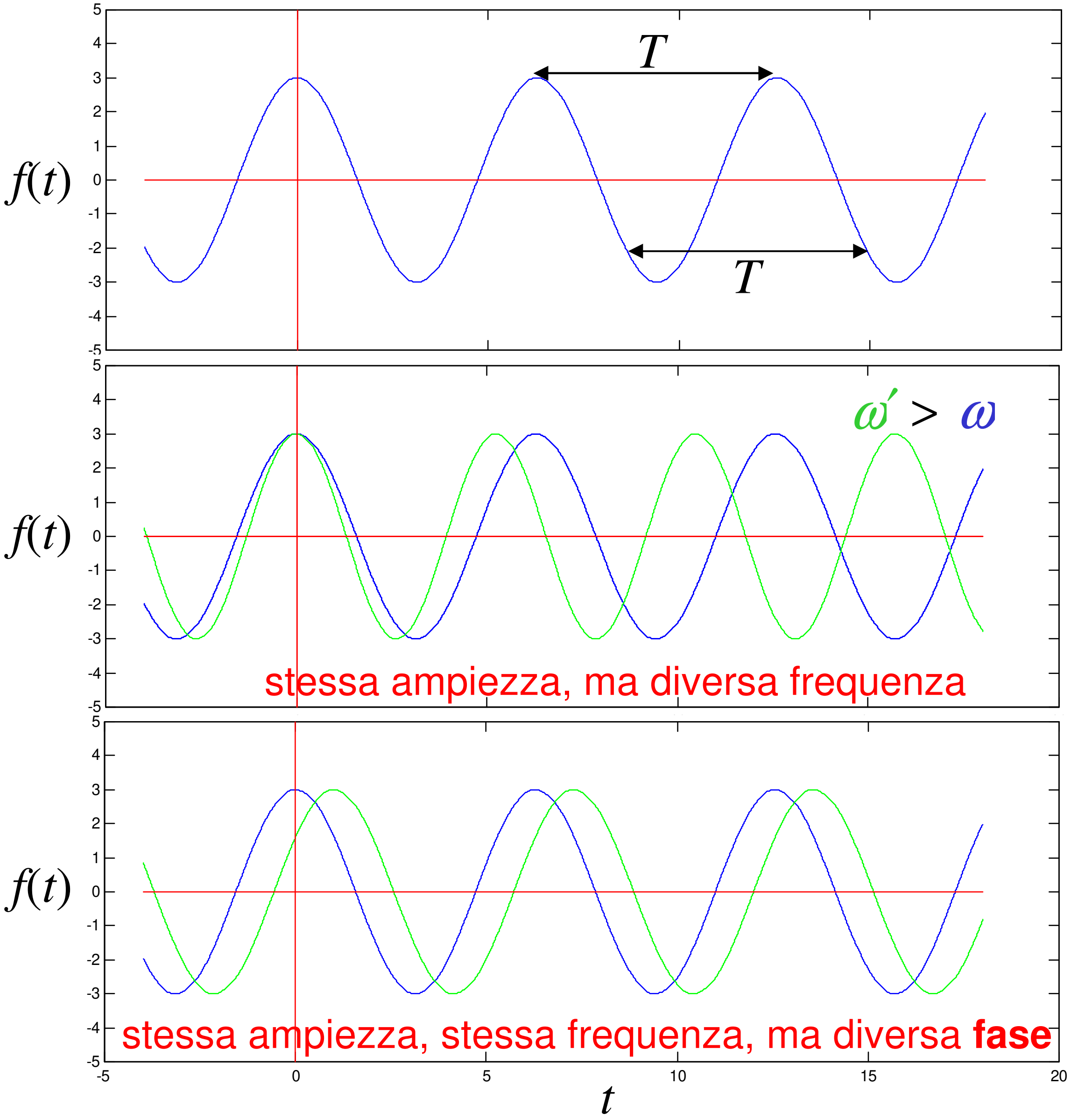
Onde



$$f(t) = A\cos(\omega t)$$

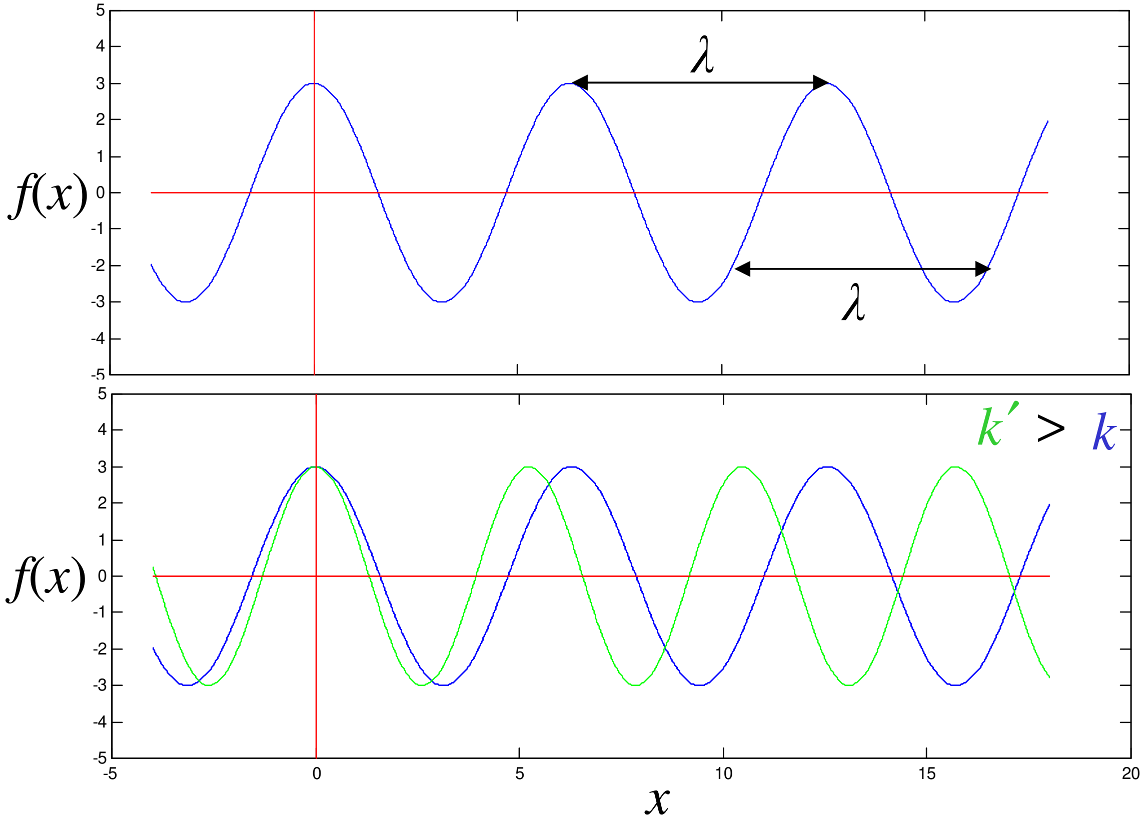
Il coseno è una funzione periodica, con periodo 2π

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi)$$

$$\omega t + 2\pi = \omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \omega(t + T)$$

ω è una frequenza angolare, si misura in rad s^{-1}

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$



Onde

$$f(x) = A\cos(k\,x)$$

Il coseno è una funzione periodica, con periodo 2π

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi)$$

$$k\,x + 2\pi = k\left(x + \frac{2\pi}{k}\right) = k(x + \lambda)$$

$$k = 2\pi/\lambda$$

è un **vettore d'onda**

è una frequenza spaziale, si misura in rad m^{-1}

(ma l'uso comune omette i radianti)

Nello scattering si misurano quantità che sono funzioni di variabili aventi il significato di k e ω, cioè di frequenze spaziali e temporali.

Funzioni oscillanti: esponenziale complesso

Invece di $\begin{cases} A\cos(\omega t) \\ A\cos(k\,x) \end{cases}$ si preferisce scrivere $\begin{cases} A\exp(i\,\omega t) \\ A\exp(i\,k\,x) \end{cases}$

sfruttando la fondamentale formula di Eulero $\quad e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

La manipolazione matematica degli esponenziali è più semplice di quella delle funzioni trigonometriche

(vantaggi nel calcolo di derivate, integrali, etc.)

Nel caso di uno sfasamento, p. es., al posto di $\quad f(\boldsymbol{x}) = A\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} + \varphi)$

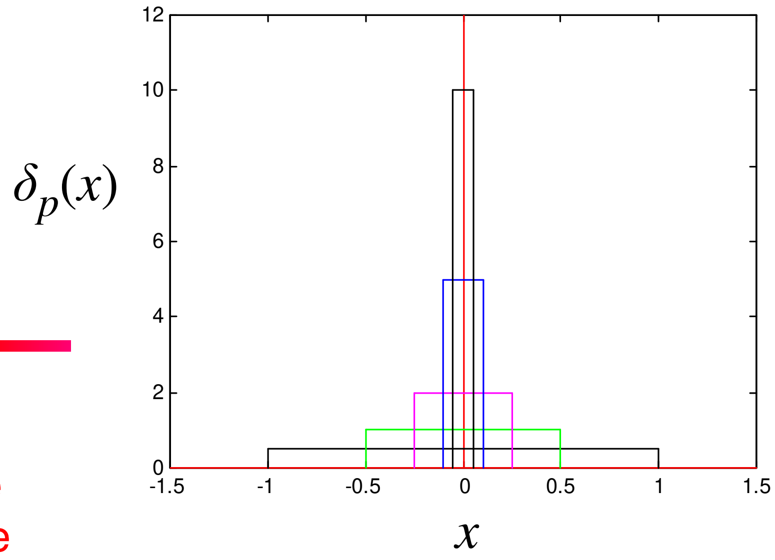
scriviamo invece $\quad f(\boldsymbol{x}) = A e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\varphi)} = A e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} e^{i\varphi}$

$$\left|e^{i\alpha}\right|^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

la "delta di Dirac" $\delta(x)$

NON è una funzione!

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$$



p=0.5 p=1 p=2 p=5 p=10

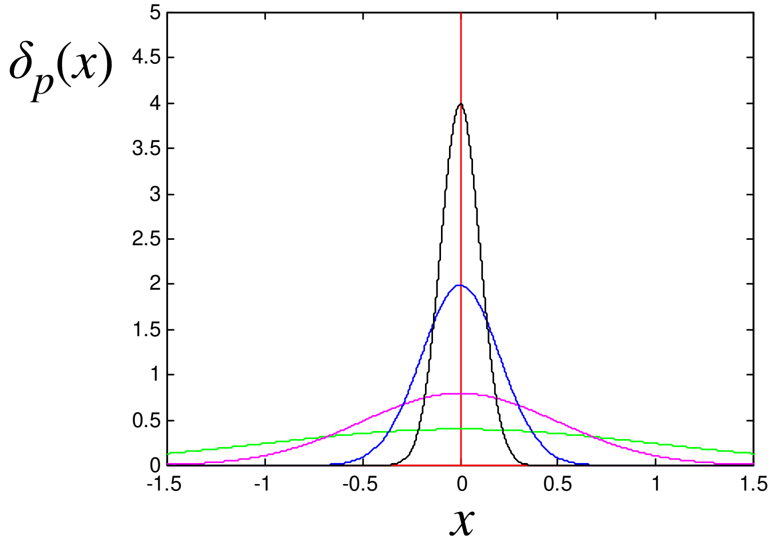
$$\delta_p(x) = \begin{cases} p, & -\frac{1}{2p} \leq x \leq \frac{1}{2p} \\ 0, & x < -\frac{1}{2p} \text{ e } x > \frac{1}{2p} \end{cases}$$

questa è una vera funzione per qualunque *p*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_p(x)dx = 1}$$

l'idea è quella di rappresentare una "funzione" che sia il limite per $p \longrightarrow \infty$

$$\boxed{\delta(x) = \lim_{p \to \infty} \delta_p(x)}$$

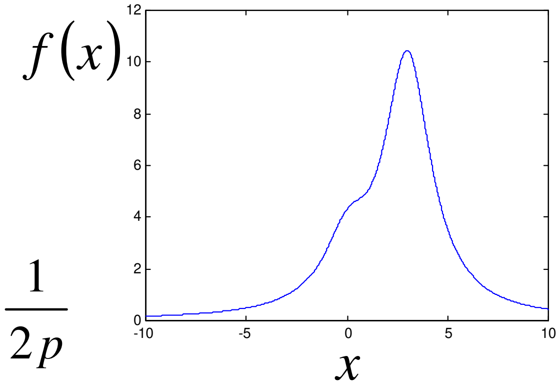


un altro esempio

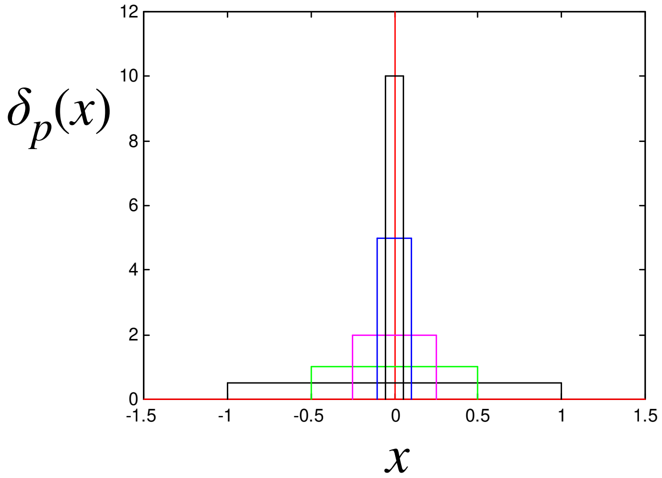
$$\delta_p(x) = \frac{p}{\sqrt{2\pi}} e^{-p^2x^2/2}$$

la "delta di Dirac" $\delta(x)$

prendiamo una $f(x)$
e moltiplichiamola
per il rettangolo



$$\delta_p(x) = \begin{cases} p, & -\frac{1}{2p} \le x \le \frac{1}{2p} \\ 0, & x < -\frac{1}{2p} \text{ e } x > \frac{1}{2p} \end{cases}$$



p=0.5 p=1 p=2 p=5 p=10

$$\delta_p(x) f(x) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \delta_p(x) f(0)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_p(x) f(x) dx \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_p(x) dx = f(0)}$$

E' un tipo particolare di funzionale $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \cdots dx$ definito da $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$

$$\boxed{\text{in 3 dimensioni} \quad \int \delta(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = f(\mathbf{0})}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a)$$

la "delta di Dirac"

un esempio di applicazione in 3 dimensioni

Un oggetto sferico di raggio r_0, massa M, e densità uniforme, posto nel vuoto nel punto $\boldsymbol{R}$

La densità **di massa** in un generico punto $\boldsymbol{r}$ dello spazio è

$$\rho_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \dfrac{M}{V} = \dfrac{M}{(4/3)\pi r_0^3} & \text{se } \boldsymbol{r} \text{ è dentro la sfera} \\ 0 & \text{se } \boldsymbol{r} \text{ è fuori della sfera} \end{cases}$$

Riduciamo il raggio della sfera concentrando la stessa massa in un volume via via minore

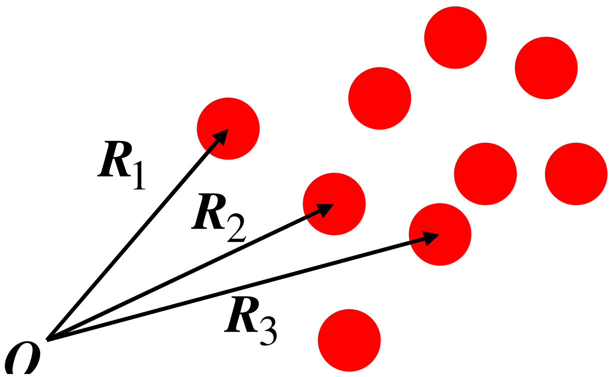
La densità ρ_{m} diventa sempre maggiore ma in una regione di spazio sempre più piccola intorno al punto $\boldsymbol{R}$.

Nel limite del punto materiale ($r_0 \to 0$) si ha

$$\rho_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) = M\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R})$$

la massa totale è ovviamente costante:

$$\int \rho_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} = M \int d\boldsymbol{r}\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}) = M$$



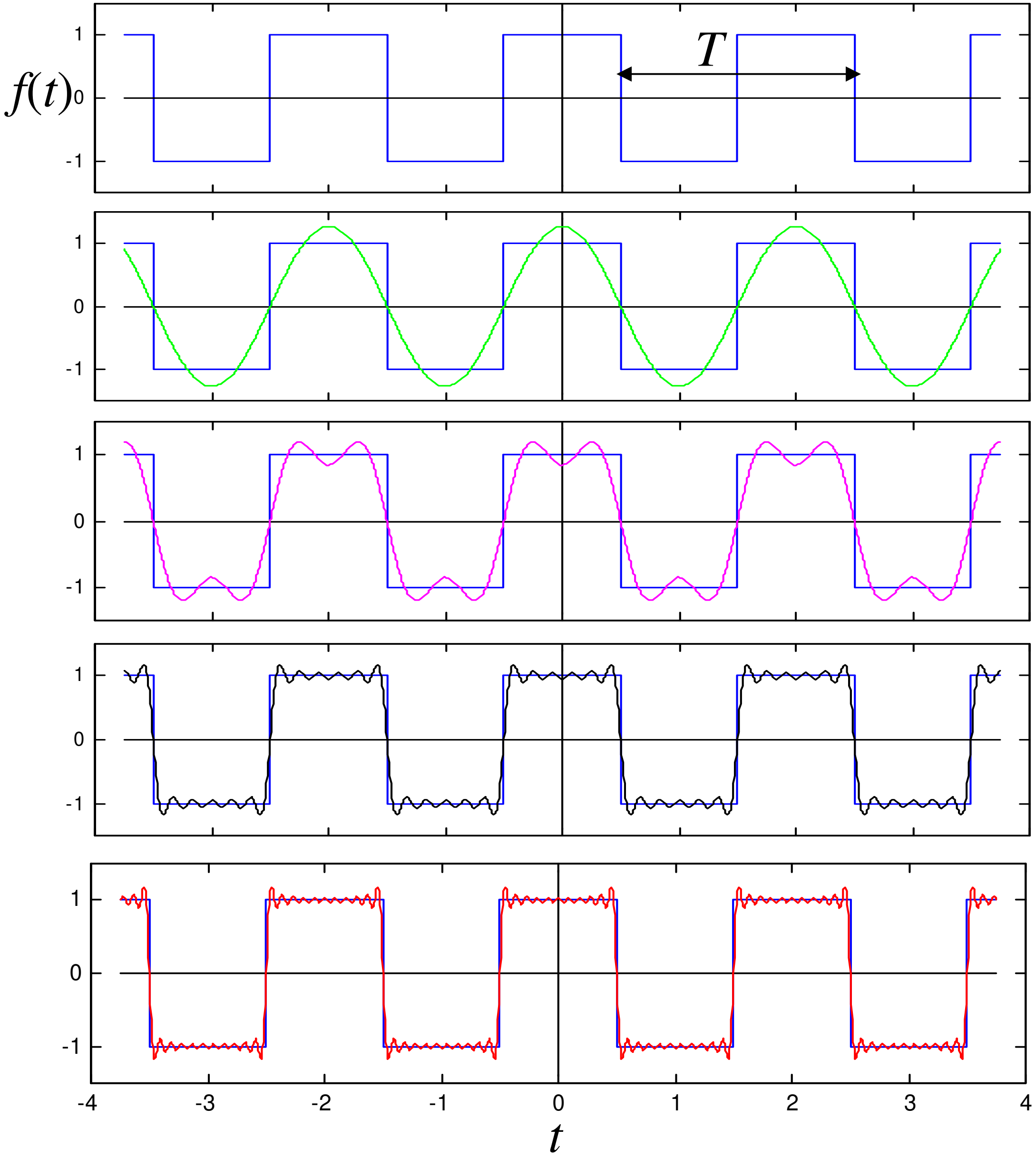
La densità **numerica** in un generico punto $\boldsymbol{r}$ per un insieme di N particelle microscopiche puntiformi poste in $\boldsymbol{R}_i$ è

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})}{M} = \sum_{i=1}^{N} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_i)$$

L'integrale della densità numerica su tutto lo spazio è

$$\int d\boldsymbol{r}\;\rho(\boldsymbol{r}) = N$$

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)



Rappresentiamo una funzione periodica come somma di oscillazioni perfette.

$$\boxed{f(t) = \sum_{j=0,1,2,\ldots} \frac{4(-1)^j}{\pi(2j+1)} \cos \omega_j t}$$

$j = 0$ la "fondamentale" $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$

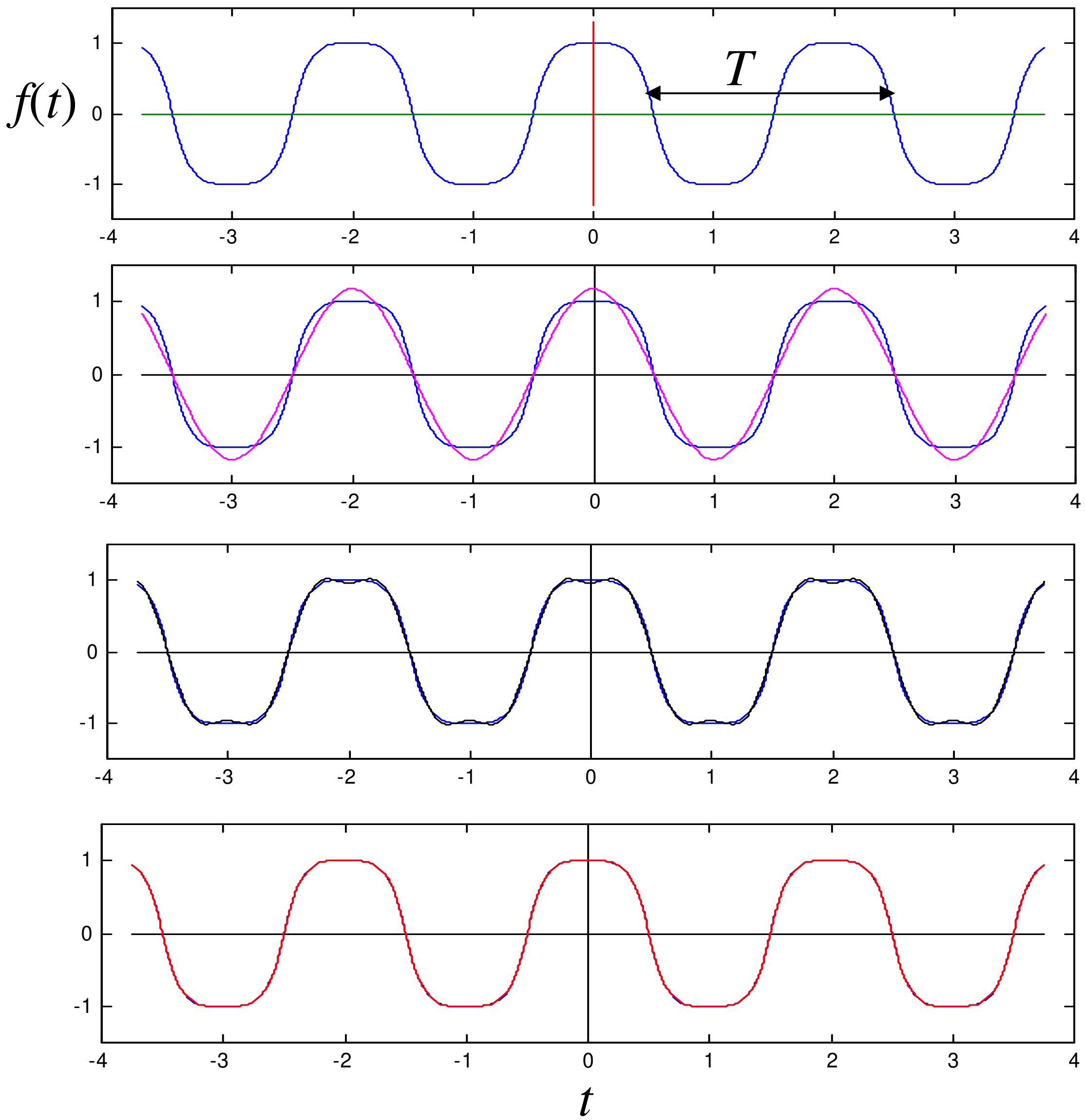
$$\boxed{\omega_j = (2j+1)\omega_0}$$

$j = 0,1$ anche la terza armonica $3\omega_0$

$j = 0,1,\ldots,5$ anche le altre armoniche dispari fino a $11\omega_0$

$j = 0,1,\ldots,10$ anche le altre armoniche dispari fino a $21\omega_0$

Rappresentiamo una funzione periodica come somma di oscillazioni perfette.



$$\boxed{f(t) = \sum_{j=0,1,2,\ldots} A_j \cos \omega_j t}$$

$j = 0$ la "fondamentale" $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$

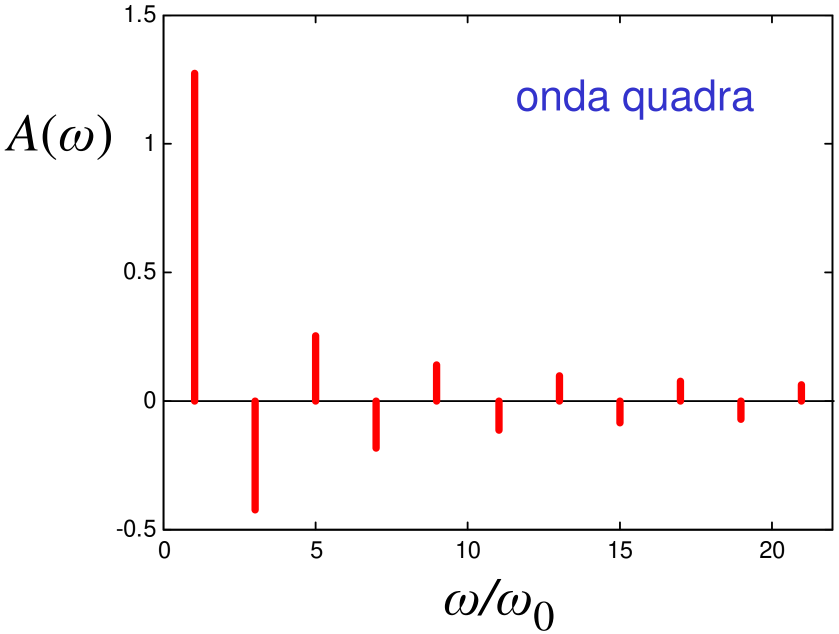
$$\boxed{\omega_j = (2j+1)\omega_0}$$

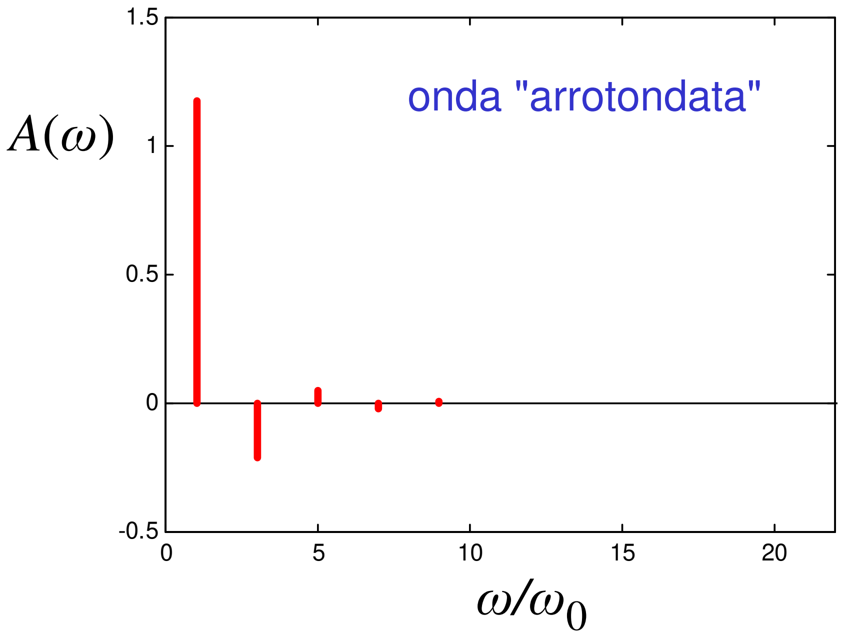
$j = 0,1$ anche la terza armonica $3\omega_0$

$j = 0,1,\ldots,4$ anche le altre armoniche dispari fino a $9\,\omega_0$

Spettro dell'intensità delle componenti di frequenza (o armoniche, o di Fourier)

$$\boxed{f(t) = \sum_{j=0,1,2,\ldots} A_j \cos \omega_j t}$$





Brusche variazioni, punti angolosi, o addirittura discontinuità della funzione richiedono, per la sua rappresentazione, alte frequenze

Lo spettro in frequenza è quindi più esteso

Trasformata di Fourier

Dopo molte e varie generalizzazioni...

-- passando a funzioni non periodiche

-- generalizzando dal discreto al continuo

-- sostituendo la serie con un integrale

-- usando gli esponenziali complessi

-- etc. etc.

$$f(t) = \sum_{j=0,1,2,\ldots} A_j \cos \omega_j t$$

antitrasformata di Fourier

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, e^{i\omega t} F(\omega)$$

trasformata di Fourier

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, e^{-i\omega t} f(t)$$

$$f(t) \underset{FT^{-1}}{\overset{FT}{\rightleftarrows}} F(\omega)$$

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, F(\omega)$$

Trasformata di Fourier

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-i\omega t}\,\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\left(e^{-i\omega t}\right)_{t=0} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\omega t}\left(\frac{1}{2\pi}\right)$$

$$\boxed{\delta(t) \underset{FT^{-1}}{\overset{FT}{\rightleftarrows}} \frac{1}{2\pi}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\omega t}\,\delta(\omega) = \left(e^{i\omega t}\right)_{\omega=0} = 1$$

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-i\omega t}(1)$$

$$\boxed{1 \underset{FT^{-1}}{\overset{FT}{\rightleftarrows}} \delta(\omega)}$$

rappresentazione integrale della δ

$$\begin{cases} \delta(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\omega t} \\ \delta(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-i\omega t} \end{cases}$$

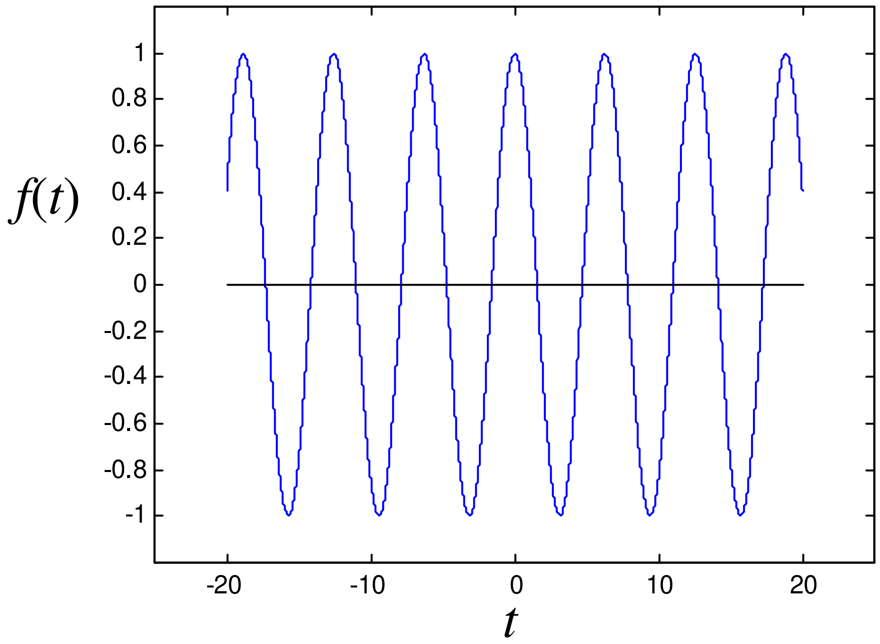
Trasformata di Fourier

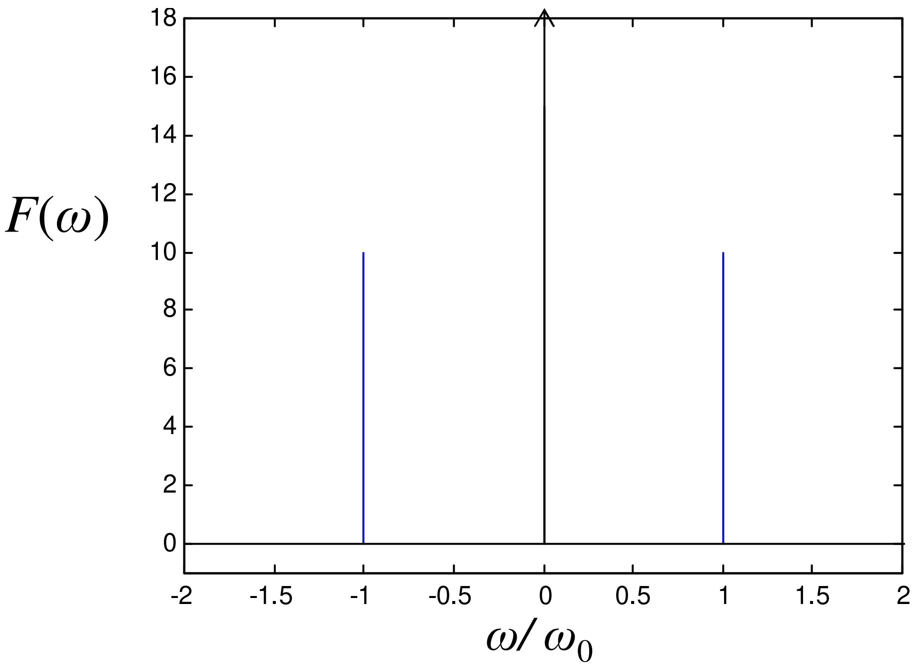
$$f(t) = \cos \omega_0 t$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\; e^{-i\omega t} \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\; \frac{e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t}}{2} =$$

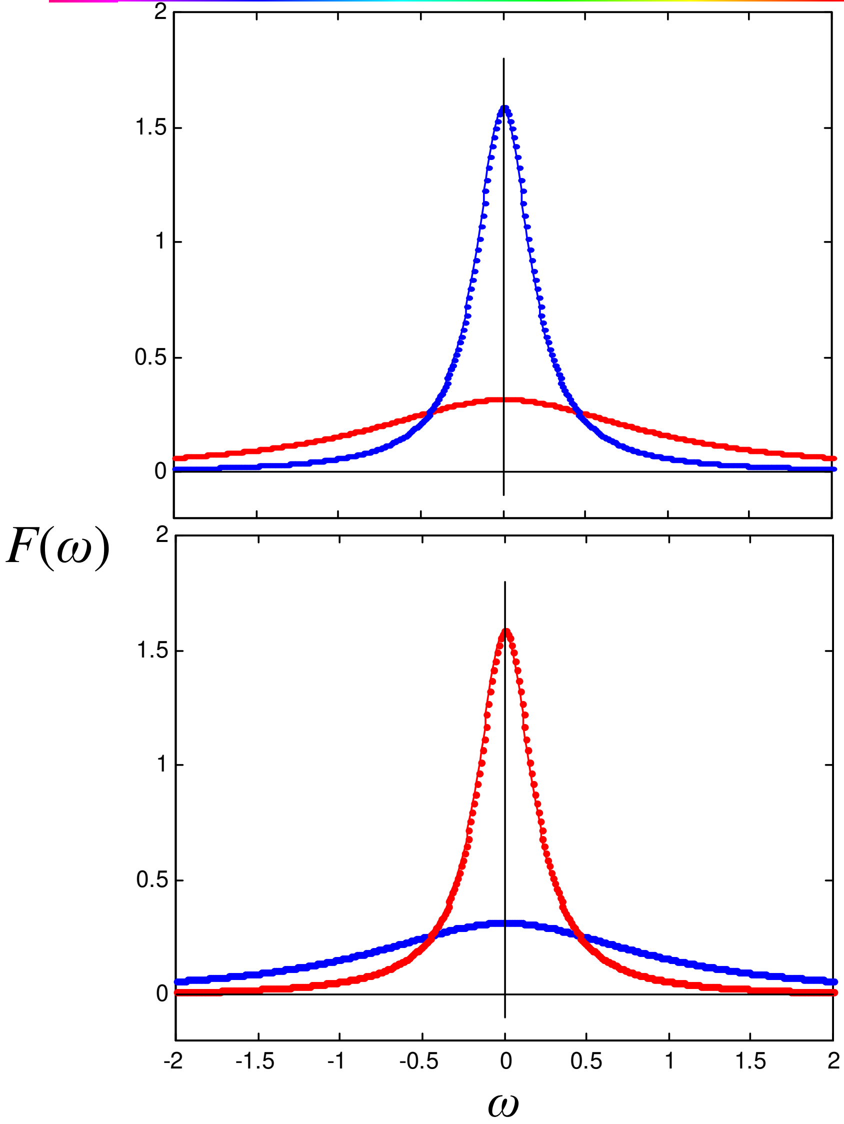
$$= \frac{\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)}{2}$$

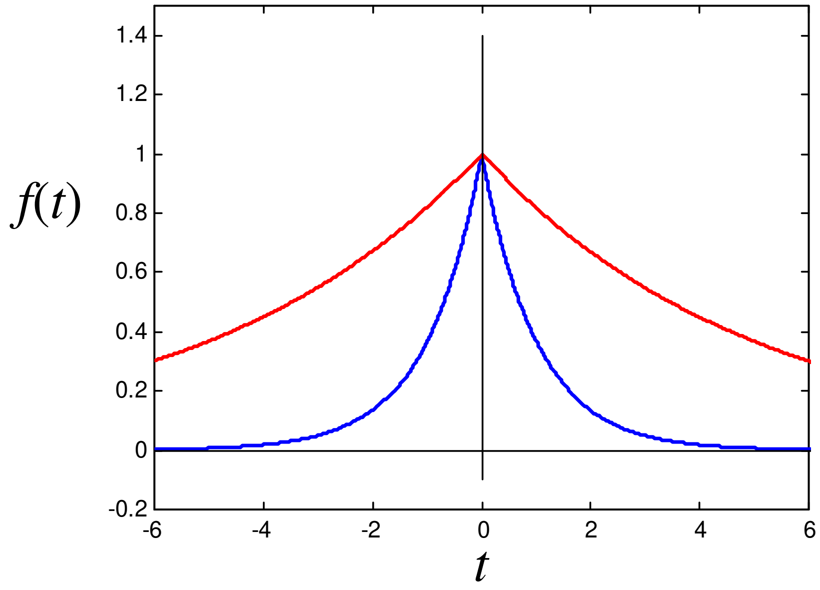




Trasformata di Fourier

$$f(t) = e^{-\alpha|t|}$$





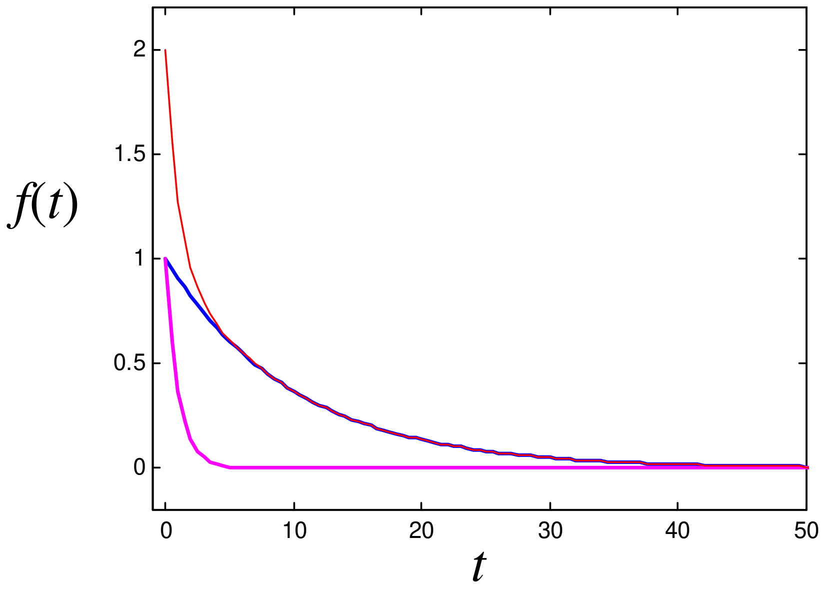
$$\boxed{F(\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}}$$

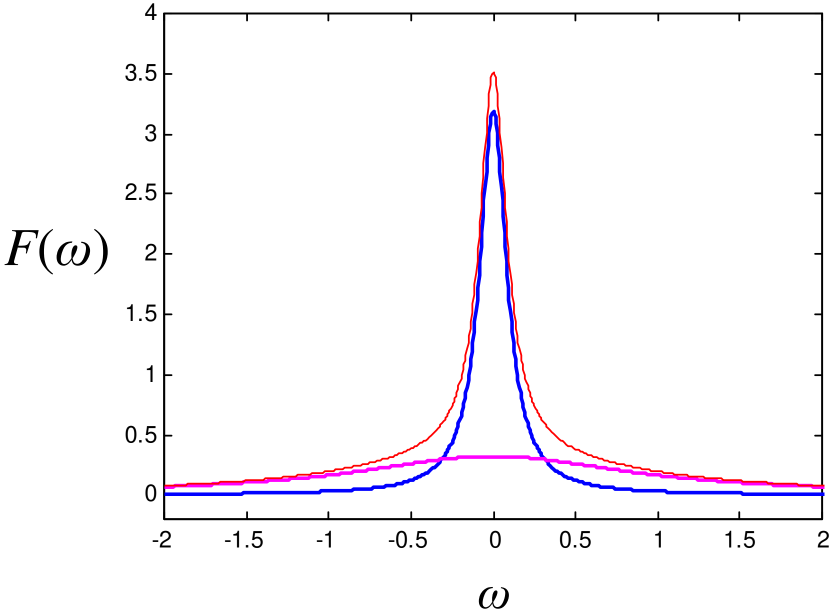
la trasformata di Fourier di un esponenziale decrescente è una lorentziana

α è la semilarghezza a metà altezza (*half width at half maximum*, HWHM) della lorentziana

Trasformata di Fourier

$$f(t) = e^{-\alpha|t|} + e^{-\beta|t|}$$





la trasformata di Fourier è la somma di due lorentziane di semilarghezze α e β
(che non è una lorentziana)

Convoluzione

$$c(x) = f(x) \otimes g(x)$$

$$c(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \, f(x') g(x - x')$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \, f(x - x') g(x')$$

alcune proprietà

$$f \otimes g = g \otimes f$$

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$$

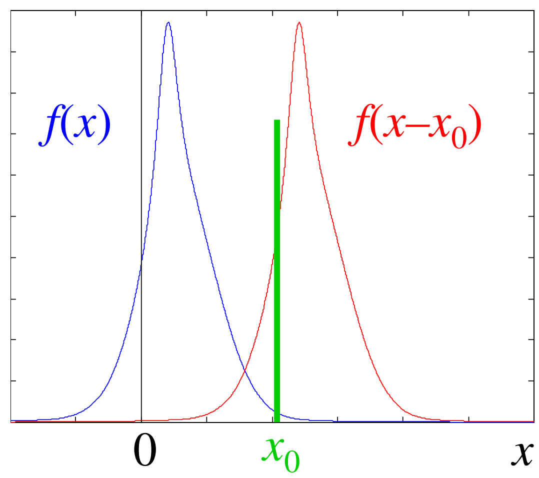
$$(f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h$$

Convoluzione con la δ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \, f(x')\delta(x-x') = f(x) \longrightarrow f(x)\otimes\delta(x) = f(x)$$

e in generale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \, f(x')\delta(x-x_0-x') = f(x-x_0) \longrightarrow f(x)\otimes\delta(x-x_0) = f(x-x_0)$$



$$f(t) \xrightarrow{\quad} F(\omega)$$
FT
$$g(t) \xrightarrow{\quad} G(\omega)$$

Un teorema fondamentale

teorema di convoluzione

$$F(\omega)\otimes G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'\, F(\omega')G(\omega-\omega')=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 e^{-i\omega' t_1} f(t_1)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt_2\, e^{-i(\omega-\omega')t_2} g(t_2)=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 f(t_1)\int_{-\infty}^{+\infty} dt_2\, e^{-i\omega t_2} g(t_2)\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'\, e^{-i\omega'(t_1-t_2)}=} \longleftarrow \boxed{2\pi\,\delta(t_1-t_2)}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1\, f(t_1)\int_{-\infty}^{+\infty} dt_2\, g(t_2) e^{-i\omega t_2}\delta(t_1-t_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1\, e^{-i\omega t_1} f(t_1)g(t_1)=\mathrm{FT}[f(t)g(t)]$$

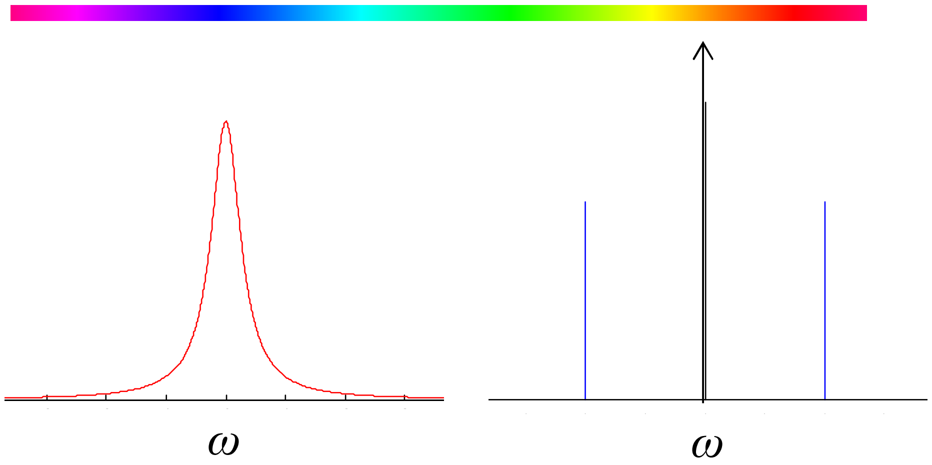
$$\boxed{f(t)g(t) \xrightarrow[\text{FT}]{} F(\omega)\otimes G(\omega)}$$

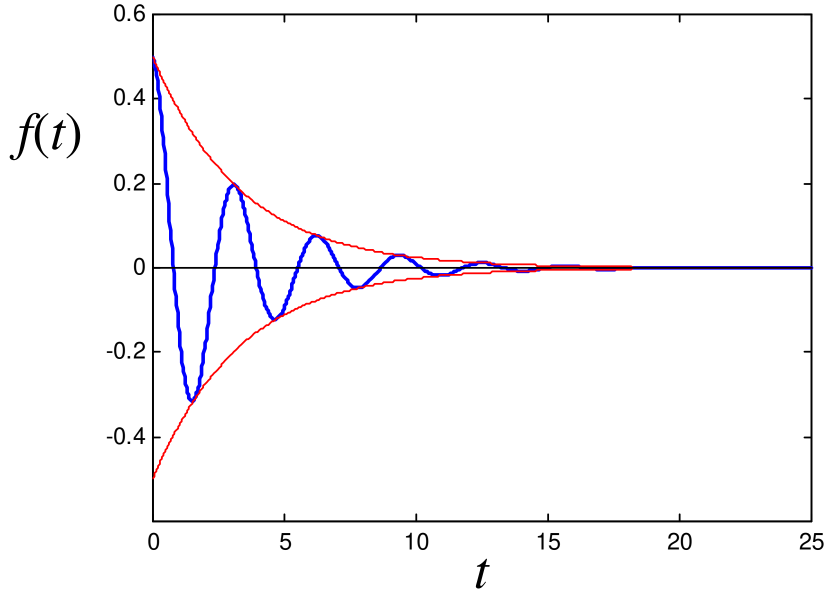
la trasformata di Fourier di un prodotto di funzioni è la convoluzione delle rispettive trasformate

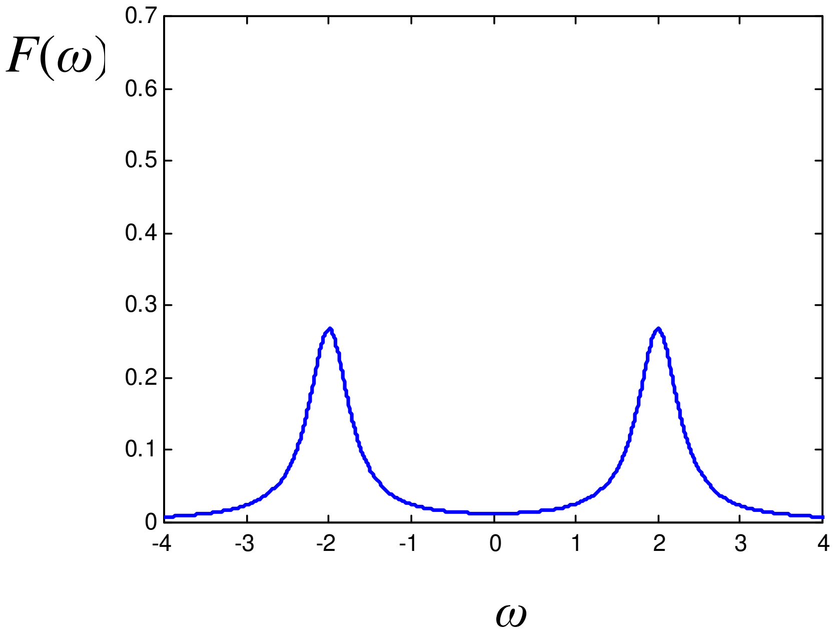
analogamente si dimostra il viceversa $f(t)\otimes g(t) \longrightarrow 2\pi\, F(\omega)G(\omega)$

Trasformata di Fourier

$$f(t) = e^{-\alpha|t|} \cos \omega_0 t$$



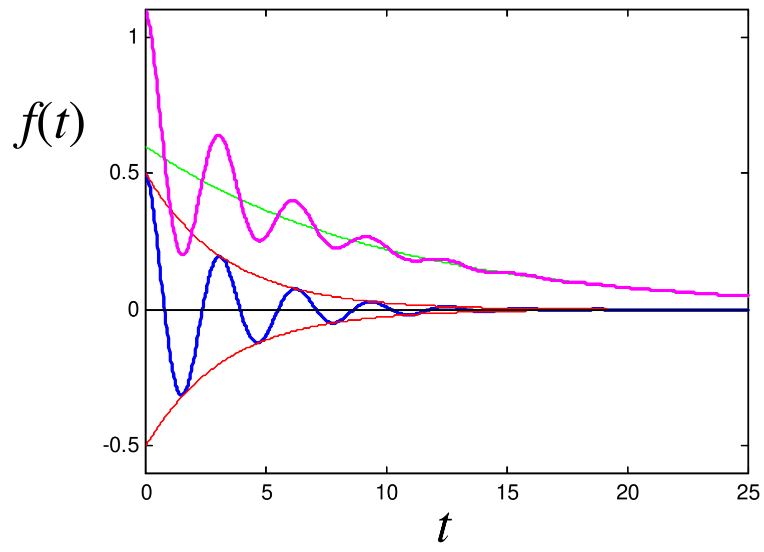


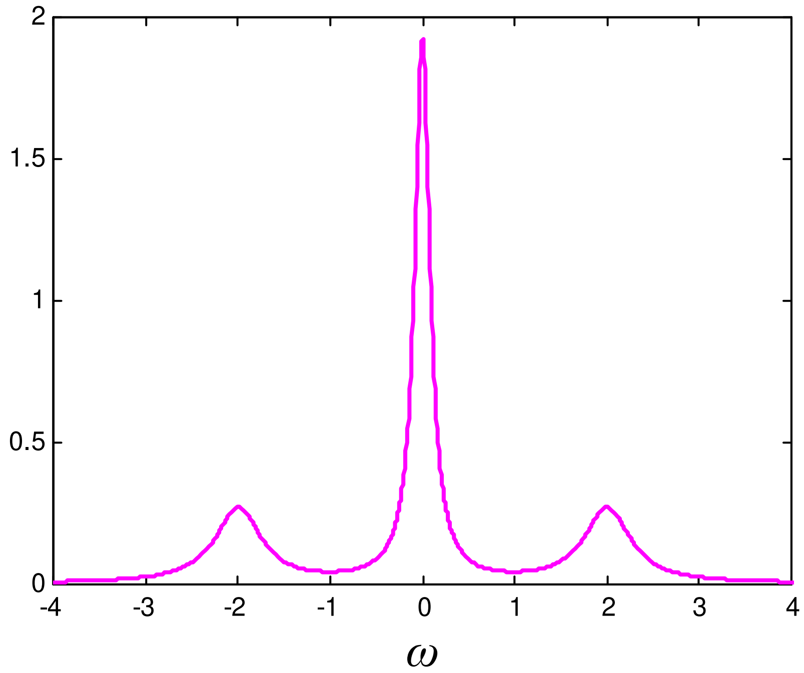


$$F(\omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{(\omega+\omega_0)^2+\alpha^2} + \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{(\omega-\omega_0)^2+\alpha^2}\right]$$

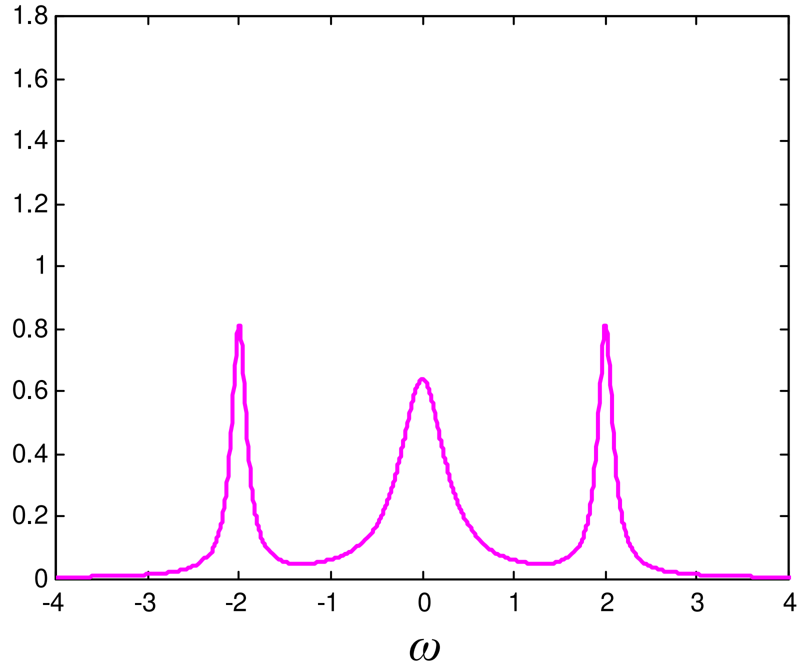
Trasformata di Fourier

$$f(t) = e^{-\alpha|t|}\cos\omega_0 t + e^{-\beta|t|}$$





$F(\omega)$



Trasformata di Fourier

Anche per funzioni nello spazio...

trasformata di Fourier

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-i\omega t} f(t)$$

antitrasformata di Fourier

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\omega t} F(\omega)$$

$$f(t) \underset{FT^{-1}}{\overset{FT}{\rightleftarrows}} F(\omega)$$

$$F(\boldsymbol{Q}) = \int d\boldsymbol{r}\, e^{i\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{r}} f(\boldsymbol{r})$$

$$f(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d\boldsymbol{Q}\, e^{-i\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{r}} F(\boldsymbol{Q})$$

$$f(\boldsymbol{r}) \underset{FT^{-1}}{\overset{FT}{\rightleftarrows}} F(\boldsymbol{Q})$$

$\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{q}$ sono spesso usati per indicare i vettori d'onda

per funzioni soltanto del modulo di ***r*** e ***Q***

$$F(Q) = \frac{4\pi}{Q} \int_0^{\infty} dr\, r \sin(Qr) f(r)$$

$$f(r) = \frac{4\pi}{r} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_0^{\infty} dQ\, Q \sin(Qr) F(Q)$$