclo Stirling di un gas perfetto è approssimato da due isocore e due isoterme reversibili, come in figura.



Si conoscono pressione e volume dei vari punti A, B, C, D e la temperatura T_1 e T_2 delle due isoterme.

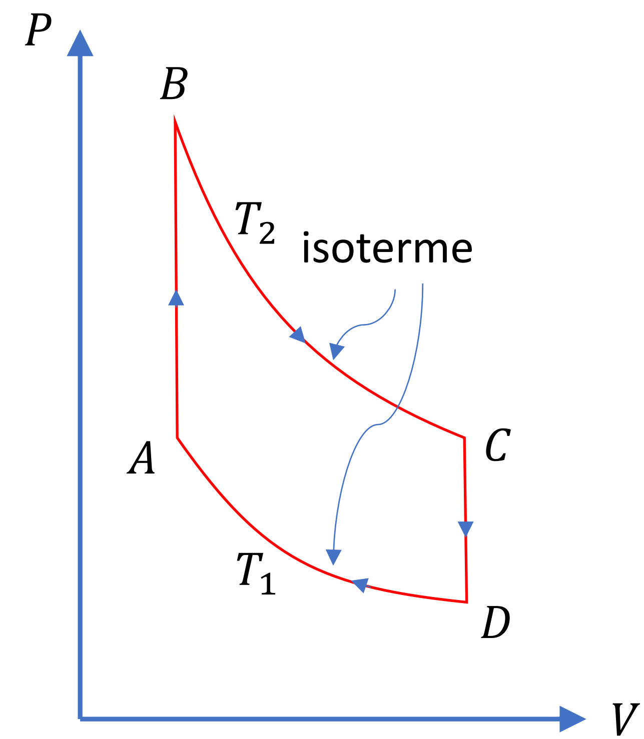
Calcolare il rendimento η del ciclo e la variazione di entropia dell'universo nel caso in cui si abbia un insieme di accumulatori di calore tale che il calore ceduto nella trasformazione $C \to D$ sia riassorbito nella trasformazione $A \to B$ senza salti di temperatura, e nel caso in cui si abbiano solo i due serbatoi di calore a temperatura T_1 e T_2.

Soluzione esercizio 3

1) Nelle isocore non c'è lavoro, quindi il calore scambiato è uguale alla variazione di energia interna $Q = \Delta U = nc_V(T_2 - T_1)$.

Nelle isoterme non c'è variazione di energia interna e quindi il calore è uguale al lavoro

$$Q = W = nRT\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right).$$



In calore/lavoro assorbito in $A \rightarrow B$ è uguale (opposto) a quello ceduto in $C \rightarrow D$.

Il lavoro totale del ciclo è quindi

$$W = Q(B \rightarrow C) - Q(D \rightarrow A)$$
$$= nR(T_2 - T_1)\ln(V_D/V_A).$$

Il calore in ingresso nel caso dei rigeneratori è solo quello della isoterma T_2, $nRT_2\ln(V_D/V_A)$, e quindi

$$\eta = \frac{W}{Q^{\swarrow}} = \frac{nR(T_2 - T_1)\ln(V_D/V_A)}{nRT_2\ln(V_D/V_A)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}; \quad \Delta S = 0.$$

Soluzione esercizio 3

Nel caso invece in cui il calore non venga accumulato ma venga assorbito/ceduto ai serbatoi di calore, nel calore in ingresso va contato anche quello della trasformazione $A \to B$, quindi

$$\eta = \frac{R(T_2 - T_1)\ln(V_D/V_A)}{RT_2\ln(V_D/V_A) + c_V(T_2 - T_1)}.$$

La variazione di entropia della macchina è sempre nulla, ma alla fine il calore assorbito durante la trasformazione $A \to B$ e che viene ceduto (opposto) durante la trasformazione $C \to D$ passa dal serbatoio T_2 al serbatoio T_1, quindi con una variazione di entropia totale

$$\Delta S = nc_V(T_2 - T_1)\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = nc_V\frac{T_2^2 - T_1^2}{T_1 T_2}.$$