



**Analisi multicriterio con AHP..
Applicazioni su
Sistemi Informativi Territoriali**

Parte II

Le regole decisionali

L'Analisi Multicriteriale

Metodologia flessibile che può essere adattata ad una molteplicità di problematiche (zonizzazione, pianificazione, ecc.) in cui il problema è riconducibile ad una scelta fra diverse alternative. La MCDM presenta infatti l'indiscutibile vantaggio di poter definire e valutare gli effetti di una determinata azione sulla base di modelli di simulazione che possono considerare un numero molto elevato di fattori.

● **Scopo dell'analisi multicriteriale (nel caso di studio)**

- definire la rilevanza che gli indicatori ambientali e sociali hanno nella formazione del risultato finale.

● Metodologia Applicata: **“Valutazione Analitica delle Gerarchie” (AHP)** sviluppato da T.L. Saaty nel 1980.

● Il metodo prevede due fasi:

- Individuazione di un **modello di analisi gerarchico** per la progressiva aggregazione degli indicatori;
- **Analisi dei pesi** da attribuire ai diversi indicatori tramite la costruzione di una matrice di giudizi definita confrontando a coppie l'importanza relativa dei diversi fattori.

Remind: calcolo della distanza in Multiattributo



		Obbiettivi				Distanza
		Produzione mc/anno	Fauna q.s.v./anno	Ricreazione n.vis./anno	Occupazione gg/anno	
Alternative	A1 Produzione legnosa	0.00	1.00	1.00	0.04	1.41
	A2 Riserva naturale	1.00	0.00	0.59	1.00	1.53
	A3 Parco turistico ricreativo	0.98	0.35	0.00	0.38	1.11
	A4 Azienda multifunzionale puro	0.47	0.47	0.47	0.00	0.81
	A5 Azienda multifunzionale naturalistica	0.64	0.33	0.33	0.08	0.79
	A6 Azienda multifunzionale produttiva	0.32	0.62	0.62	0.01	0.93

$$\text{distanza A3} = \sqrt{0.64^2 + 0.33^2 + 0.33^2 + 0.08^2} = 0.79$$

Le funzioni sono considerate tutti equivalenti tra loro



A cosa serve l'analisi gerarchica?

-  **L'analisi AHP consiste in un metodo e, insieme, una tecnica, utilizzata sia nelle scienze economiche che sociali, per la definizione dell'ordine di priorità in cui vanno poste alternative che soddisfano prescritti criteri di scelta.**
-  **L'AHP, tratta il problema del *ranking* delle alternative, ossia il loro allineamento, in ordine di importanza, o preferenza, sulla base di valutazioni quantitative.**

Nel nostro caso l'applicazione è stata adattata alla determinazione della *priorità/rilevanza che i diversi fattori (naturali, strutturali e sociali), hanno nel perseguimento dell'obiettivo (goal), rappresentato nel nostro caso dallo "Indirizzi di gestione di una proprietà forestale pubblica".*



Per definire un modello AHP utile a risolvere il problema decisionale, la metodologie si sviluppa attraverso:

- 1. la costruzione di una gerarchia nella quale vengono correlati tutti gli elementi della decisione: l'obiettivo generale (1° livello), i criteri del 2° livello, i criteri del 3° livello ed i fattori ai vari livelli (fig 5) – si ricorda i criteri di uno stesso livello sono mutuamente indipendenti (Saaty 1980);**
- 2. la costruzione delle matrici di confronti a coppie per ogni criterio di ciascun livello;**
- 3. la stima, col metodo dell'autovettore, dei pesi relativi (interni ai gruppi) degli elementi della decisione (criteri e fattori);**
- 4. la determinazione dei pesi complessivi dei fattori in modo da avere una loro classificazione complessiva (*ranking*) degli stessi; ciò si ottiene attraverso l'aggregazione dei pesi relativi interni ai gruppi.**
- 5. lo sviluppo di un modello MCDM in cui vengono applicati ai fattori i corrispondenti pesi definiti attraverso l'analisi AHP.**

1. Definizione della struttura gerarchica

Livello 1 Sviluppo turismo naturalistico

Obiettivo

Livello 2

C A₂

C B₂

C C₂

Livello 3

C A₃

C A₃

F 1₃

F 1₃

Livello 4

F 1₄

F 1₄

F 2₃

F 2₃

F 2₄

F 2₄

F n₃

F n₃

F n₄

F n₄

..... Contributi non necessariamente presenti

C - Criteri

F - Fattori

2. Costruzione matrici di confronto a coppie:

✂ Una volta definita la gerarchizzazione, è stato possibile definire i contributi dei vari fattori e criteri.

✂ Per fare ciò si procede alla costruzione di una serie di matrici quadrate A^K , dette *matrici di confronto a coppie*, i cui elementi sono non nulli e tali che:

$$a_{ij}^K = 1/a_{ji}^K$$

✂ per ogni $i, j = 1, \dots, n$, e, quindi con elementi delle diagonale principale uguali ad 1.

$$A^K = (a_{ij}^K) = \begin{bmatrix} 1 & b_1/b_2 & \cdot & b_1/b_n \\ b_2/b_1 & 1 & \cdot & b_2/b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n/b_1 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

✂ In A^K il numero b_i indica l'importanza dell' i -esimo fattore (o criterio) rispetto al j -esimo fattore (o criterio).

2. Costruzione matrici di confronto a coppie:

✂ Per effettuare la comparazione e definire la priorità fra ciascuna coppia di fattori/criteri, ci basiamo correntemente su una comparazione verbale sviluppata su due domande:

Rispetto all'obiettivo "Indirizzi di gestione di una proprietà forestale pubblica",

✂ ..quale dei due fattori è maggiormente rilevante?

✂ ..e quanto è più rilevante?

Mentre la risposta al primo quesito può essere fornita in modo piuttosto semplice, il secondo può risultare più ostico. In accordo a molte teorie di psicologia, è infatti impossibile, per qualsiasi soggetto, effettuare una quantificazione di un fenomeno in un intervallo continuo. Secondo molti psicologi infatti, la maggior parte degli individui non può comparare simultaneamente più di sette entità (+/- 2) (Miller, 1956).

2. Costruzione matrici di confronto a coppie:

✂ Per tali ragioni, nella scelta della scala per la quantificazione della comparazione a coppie, è stato fatto riferimento alla scala di importanza relativa, utilizzata dallo stesso Saaty (1980), con massimo numero di livelli (9).

Scala di importanza relativa utilizzata (Saaty 1980)

Per cui, se il valutatore preferisce fortemente il criterio i rispetto al criterio j , l'elemento a_{ij}^K della matrice K di confronto a coppie assume valore pari a 7, mentre l'elemento a_{ji}^K è uguale a $1/7$.

Importanza	Definizione	Esplicazione
1	Uguale importanza	I due fattori contribuiscono in ugual modo al perseguimento dell'obiettivo
3	Debole importanza di uno sull'altro	Un fattore contribuisce leggermente di più al perseguimento dell'obiettivo
5	Forte importanza di uno sull'altro	Un fattore contribuisce in modo determinante nel perseguimento dell'obiettivo (E' praticamente dimostrato)
7	Molto forte importanza di uno sull'altro	E' evidente che un fattore contribuisce in determinante nel perseguimento dell'obiettivo
9	Assoluta rilevanza di uno sull'altro	Si può affermare in modo assoluto che un fattore contribuisce in modo rilevante al perseguimento dell'obiettivo
2,4,6,8	Valori intermedi a due giudizi adiacenti	Soluzioni di compromesso ai casi precedenti

3. Stima, col metodo degli autovalori, dei pesi relativi (interni ai gruppi) degli elementi della decisione (criteri e fattori)

✂ associare ad ogni fattore/criterio i un peso w_i che misuri l'importanza in una scala di valori continui da 0 a 1 .

✂ Per fare ciò è stata supposta la soddisfazione delle *condizioni di normalità*, ossia che:

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$$

3. Stima, col metodo degli autovalori, dei pesi relativi (interni ai gruppi) degli elementi della decisione (criteri e fattori)

✂ La tecnica per la determinazione dei pesi si è basata sul seguente ragionamento:

✂ se il valutatore conoscesse i pesi effettivi w_1, w_2, \dots, w_n degli n elementi, la matrice dei confronti a coppie diventerebbe,

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & w_1/w_2 & \cdot & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & \cdot & w_2/w_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_n/w_1 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

✂ In questo caso i pesi si otterrebbero banalmente dalla normalizzazione rispetto alla somma di una qualunque delle righe poiché sono tutte multiple fra loro.

3. Stima, col metodo degli autovalori, dei pesi relativi (interni ai gruppi) degli elementi della decisione (criteri e fattori)

✂ Nella pratica però, non è possibile conoscere il vettore pesi w e quindi i valori assegnati secondo il giudizio del valutatore, possono scostarsi dai valori w_i/w_j ignoti.

Quindi, le matrici A^K avranno spesso rango superiore a 1, ossia saranno *inconsistenti*.

Saaty (1980) ha dimostrato, relativamente a tali matrici, che è possibile giungere ad un "indice di consistenza" ed alla stima dei pesi relativi di ciascun fattore/criterio.

E' stato quindi sviluppato (Saaty, 1980) uno specifico indice in grado di esprimere il livello di inconsistenza delle matrici di confronto a coppie. L'indice è definito dalla seguente equazione:

$$CI = \frac{\alpha_{\max} - n}{n - 1}$$

con α_{\max} autovalore massimo della matrice, ed n ordine della matrice.

4. Stima pesi e indice di consistenza

1. Stima autovettore

$$GM_{\bar{y}} = \sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \dots \cdot y_n}$$

Autovettore normalizzato

$$GM_{\bar{y}} \text{ norm} = \frac{GM_{\bar{y}}}{\sum GM_{\bar{y}}}$$

2. Il calcolo dell'autovalore, necessario per la stima dell'indice di consistenza, può essere effettuato, in base alla formula approssimata, tramite la somma dei totali di ciascuna colonna moltiplicati per il relativo valore dell'autovettore normalizzato.

3. se l'indice CI assume valori minori o uguali a 0,1, allora il valutatore si può ritenere soddisfatto dei suoi giudizi

3. Sviluppo del modello MCDM in cui vengono applicati ai fattori i corrispondenti pesi definiti attraverso l'analisi AHP

✂ La formalizzazione del modello è quindi la seguente:

$$P_q = \sum_{i=1}^n I_{qi} w_i$$

Con: P_q = Indirizzi di gestione di una proprietà forestale pubblica q-esima;

✂ I_{qi} = Valore assunto dall'indicatore i-esimo per la Proprietà pubblica q-esima;

✂ w_i = Peso complessivo dell'indicatore i-esimo;

✂ n = totale indicatori.

Metodi di soluzione

Analogamente ai problemi MCDM analizzati nelle precedenti lezioni i metodi di soluzione possono essere totalmente compensatori, parzialmente compensatori o totalmente non compensatori.

☒ Riassumendo dalle precedenti lezioni:

☒ Metodi di soluzione compensatori


- ☒ Il basso valore di un criterio può essere compensato dall'elevato valore in uno o più altri criteri.

☒ Metodi non compensatori

- ☒ Il giudizio si basa sul criterio maggiormente limitante.

☒ Metodi parzialmente compensatori

- ☒ Situazione intermedia: il basso valore di un criterio (limitante) può essere solo parzialmente compensato dall'alto valore negli altri criteri.

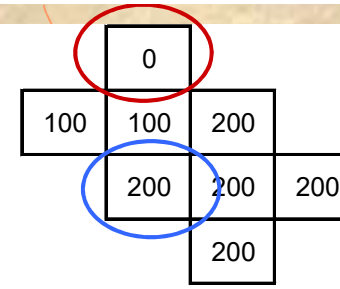
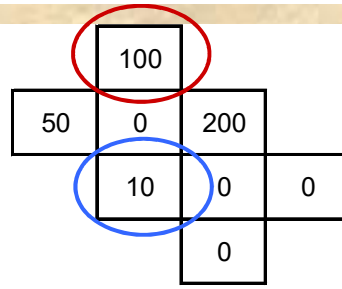


Una prima soluzione

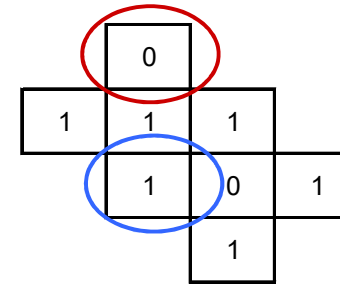
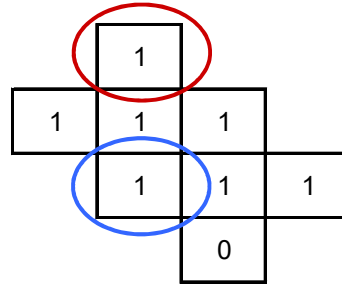
- Il metodo compensatorio più semplice è dato dalla combinazione lineare pesata
- Secondo questo metodo, il valore complessivo di ciascun pixel è dato dalla media dei punteggi dei diversi criteri, moltiplicata per il valore dei diversi vincoli.



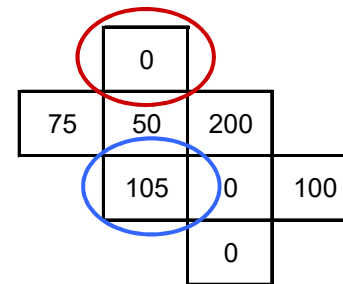
Nella situazione, molto semplificata, riportata a lato, abbiamo un territorio suddiviso solamente in 8 pixels



Criteria



Vincoli



Valutazione

Caso 1 - pixel evidenziato in rosso:

$$\text{Valutazione} = (100 + 0) / 2 \times 1 \times 0 = 0$$

Caso 2 - pixel evidenziato in blu:

$$\text{Valutazione} = (10 + 200) / 2 \times 1 \times 1 = 105$$

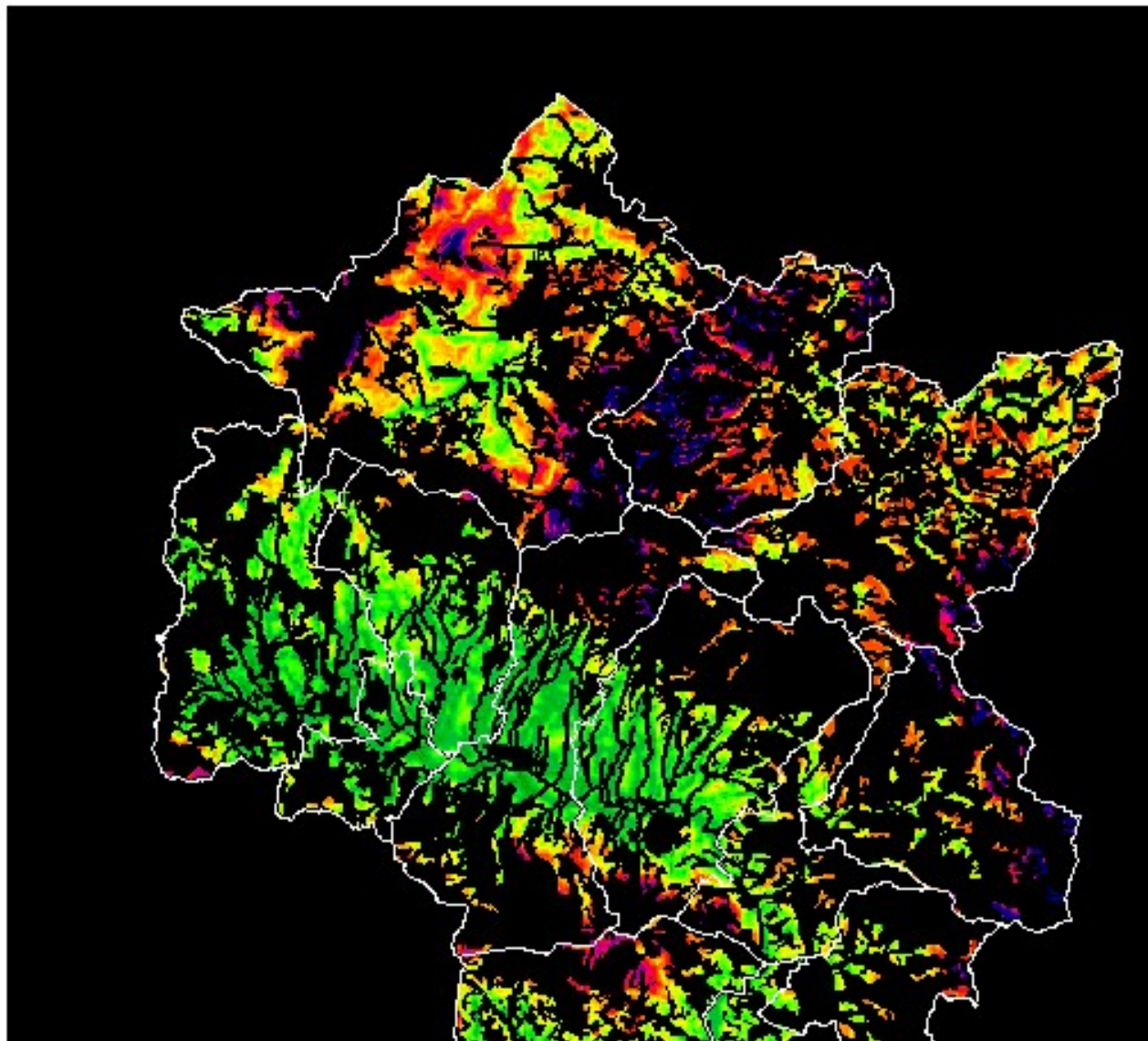
Formalmente...

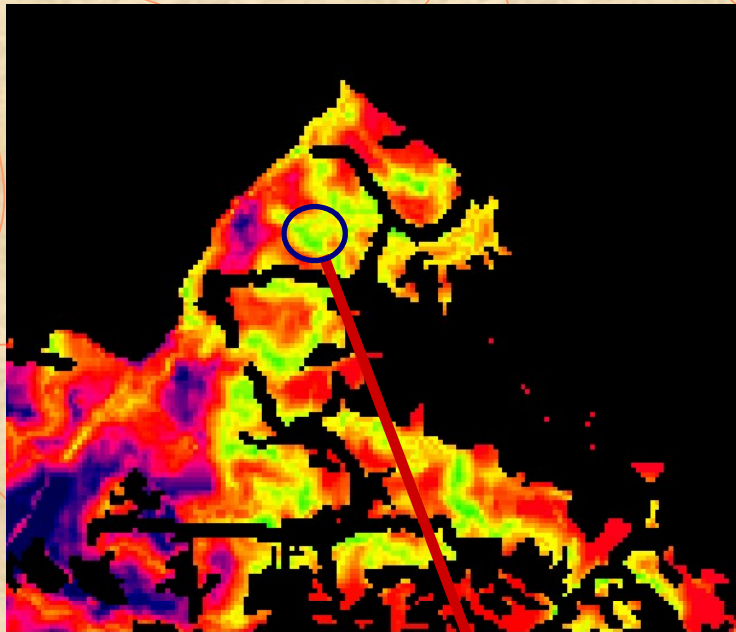
■ In modo matematico, la procedura di valutazione della combinazione lineare pesata è riportata come segue

■ $\Sigma(x_i) * \Pi(c_j)$

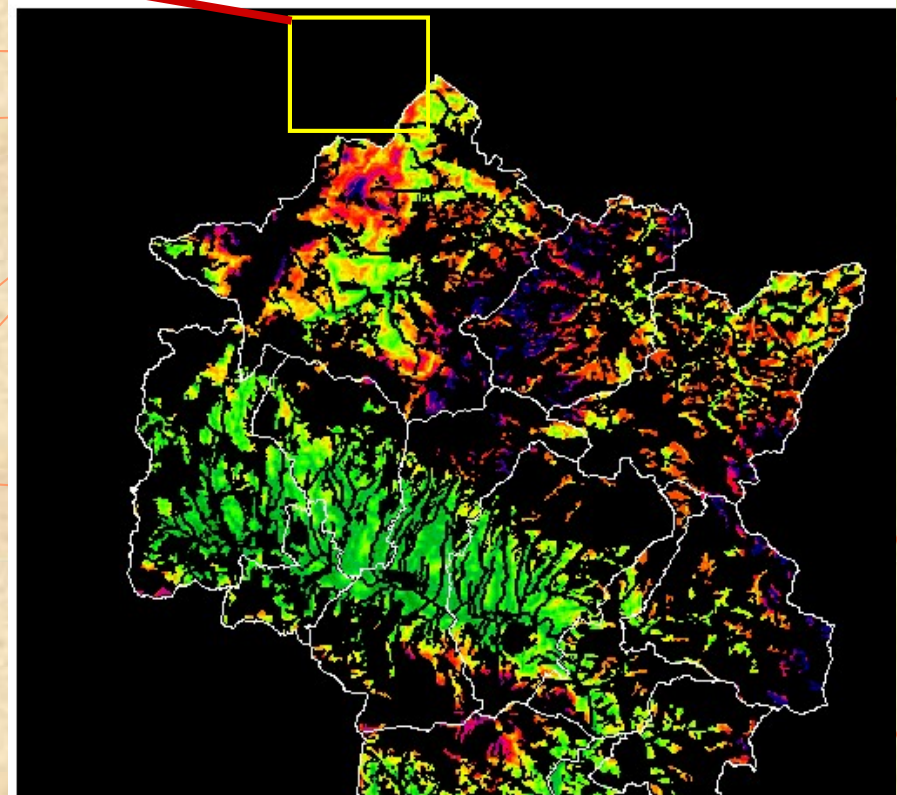
■ con x_i valore assunto da ciascun pixel per il criterio x e c_j valore (0 o 1) del vincolo j per il relativo pixel

Relativamente al nostro caso di studio, la valutazione secondo il metodo della combinazione lineare pesata è riportata a fianco. In verde sono riportate le aree maggiormente vocate per la espansione delle attività produttive. Passando al giallo, rosso e violetto il territorio è progressivamente meno adatto a questa attività.





wlc	191
naturalfuzzy	255
slofefuzzy	202
viabfuzzy	255
cityfuzzy	51



Il metodo di soluzione compensatorio, pur essendo senz'altro il più intuitivo, ha alcune controindicazioni.

Esaminando il punto evidenziato, si può notare come il giudizio complessivo indichi una zona con buona vocazione allo sviluppo di attività produttive (punteggio wlc)(weighted linear combination 191/255)

Esaminando però in dettaglio i singoli criteri si può notare come la distanza dai luoghi di commercializzazione sia veramente limitante (punteggio cityfuzzy 51/255)

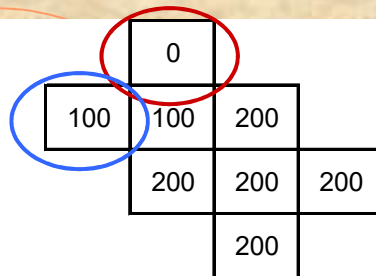
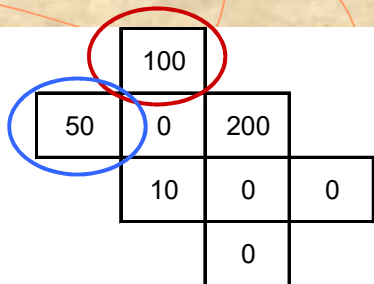
L'alto valore degli altri criteri però porta a sottovalutare questo limite.

In conclusione, la combinazione pesata è spesso troppo "permissiva"

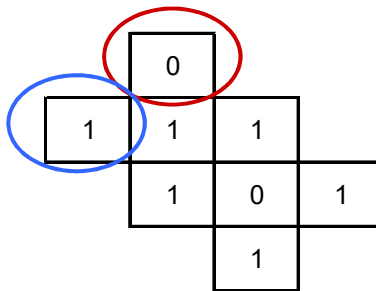
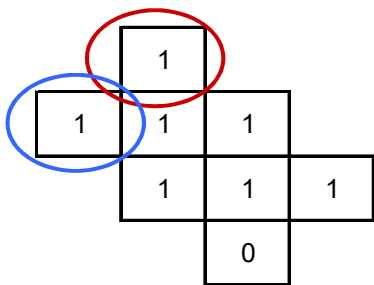


Una seconda soluzione...

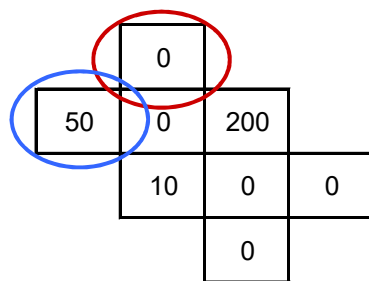
- Il metodo non compensatorio più semplice è l'operatore *minimo*
- Secondo tale metodo, il valore complessivo di un singolo pixel è dato dal minimo valore raggiunto dai diversi criteri, moltiplicato per il valore dei diversi vincoli.



Criteria



Vincoli



Valutazione

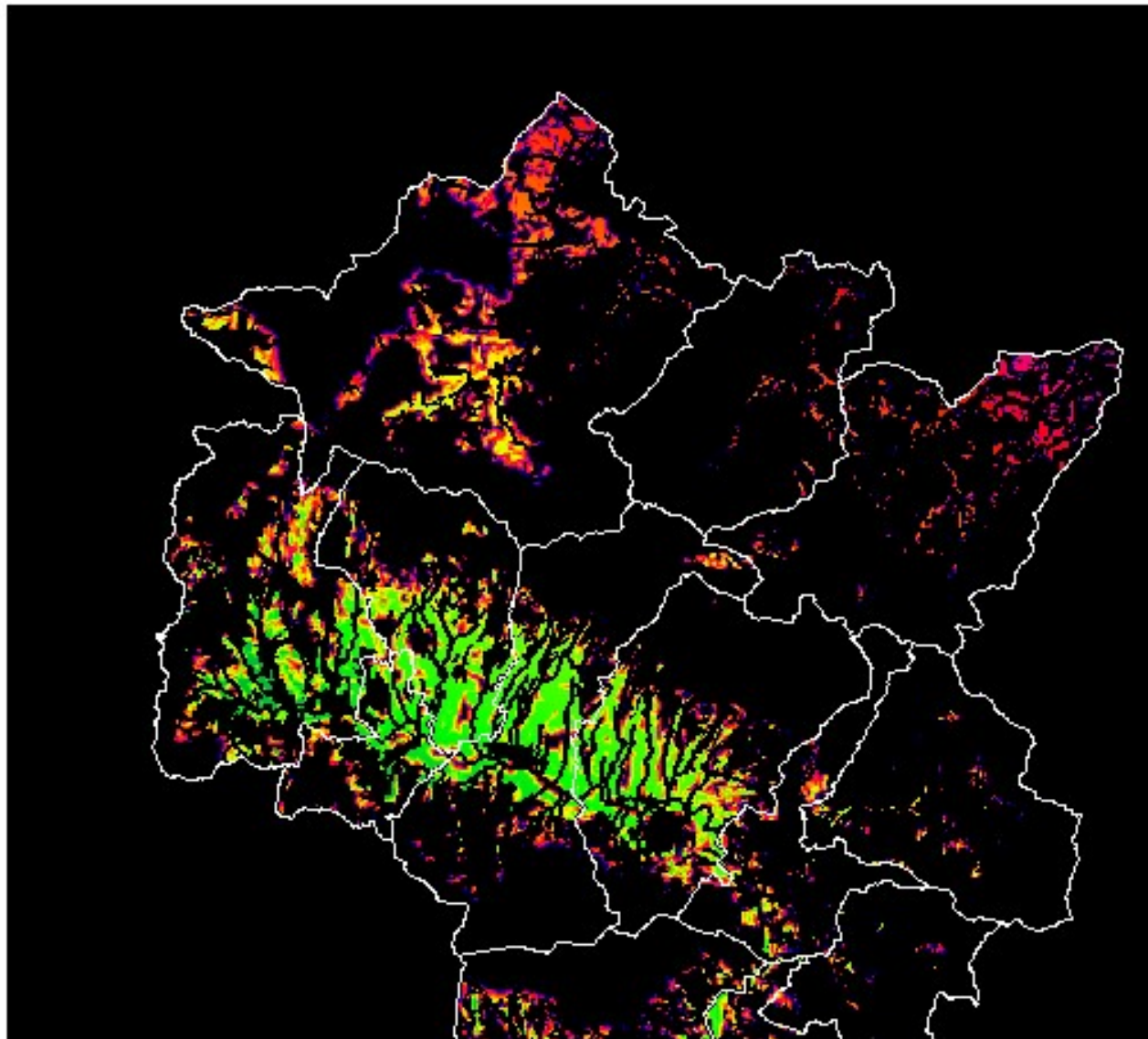
Caso 1 - pixel evidenziato in rosso:

$$\text{Valutazione} = \min(100, 0) \times 1 \times 0 = 0$$

Caso 2 - pixel evidenziato in bleu:

$$\text{Valutazione} = \min(50, 100) / 2 \times 1 \times 1 = 25$$

Soluzione assolutamente non compensatoria



Come si può notare dall'analisi della figura, il metodo non compensatorio è molto più limitativo, in quanto considera nel punteggio solamente il fattore maggiormente limitante



L'impiego pratico dei risultati dell'analisi

- Il modello costruito, risolto sulla base delle procedure indicate riporta la attitudine del territorio a ospitare una espansione delle attività produttive
- Le mappe ottenute rappresentano pertanto degli strumenti piuttosto versatili
- Sulla base delle soluzioni calcolate è infatti possibile effettuare diverse analisi pratiche relative a problemi di pianificazione territoriale
- P.e. sulla base della soluzione non compensatoria, che appare teoricamente più corretta, è possibile selezionare i 1000 ettari a maggiore attitudine all'espansione delle attività economiche