Sistemi continui

Modello di un sistema continuo.

Descrizione Lagrangiana (materiale)

Descrizione Euleriana (spaziale)

Quali caratt. deve avere un sistema per essere considerato continuo?

A livello microscopico la materia non può essere considerata "continua"

A liv. macroscopico possiamo approx. la materia (solido o liquido) come un mezzo capace di occupare uniformemente lo spazio.

Caratteristiche tipiche dei continui

- Deformabilità
- Omogeneità
- Isotropia

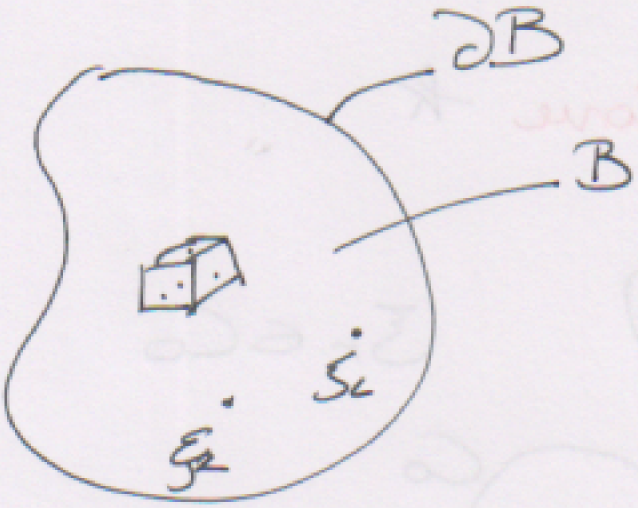
Modelli matematici di continui:

Derivazione delle eq. fondamentali di sistemi continui (principi di conservazione di massa, energia...)

Equazioni costitutive: caratterizzano il comport. meccanico di una specifica classe di materiali continui (solidi elastici, fluidi viscosi)

Cinematica dei continui

Continuo: sistema di punti materiali



Assegnamo ad ogni particella del continuo un'etichetta

ξ: proprietà specifiche che identificano una particella (quantità che mi permette di individuare in maniera univoca una particella del sistema)

Corpo costituito da n particelle : $\{\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n\}$

Continuo sarà caratt. da $\lim_{n \to \infty}$ del numero di particelle

Ad ogni particella ξ_k può essere associata una posizione nello spazio fisico $\mathbb{R}^3$

Configurazione del corpo C_t: specificazione della posizione di tutte le particelle che costituiscono il solido

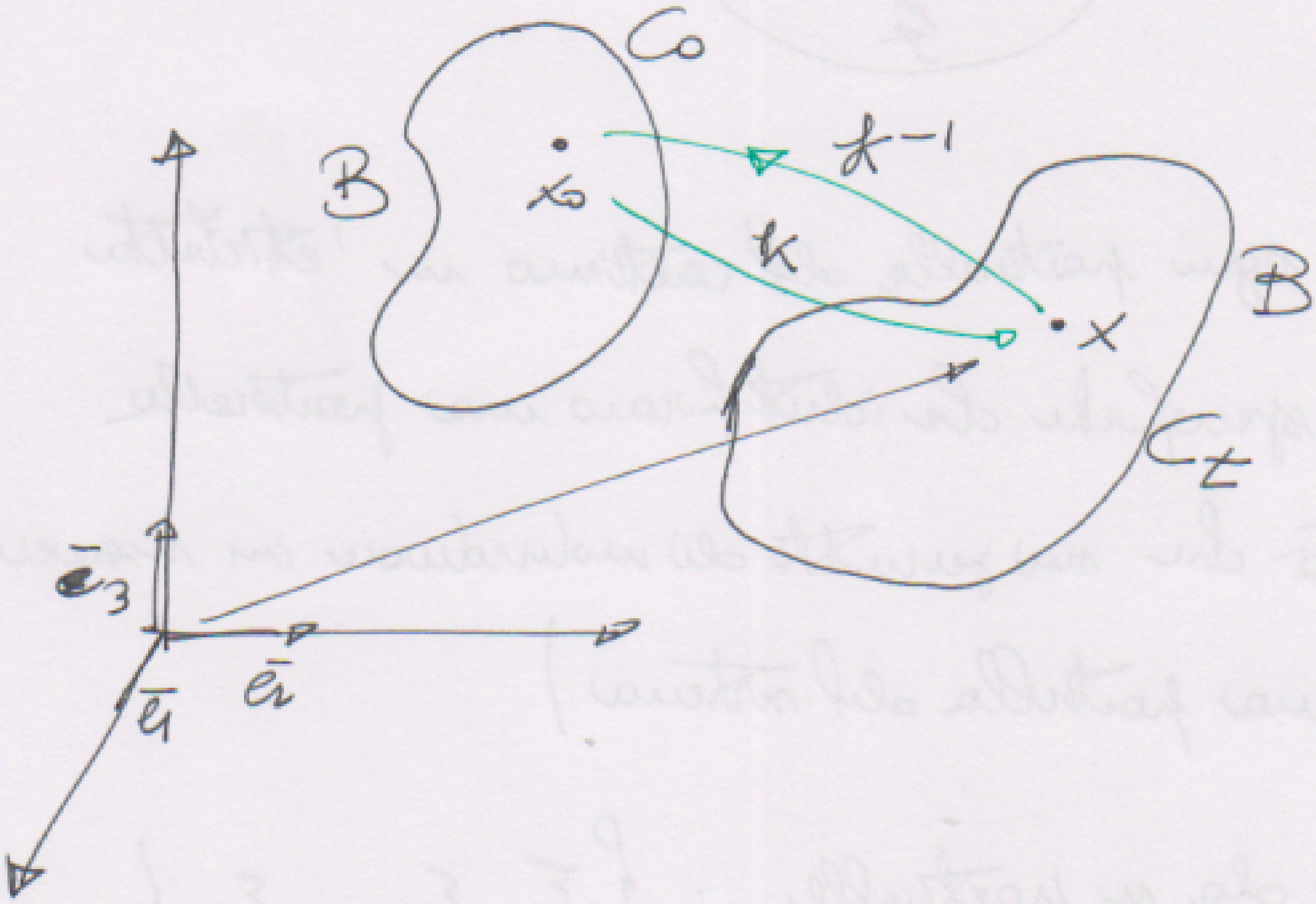
Distinguiamo

C_0: configurazione di riferimento (indeformata)

C_t: configurazioni attuali

Funzione posizione k

$x = k(\xi_k, t) \qquad \xi_k \in C_0$



prop. della funzione posizione: regolare, invertibile

Per semplicità indichiamo (senza indicare indice di particella)

$x = k(\xi, t) \qquad \xi \in C_0$

$x = x(\xi, t)$

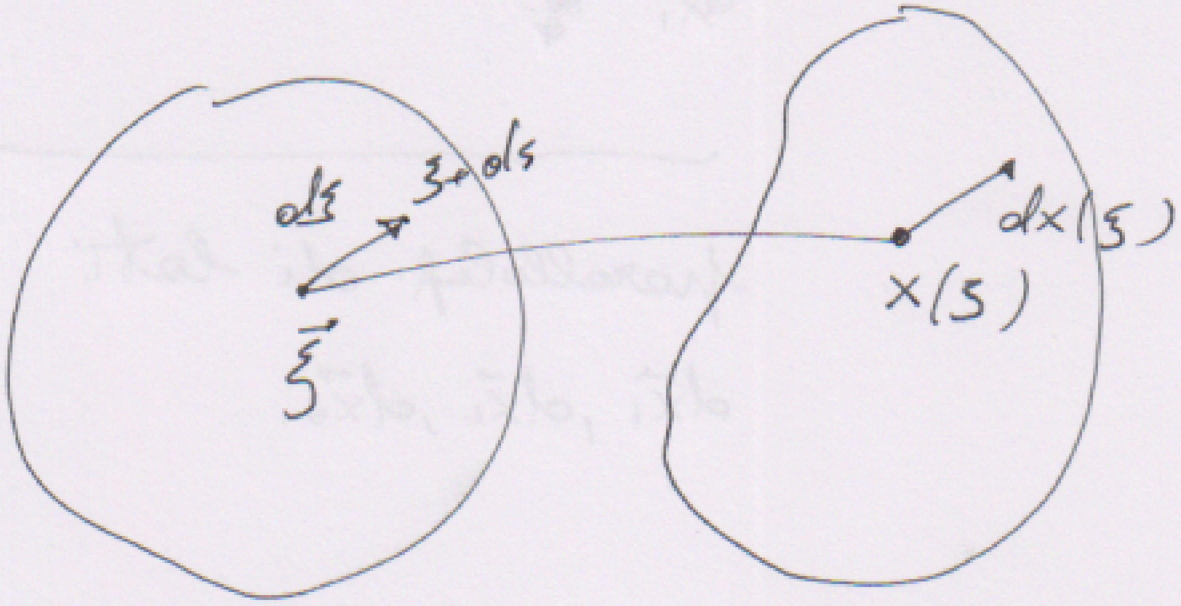
e indichiamo $\qquad \xi = k^{-1}(x, t) = x^{-1}(x, t)$

intendendo la posizione iniziale in $\mathbb{R}^3$ di una particelle nella configurazione non deformata, che al tempo attuale si trova in posizione x.

Studio delle deformazioni

$d\xi$: spostamento del punto ξ

dx : variazione della posizione nella conf. attuale



dalla relazione $\vec{x} = \vec{x}(\xi, t)$

Gradiente di deformazione

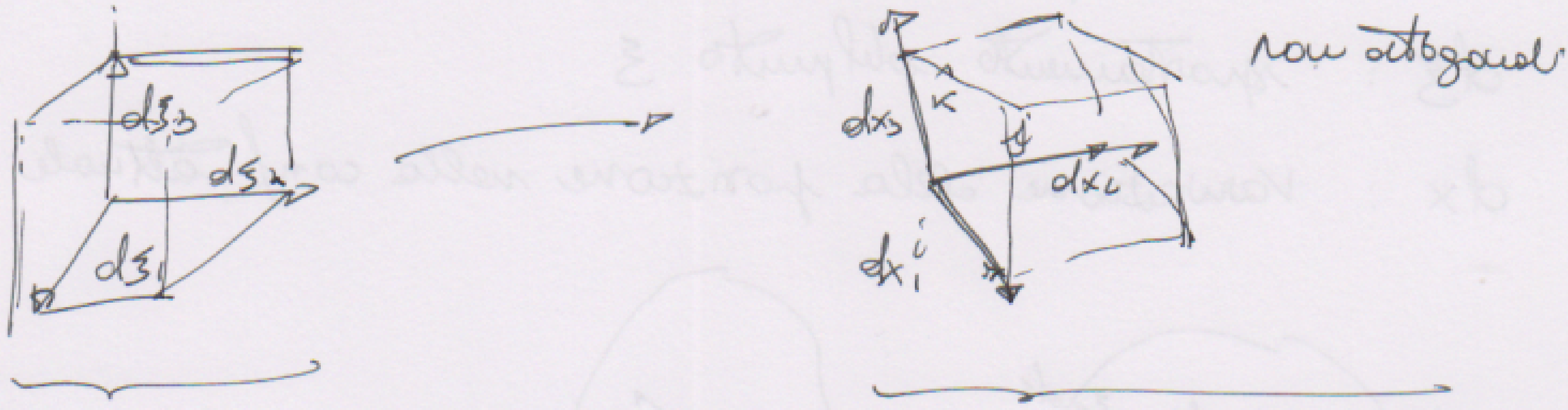
$$d\vec{x} = \underline{\underline{F}}(\xi, t)\, d\vec{\xi} \qquad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$$

data da $\underbrace{dx_i}_{\text{def. conf. iema}} = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} d\xi_j$

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & & \vdots \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \\ d\xi_3 \end{pmatrix}$$

infatto $dx_i \cong x_i(\xi_i + d\xi_i) - x_i(\xi_i)$

Variazione di volume a seguito di una deformazione



Prima della def.

Volume $d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$

parallelep. di lati

$d\vec{x}_1, d\vec{x}_2, d\vec{x}_3$

Volume deformato $dV(t) = (dx_2 \wedge dx_3) \cdot dx_1$

$$d\vec{x}_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} d\xi_1, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} d\xi_1, \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} d\xi_1 \right)$$

$$= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right) d\xi_1$$

$$dx_2 \wedge dx_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} d\xi_2 d\xi_3$$

$$(dx_2 \wedge dx_3) dx_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

$\Rightarrow dV(t) = |F| dV_0$