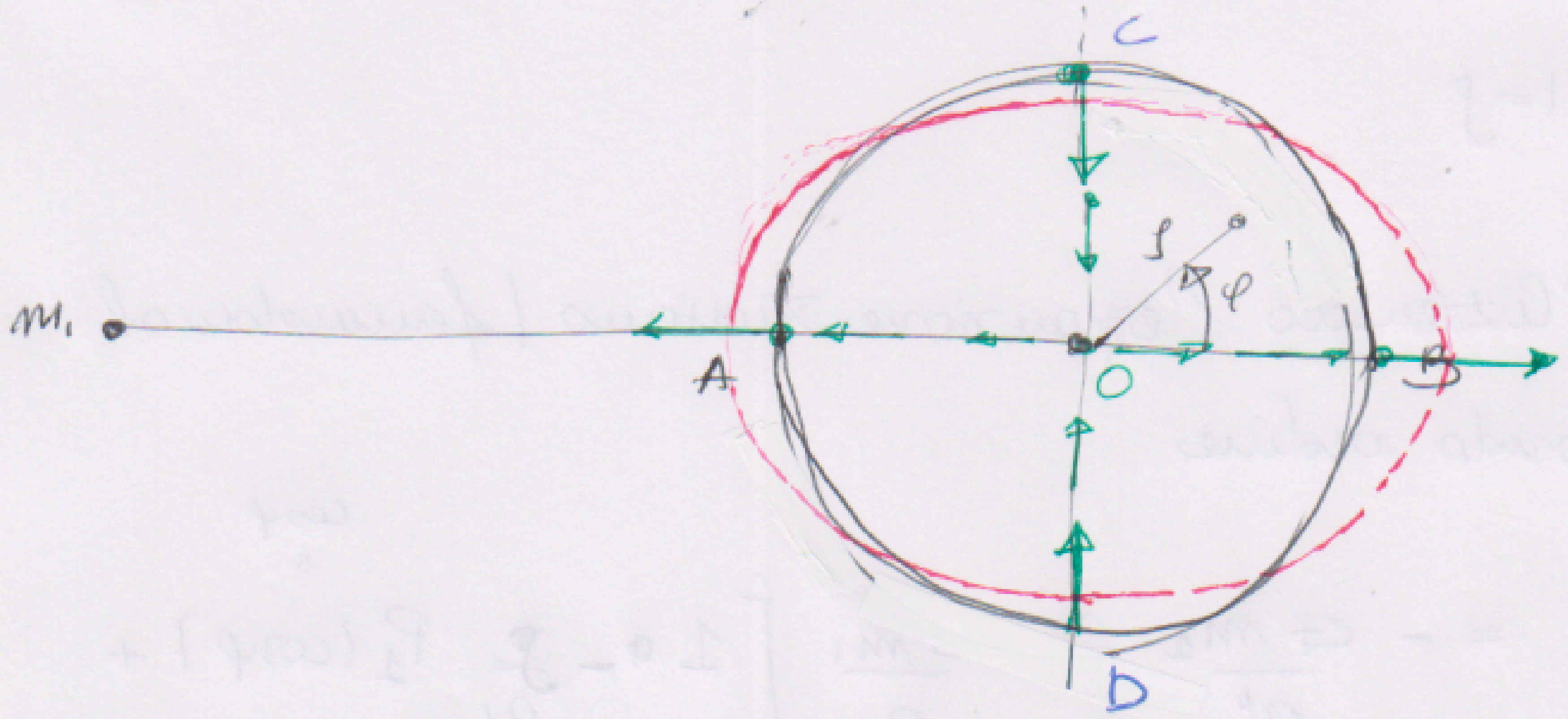
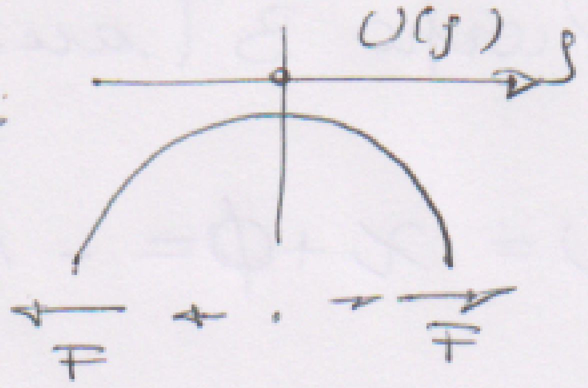
Analizziamo qualitativamente la distribuzione di forze associate al campo U su un corpo esteso



$$U = -\frac{G m_1}{a}\left[1 + \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \frac{1}{2}\left(3\cos^2\varphi - 1\right)\right]$$

Valutiamo U lungo l'asse A-B : $\varphi = 0, \pi$

$$U\Big|_{AB} = -\frac{G m_1}{a}\left[1 + \left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right] \Rightarrow$$



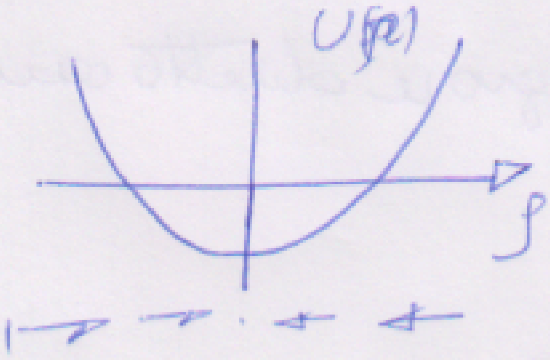
È pot è una parabola con concav. verso il basso ⇒ campo di forze repulsivo

Nota in O equilibrio, in A domina attr. grav.

in B domina forza centrifuga

Consideriamo l'asse CB $\theta = \pi/2, \frac{3}{2}\pi$

$$U\Big|_{CB} = -\frac{Gm_1}{a}\left[1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \frac{1}{2}\right] = \frac{Gm_1}{a}\left[-1 + \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \frac{1}{2}\right]$$



Campo di forze attrattivo

lo stesso tipo di potenziale di

massa con molla

Il campo è denominato campo di maree

Stimiamo, in maniera analoga a quanto fatto per la rotaz. terrestre, l'elongazione della terra dovuta all'attrazione lunare (l'altezza delle maree)

Trascurando la costante, l'energia pot. totale trovata è la seguente

$$U = -\frac{Gm_1}{a^3}\frac{\rho^2}{2}\left(3\cos^2\varphi - 1\right) = -\frac{Gm}{R}\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \xi\,\frac{1}{2}\left(3\cos^2\varphi - 1\right)$$

dove R è il raggio medio terrestre e $\xi = \frac{m_1}{m}\left(\frac{R}{a}\right)^3$, m la massa della Terra; assumiamo $\xi \ll 1$

Come per il caso della rotaz. terrestre, ammettiamo che le forze di marea deformino leggermente la superficie terrestre in modo da renderla leggermente ellittica con asse maggiore diretto come la congiungente Terra-Luna

$$\rho(\varphi) = R\left[1 - \frac{2}{3}\,\varepsilon\, P_2(\cos(\varphi))\right]$$

$\llcorner$ r ellitt. $\varepsilon \ll 1$

$$= R\left[1 - \frac{\varepsilon}{3}\left(3\cos^2\varphi - 1\right)\right]$$

Come già calcolato il potenziale gravitazionale della Terra rimette (nel calcolo non era incluso l'attrazione terrestre legato alla sua estensione ma solo la forza terra-luna)

$$\phi = -\frac{mG}{R}\left[1+\varepsilon\cdot\frac{4}{15}\underbrace{\frac{1}{2}(3\cos^2\varphi-1)}_{P_2(\cos\varphi)}\right]$$

$\downarrow$

potenz. di attraz. grav. delle masse che compongono la Terra

$$U+\phi\Big|_{\rho\simeq R} = -\frac{mG}{R}\left[1+\left(\varepsilon\frac{4}{15}+\xi\right)P_2(\cos\varphi)\right]$$

Imporre pot. costante $\Rightarrow$ $\varepsilon = -\frac{15}{4}\xi$

il segno $-$ è legato alla scelta dell'angolo, quello che prima era asse N-S adesso è $\bar{AB}$, quindi la Terra si allunga lungo l'asse $\bar{AB}$

$$\xi = \frac{m_l}{m}\left(\frac{R}{a}\right)^3 = 5{,}6\ 10^{-8}$$

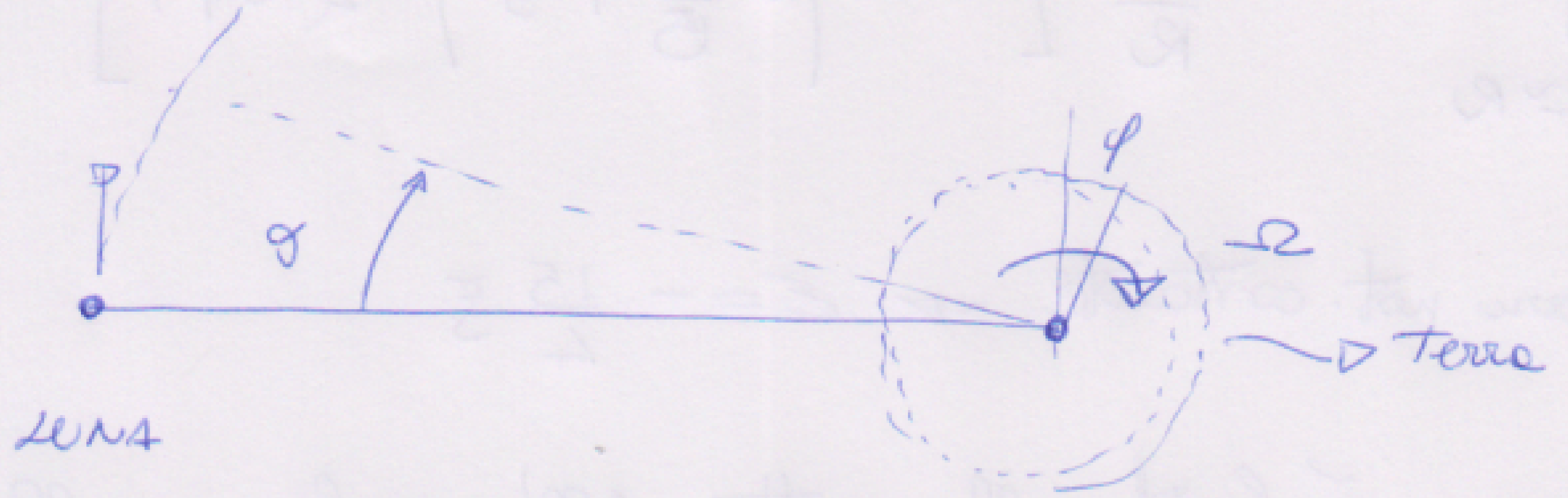
$R = 6{,}4\ 10^6\ m$; $a = 3{,}8\cdot10^8\ m$; $m\ 5{,}9\cdot10^{24}\ kg$, $m' = 7{,}4\ 10^{22}\ kg$

otteniamo ~~[illegible]~~ $\Delta R = 1{,}2\ m$

in realtà $\Delta R \sim 30\ cm$, andrebbe considerato come un solido elastico + fluido e non come un fluido

Stimiamo come gli effetti di marea possano modificare il moto orbitale Terra-Luna

Consideriamo che il c.d.m. del sistema T-L coincide con il c.d.m. della Terra, così possiamo considerare il c.d.m. della Terra fermo, la Luna che ruota attorno con velocità angolare ω e la Terra che ruota su se stessa a velocità Ω

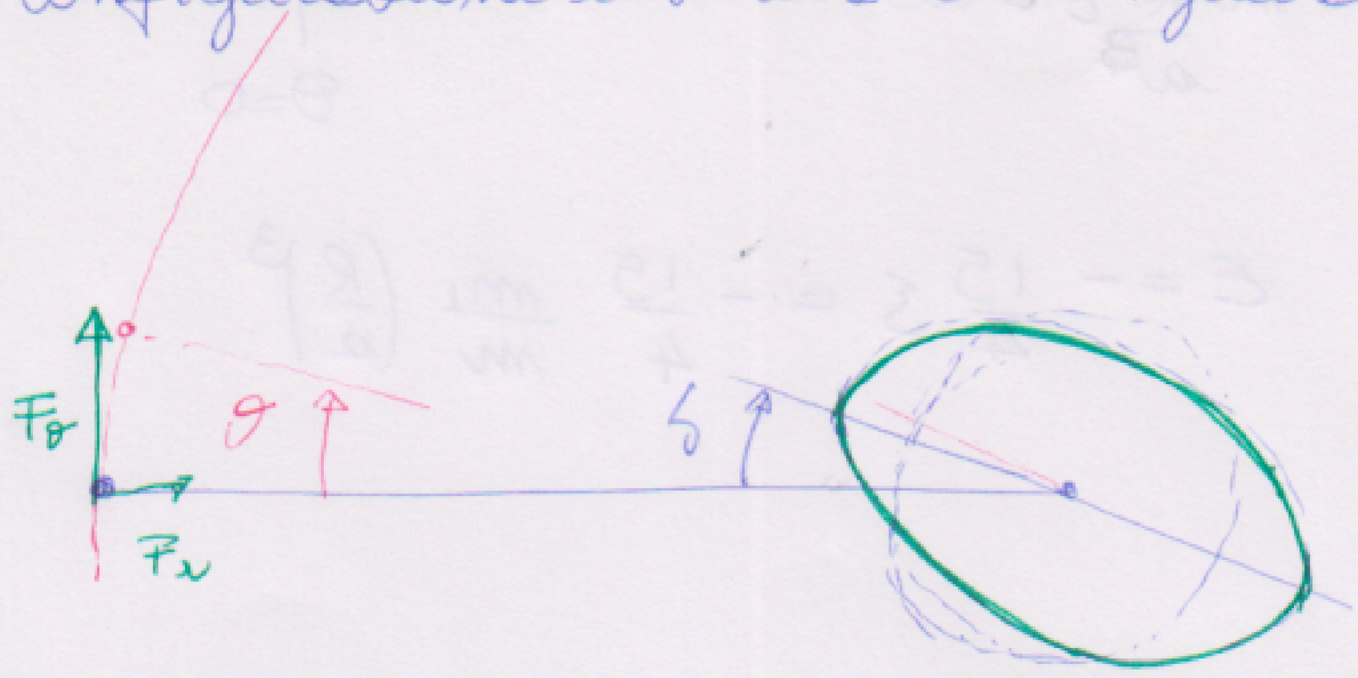


$\Omega = \dot{\varphi} \qquad \omega = \dot{\vartheta}$

Nota, T. e L. ruotano nello stesso senso

L'attrazione della Luna deforma la Terra produce le maree. Poichè $\Omega >> \omega$, per inerzia, l'allungamento terrestre non è perfettamente allineato all'asse T-L, ma tende ad "anticipare" cioè l'onda di marea è spostata in avanti rispetto alla posiz. della Luna.

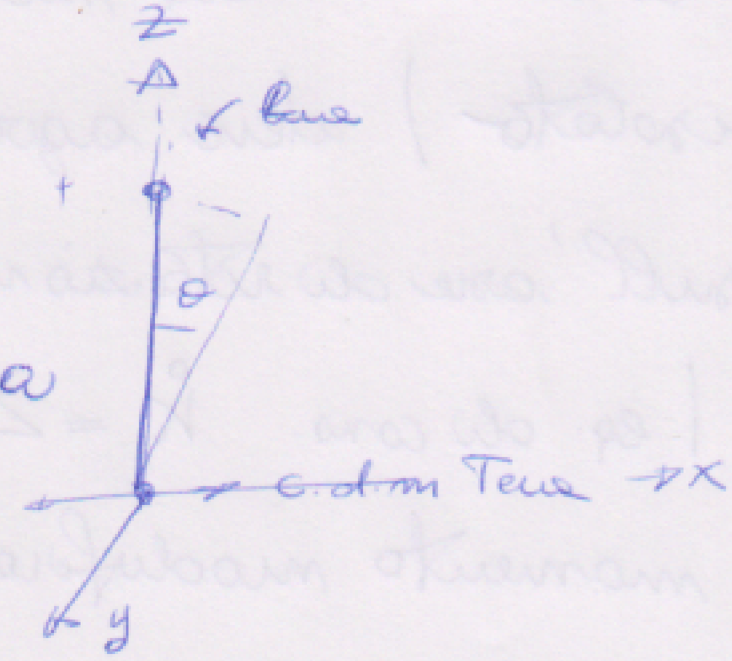
La configurazione osservata è la seguente



Il potenziale gravitazionale che la Terra genera sulla Luna è (abbiamo già calcolato il pot prodotto da un ellissoide rotaz.)

$$\phi(r,\theta) = -\frac{Gm}{r} + \frac{\varepsilon}{5} mG\frac{R^2}{r^3}\left[3\cos^2(\theta-\delta)-1\right]$$

Calcoliamo la forza che si genera sul centro della Luna a causa di questa interazione



$$\underset{\substack{m_1 \\ \downarrow \\ \text{massa Luna}}}{\frac{F}{m_1}} = -\nabla\phi\Big|_{\theta=0,\, r=a} =$$

$$= -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta}$$

Consideriamo la componente tg. alla traiettoria

$$\frac{F_\theta}{m_1} = -\frac{1}{a}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

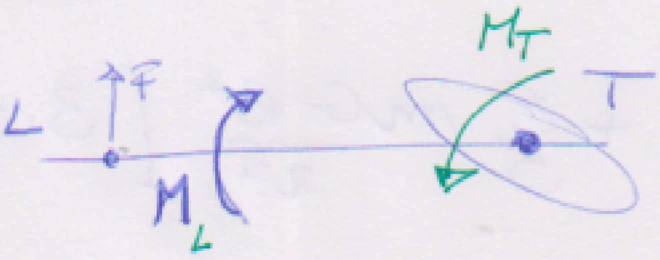
$$\frac{F_\theta}{m_1} = -\frac{1}{a}\,\frac{3}{5}\,G\,m\,\frac{R^2}{a^3}\,\varepsilon\,6\cos(\theta-\delta)\sin(\theta-\delta)\Big|_{\theta=0}$$

Ricordiamo $\varepsilon = -\frac{15}{4}\xi = -\frac{15}{4}\frac{m_1}{m}\left(\frac{R}{a}\right)^3$

e $\delta \ll 1$

$$F_\theta = \frac{1}{a}\,\frac{m_1^2 G}{R}\left(\frac{R}{a}\right)^6 \frac{27}{2}\,\delta$$

La forza F_θ genera un momento $M_L = F_\theta \cdot a$ che tende ad incrementare la velocità angolare della Luna



Per conservaz. del mom. angolare totale (Il sist. T-L è isolato) deve agire un momento uguale e contrario sull'asse di rotazione terrestre $M_T = -M_L = -F_\theta a$ (eq. di cons. $\dot{K} = \Sigma M_i$). Valutiamo come questo momento modifica la velocità di rot. della Terra

II eq. Card. $\quad I_{\parallel}\,\dot{\Omega} = -F_\theta a = M_T$

$\downarrow$

inerzia della Terra rispetto asse ortogonale al piano

Approssimando (grossolanamente) la Terra come una sfera di ~~aa~~ densità di massa uniforme

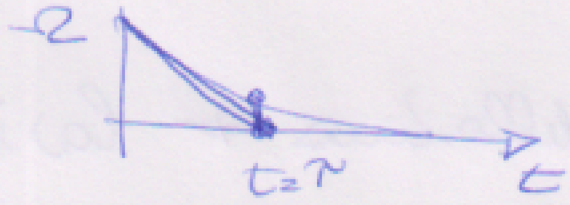
$I_{\parallel} = \frac{2}{5} m R^2$ otteniamo

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = -\frac{m_l^2}{m}\frac{G}{R^3}\frac{1}{\Omega}\frac{5}{2}\left(\frac{R}{a}\right)^6\frac{27}{2}\,\delta \simeq 10^{-17}\,s^{-1} = \frac{1}{\tau}$$

Dove $\delta \sim 0.05$ rad (3°), $a = 3.9\,10^8$ m

ovvero una stima di circa 1 millisecondo al secolo..

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\Omega}{\tau} \Rightarrow \Omega(t) = \Omega(0)\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$



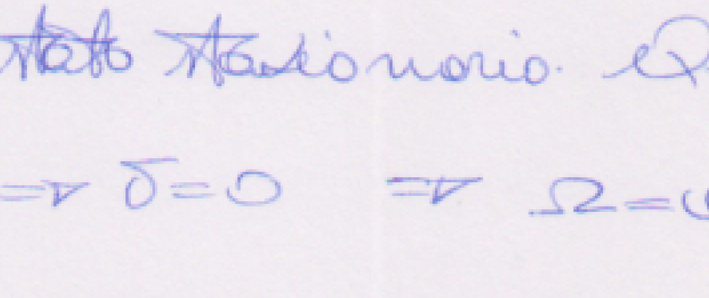
Il tempo caratteristico con cui decresce $\Omega \sim \tau$

(La veloc. angolare si dimezza ogni τ)

$\tau = 10^9$ anni = 1 miliardo di anni

Età della Terra $\simeq$ 4 miliardi di anni

Il sistema T-L è troppo giovane affinché si sia raggiunto uno ~~stato~~ stazionario. Quale? Quello x cui $F=0 \Rightarrow \delta=0 \Rightarrow \Omega=\omega$



In quel caso un giorno durerà quanto la rivoluz. della ~~Te~~ Luna attorno alla Terra (circa 1 mese)

Un calcolo analogo, fatto però per la Luna, ovvero considerando la deformaz. della Luna indotta dalla Terra (ed il fatto che la Luna è un mezzo solido elastico) porta ad un tempo di decadimento della rotazione propria della Luna di

$\frac{\dot{\Omega}'}{\Omega'} \sim -10^{-14} s^{-1}$ ⇒ Tempo di rilass. $T = \frac{\Omega'}{|\dot{\Omega}|} \sim 10^6$ anni

↳ vel. ang. di rot. della Luna attorno al proprio asse

$T \ll$ età della Luna ⇒ la rotazione della Luna attorno ~~al proprio~~ il proprio asse si è sincronizzata al moto di rotazione attorno alla Terra ⇒ la Luna mostra sempre la stessa faccia alla Terra