

Prova scritta “in presenza” di “Matematica Discreta e Logica” del giorno 23 settembre 2020  
Soluzione degli esercizi

### Esercizio 1

Si dica, motivando la risposta, quanti sono i numeri naturali multipli di nove che in base dieci si scrivono con sette cifre (quindi la prima cifra a sinistra non può essere zero!) anche ripetute disposte da sinistra a destra in ordine crescente.

*Soluzione* – Osserviamo subito che, poiché le cifre devono essere disposte in ordine crescente da sinistra a destra fra esse non può esserci lo zero (perché dovrebbe essere la prima cifra a sinistra, e questo è escluso dalle convenzioni di scrittura dei numeri in base dieci).

Inoltre, poiché ci interessano soltanto i numeri divisibili per nove (tali cioè che la somma delle loro cifre è congrua a zero modulo nove) la scelta di sei delle sette cifre determina la settima (se la somma di queste sei cifre è congrua a  $k$  modulo nove, con  $0 \leq k \leq 9$ , la settima cifra sarà necessariamente  $9 - k$ ).

Dunque i numeri considerati dall'esercizio sono individuati scegliendo sei cifre, anche ripetute, fra 1 e 9 (il loro ordine nella scrittura di ciascun numero è determinato dalla condizione che siano disposte da sinistra a destra in ordine crescente). In tutto sono quindi

$$\binom{9+6-1}{6} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 3}{5 \cdot 4} = 7 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 3 = 3003.$$

### Esercizio 2

In una lotteria di quartiere vengono assegnati alcuni premi di prima categoria (consistenti ciascuno in EUR 17), alcuni premi di seconda categoria (consistenti ciascuno in EUR 12) e alcuni premi di terza categoria (consistenti ciascuno in EUR 9).

In tutto vengono assegnati EUR 305.

Sapendo che il numero dei premi di terza categoria è un quarto del numero totale dei premi, si dica quanti sono i premi assegnati di ciascuna categoria.

*Soluzione* – Indichiamo con  $x$  il numero dei premi di prima categoria, con  $y$  il numero dei premi di seconda categoria e con  $z$  il numero dei premi di terza categoria. In base ai dati del problema abbiamo le relazioni

$$17x + 12y + 9z = 305 \quad \text{e} \quad z = \frac{1}{4}(x + y + z).$$

Dalla seconda relazione si ricava che  $4z = x + y + z$ , ossia  $3z = x + y$  e dunque  $9z = 3x + 3y$ . Sostituendo nella prima relazione troviamo che deve essere

$$17x + 12y + 3x + 3y = 305$$

cioè

$$20x + 15y = 305.$$

Cerchiamo quali valori (necessariamente numeri interi positivi) sostituiti a  $x$  e  $y$  rendono vera l'uguaglianza: siamo quindi di fronte a un'equazione diofantina nelle incognite  $x$  e  $y$ . Per risolverla, calcoliamo innanzitutto con l'algoritmo di Euclide il MCD fra 20 e 15:

$$20 = 15 \cdot 1 + 5;$$

$$15 = 5 \cdot 3 + 0.$$

Il massimo comun divisore fra 20 e 15 è dunque 5; poiché si tratta di un divisore di 305 ( $= 5 \cdot 61$ ), l'equazione proposta ha soluzione.

Cerchiamo adesso una soluzione per l'equazione

$$20x + 15y = 5.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$5 = 20 \cdot 1 - 15 \cdot 1.$$

Dunque: una soluzione dell'equazione  $20x + 15y = 5$  è  $(1, -1)$ ; una soluzione dell'equazione  $20x + 15y = 305$  è pertanto  $(61, -61)$ . La generica soluzione di quest'ultima equazione è allora

$$x := 61 - \frac{15}{5}h, \quad y := -61 + \frac{20}{5}h \quad (\text{al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

ossia

$$x := 61 - 3h, \quad y := -61 + 4h \quad (\text{al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Nel nostro caso entrambi i valori di  $x$  e  $y$  devono essere non negativi (e la loro somma, che vale  $3z$ , deve essere un multiplo di 3). Si ha

$$61 - 3h \geq 0 \quad \text{se e soltanto se} \quad h \leq \frac{61}{3} = 20,3$$

$$-61 + 4h \geq 0 \quad \text{se e soltanto se} \quad h \geq \frac{61}{4} = 15,25.$$

Dobbiamo quindi considerare soltanto quattro possibilità per  $h$ , cioè

$$h := 16 \quad (\text{per cui } x = 13 \quad \text{e} \quad y = 3);$$

$$h := 17 \quad (\text{per cui } x = 10 \quad \text{e} \quad y = 7);$$

$$h := 18 \quad (\text{per cui } x = 7 \quad \text{e} \quad y = 11);$$

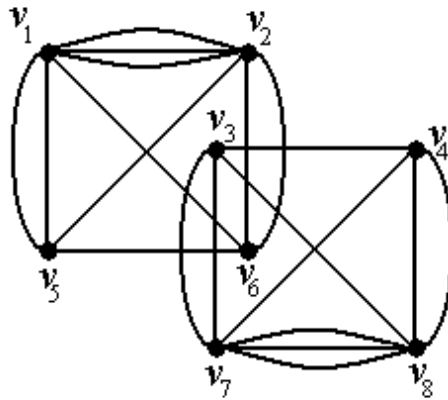
$$h := 19 \quad (\text{per cui } x = 4 \quad \text{e} \quad y = 15);$$

$$h := 20 \quad (\text{per cui } x = 1 \quad \text{e} \quad y = 19).$$

Soltanto per  $h := 18$  la somma  $x + y$  è multipla di 3 e ci permette di ricavare un valore intero per  $z$ . Dunque  $x = 7$ ,  $y = 11$  e  $z = 6$ .

### Esercizio 3

Sia  $\mathcal{G}$  il grafo con 8 vertici e 20 lati qui disegnato:

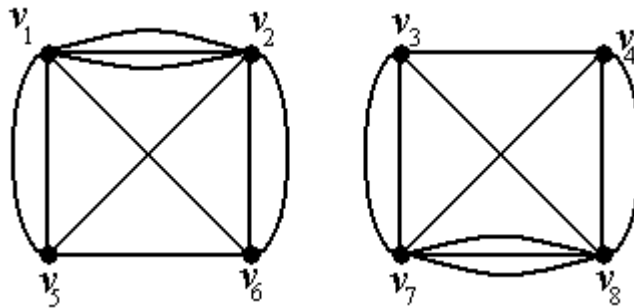


Si dica, motivando ciascuna risposta:

- (i) se  $\mathcal{G}$  è semplice ;
- (ii) se  $\mathcal{G}$  è piano (= planare) ;
- (iii) se  $\mathcal{G}$  è euleriano ;
- (iv) se in  $\mathcal{G}$  esiste un cammino euleriano ;
- (v) se  $\mathcal{G}$  è hamiltoniano .

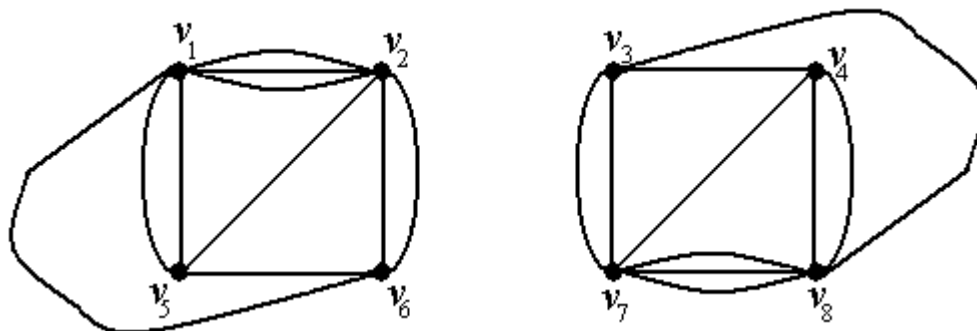
*Soluzione* – Il grafo  $\mathcal{G}$  non è semplice perché ci sono lati paralleli: ad esempio, fra i vertici  $v_1$  e  $v_2$  ci sono tre lati.

Per rispondere alle altre quattro domande conviene ridisegnare il grafo così:



Si nota subito che il grafo non è connesso e quindi non è euleriano, non ha cammini euleriani e nemmeno è hamiltoniano.

Infine, il grafo può essere disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati (e quindi è un grafo piano) come segue:



#### Esercizio 4

Si stabilisca se dalle premesse

- (i) Per ogni intraprendente c'è una donna che lo ama;
- (ii) chi è intelligente è intraprendente;
- (iii) Anna è una donna intelligente;

si può dedurre logicamente che

- (iv) qualcuno ama Anna;

formalizzando le (i), (ii), (iii) e (iv) in un opportuno linguaggio della logica dei predicati nel quale va precisato con chiarezza il significato dei simboli usati.

Si esprima quanto richiesto dall'esercizio attraverso lo studio della soddisfacibilità di un'opportuna formula del linguaggio; la si traduca in un insieme di clausole, e si effettui se possibile una confutazione oppure si trovi un modello adeguato al linguaggio nel quale le (i), (ii) e (iii) sono vere ma la (iv) è falsa.

*Soluzione* – Consideriamo un linguaggio della logica dei predicati con tre simboli di predicato unario (I, D, J), un simbolo di predicato binario (L) e un simbolo di costante (a) che interpretiamo come segue per tradurre le premesse date:

- $I(x) := x$  è intraprendente;
- $D(x) := x$  è donna;
- $J(x) := x$  è intelligente;
- $L(x, y) := x$  ama  $y$ ;
- $a :=$  Anna .

In questo linguaggio le premesse diventano:

- (i)  $(\forall x)(I(x) \rightarrow (\exists y)(D(y) \wedge L(y, x)))$  ;
- (ii)  $(\forall x)(J(x) \rightarrow I(x))$  ;
- (iii)  $D(a) \wedge J(a)$  ;

e la supposta conclusione diventa

- (iv)  $(\exists x)L(x, a)$  .

Dobbiamo pertanto vedere se

$$\{(\forall x)(I(x) \rightarrow (\exists y)(D(y) \wedge L(y, x))), (\forall x)(J(x) \rightarrow I(x)), D(a) \wedge J(a)\} \models (\exists x)L(x, a)$$

ossia se la formula ben formata  $\varphi$  definita da

$$\varphi := (\forall x)(I(x) \rightarrow (\exists y)(D(y) \wedge L(y, x))) \wedge (\forall x)(J(x) \rightarrow I(x)) \wedge D(a) \wedge J(a) \wedge \neg((\exists x)L(x, a))$$

è o non è soddisfacibile.

Scriviamo  $\varphi$  in forma normale prenessa in modo che la parte che segue i quantificatori sia in forma normale congiuntiva:

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv (\forall x)(\neg I(x) \vee (\exists y)(D(y) \wedge L(y, x))) \wedge (\forall x)(\neg J(x) \vee I(x)) \wedge D(a) \wedge J(a) \wedge (\forall x)(\neg L(x, a)) \equiv \\ &\equiv (\forall x)((\neg I(x) \vee (\exists y)(D(y) \wedge L(y, x))) \wedge (\neg J(x) \vee I(x)) \wedge D(a) \wedge J(a) \wedge (\neg L(x, a))) \equiv \\ &\equiv (\forall x)(\exists y)((\neg I(x) \vee (D(y) \wedge L(y, x))) \wedge (\neg J(x) \vee I(x)) \wedge D(a) \wedge J(a) \wedge (\neg L(x, a))) \equiv \\ &\equiv (\forall x)(\exists y)((\neg I(x) \vee D(y)) \wedge (\neg I(x) \vee L(y, x)) \wedge (\neg J(x) \vee I(x)) \wedge D(a) \wedge J(a) \wedge (\neg L(x, a))) \end{aligned}$$

Per skolemizzare questa formula sopprimiamo il quantificatore esistenziale ( $\exists y$ ) introducendo un simbolo di funzione unaria  $f$  e sostituendo ovunque la variabile individuale  $y$  con  $f(x)$ .

Otteniamo la formula

$$(\forall x)((\neg I(x) \vee D(f(x))) \wedge (\neg I(x) \vee L(f(x), x)) \wedge (\neg J(x) \vee I(x)) \wedge D(a) \wedge J(a) \wedge (\neg L(x, a)))$$

alla quale resta associato il seguente schema di clausole:

$$\{\{-I(x), D(f(x))\}, \{-I(x), L(f(x), x)\}, \{-J(x), I(x)\}, \{D(a)\}, \{J(a)\}, \{-L(x, a)\}\}.$$

Poiché l'universo di Herbrandt è infinito, non possiamo applicare l'algoritmo di Davis e Putnam ma dobbiamo cercare una confutazione rapida; per fortuna la cosa questa volta è particolarmente semplice.

Poniamo

$$\mathcal{C}_1(x) := \{-I(x), L(f(x), x)\};$$

$$\mathcal{C}_2(x) := \{-J(x), I(x)\};$$

$$\mathcal{C}_3 := \{J(a)\};$$

$$\mathcal{C}_4(x) := \{-L(x, a)\}.$$

Una possibile confutazione rapida è:

$$\mathcal{C}_5 := \mathcal{C}_1(a) := \{-I(a), L(f(a), a)\};$$

$$\mathcal{C}_6 := \mathcal{C}_4(f(a)) = \{-L(f(a), a)\};$$

$$\mathcal{C}_7 := \text{Ris}_{L(f(a), a)}(\mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6) = \{-I(a)\};$$

$$\mathcal{C}_8 := \mathcal{C}_2(a) = \{-J(a), I(a)\};$$

$$\mathcal{C}_9 := \text{Ris}_{I(a)}(\mathcal{C}_7, \mathcal{C}_8) = \{-J(a)\};$$

$$\mathcal{C}_{10} := \text{Ris}_{J(a)}(\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_9) = \square.$$

Avendo ottenuto la clausola vuota, abbiamo provato che la formula  $\varphi$  non è soddisfacibile e che quindi dalle (i), (ii) e (iii) si può dedurre logicamente la (iv).

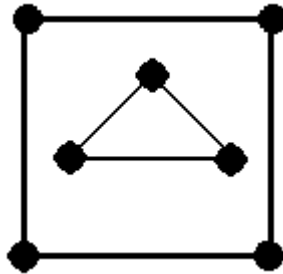
### Esercizio 5

Vediamo per ogni enunciato il valore di verità.

Per ogni (multi)grafo finito  $\mathcal{G}$  senza orientamento, se ogni vertice di  $\mathcal{G}$  ha grado pari,  $\mathcal{G}$  è euleriano.

**Falso!**

Nel grafo qui disegnato ogni vertice ha grado pari ma non c'è un circuito euleriano.



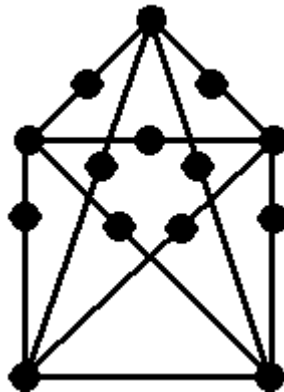
Per ogni grafo finito  $\mathcal{G}$  senza orientamento, semplice e senza cappi, con calibro 5,  $n$  vertici e  $\lambda$  lati, se  $3\lambda \leq 5(n - 2)$  allora  $\mathcal{G}$  è un grafo piano.

**Falso!**

Nel grafo qui disegnato il calibro è 5,  $n = 14$ ,  $\lambda = 19$  e quindi

$$3\lambda = 57 < 60 = 5(n - 2)$$

ma il grafo non può essere disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati perché è una suddivisione di  $\mathcal{K}_5$ .



Il grafo completo (senza orientamento)  $\mathcal{K}_{98}$  su 98 vertici è euleriano.

**Falso!**

Ciascun vertice di  $\mathcal{K}_{98}$  ha grado dispari 97; quindi per il teorema di Euler  $\mathcal{K}_{98}$  non è euleriano.

Il grafo completo (senza orientamento)  $\mathcal{K}_{98}$  su 98 vertici è hamiltoniano.

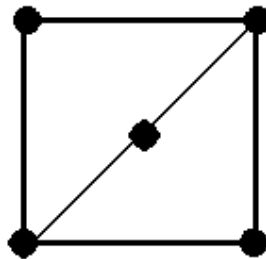
**Vero!**

Ogni grafo completo è hamiltoniano.

Per ogni grafo finito  $\mathcal{G}$  senza orientamento, semplice e senza cappi, se  $\mathcal{G}$  è 2 – connesso allora  $\mathcal{G}$  è hamiltoniano.

**Falso!**

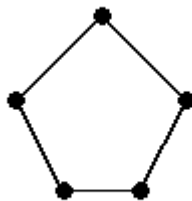
Il grafo qui disegnato è 2 – connesso ma non è hamiltoniano (*Esercizio*: lo si dimostri applicando il teorema di Grinberg).



Per ogni grafo finito  $\mathcal{G}$  senza orientamento, semplice e senza cappi, **hamiltoniano**, con  $n \geq 3$  vertici, si ha che  $gr_{\mathcal{G}}(v) + gr_{\mathcal{G}}(w) \geq n$  comunque presi due vertici  $v, w$  non adiacenti.

**Falso!**

Il grafo finito senza orientamento  $\mathcal{G}$  con 5 vertici qui disegnato è hamiltoniano, ma comunque presi due vertici  $v, w$  di  $\mathcal{G}$  si ha  $gr_{\mathcal{G}}(v) + gr_{\mathcal{G}}(w) = 2 + 2 = 4 < 5$ .



Per ogni grafo finito  $\mathcal{G}$  senza orientamento, semplice e senza cappi, **non hamiltoniano**, con  $n \geq 3$  vertici, esistono due vertici  $v, w$  per i quali si ha  $gr_{\mathcal{G}}(v) + gr_{\mathcal{G}}(w) < n$ .

**Vero!**

Se fosse falso, si avrebbe  $gr_{\mathcal{G}}(v) + gr_{\mathcal{G}}(w) \geq n$  comunque scelti  $v$  e  $w$  fra i vertici di  $\mathcal{G}$  e per il teorema di Ore  $\mathcal{G}$  sarebbe hamiltoniano.

Per ogni grafo finito  $\mathcal{G}$  senza orientamento, se la somma dei gradi dei vertici di  $\mathcal{G}$  è 37, allora  $\mathcal{G}$  è hamiltoniano.

***Vero!***

Per ogni grafo senza orientamento, la somma dei gradi dei vertici è sempre un numero pari. Dunque l'implicazione proposta è vera, perché in essa la premessa è certamente falsa.

Per ogni grafo finito  $\mathcal{G}$  senza orientamento, se la somma dei gradi dei vertici di  $\mathcal{G}$  è 37, allora  $\mathcal{G}$  non è hamiltoniano.

***Vero!***

Per ogni grafo senza orientamento, la somma dei gradi dei vertici è sempre un numero pari. Dunque l'implicazione proposta è vera, perché in essa la premessa è certamente falsa.

Se  $p, q, s$  sono variabili proposizionali, l'insieme di clausole

$$\mathcal{K} := \{\{p, \neg q, s, \neg p\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\}$$

è insoddisfacibile.

***Falso!***

$\mathcal{K}$  è soddisfatto (ad esempio) dalla valutazione di verità  $v$  per la quale  $v(p) := 1$ ,  $v(q) := 1$  e  $v(s) := 1$ .