## Cinematica approccio Lagrangiano e Euleriano

App. Lagrangiano: descriz. incentrata sul moto della singola particella: $x(\xi, t)$

↳ costante

App. Euleriano: ci focalizziamo su uno specifico punto dello spazio in cui ad esempio si trova l'osservatore

## Descrizione Lagrangiana

Fissiamo una particella $\xi \in C_0$ $\quad \chi(\xi,t)$: posiz. della particella a $t$

$$C_t = \{ x \mid x = \chi(\xi, t) \ \xi \in C_0 \}$$

Vel. Lagrangiana: velocità della singola particella

$$v_L = \frac{\partial \chi(\xi, t)}{\partial t} \quad \text{con } \xi \text{ fisso}$$

$$a_L = \frac{\partial^2 \chi(\xi, t)}{\partial t^2}$$

"Campo Lagrangiano": campo vettoriale che dip. esplic. da $\xi$

$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

Es.

$$x_1 = \frac{\xi_2}{1+2t}$$

$$x_2 = \xi_2 + 3\xi_3 t^2$$

$$x_3 = \xi_1 t + \xi_2$$

$$v_L \Rightarrow v_{L,1} = \frac{\partial x_1}{\partial t} = -\frac{\xi_2}{(1+2t)^2}\, 2$$

$$v_{L,2} = \frac{\partial x_2}{\partial t} = 6\xi_3 t$$

$$v_{L,3} = \xi_1$$

## Approccio Euleriano

Fissiamo adesso un punto $x$ nello spazio utilizzando l'inverso della mappa $x = \chi(\xi, t)$

$\xi = \chi^{-1}(x,t)$ posso trovare la posizione in $C_0$ della particella che si trova in $x$ al tempo $t$.

si considero la velocità del corpo osservata in un punto $x$ al tempo $t$: $v(x,t)$ coincide con la velocità della particella che in quell'istante transita in $x$

$$v_E(x,t) = v_L(\underbrace{\xi(x,t)}_{\xi = \chi^{-1}(x,t)}, t) = v(x,t)$$

analogamente $a_E = a_E(x,t) = a_L(\xi(x,t),t) = a(x,t)$

Es.

Prendiamo il caso precedente e invertiamo $\xi \leftrightarrow x$

$$\xi_1 = \frac{x_3 - (1+2t)x_1}{t}$$

$$\xi_2 = (1+2t)x_1$$

$$\xi_3 = \frac{x_2 - (1+2t)x_1}{3t^2}$$

$$v_{E,1} = v_{L,1}(\xi(x)) = \frac{-2}{(1+t)^2}\xi_2 = \frac{-2}{(1+2t)^2}(1+2t)x_1$$

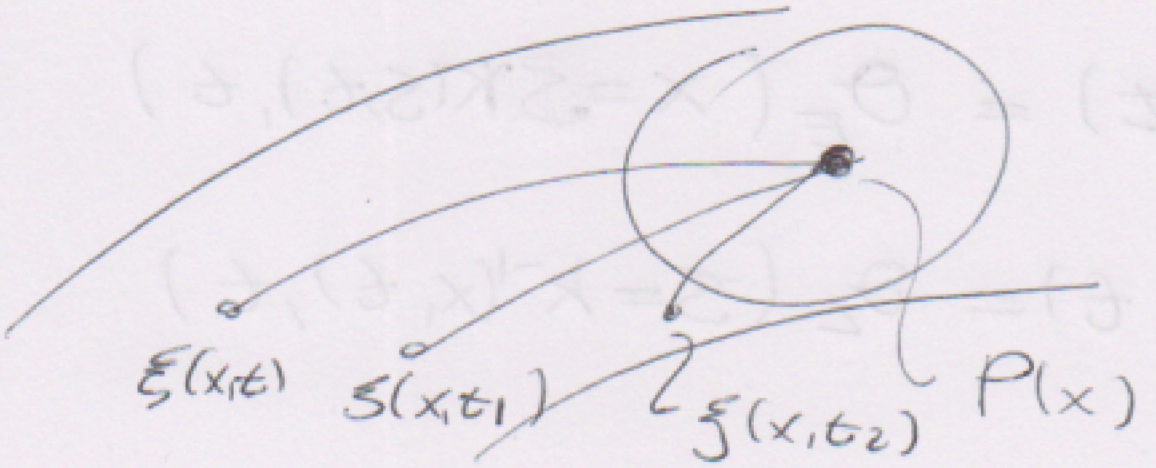
$$= -\frac{2x_1}{1+2t}$$

$$v_{E,2} = v_{L,2}(\xi(x)) = 6t\xi_3 = \frac{2x_2 - 2x_1(1+2t)}{t}$$

$$v_{E,3} = \frac{x_3 - (1+2t)x_1}{t}$$

Quale descrizione scegliere?

Spesso dipende dal contesto: fluidodinamica EULERO



Consideriamo una quantità scalare che caratterizza il continuo (es. la Temperatura) $\theta$

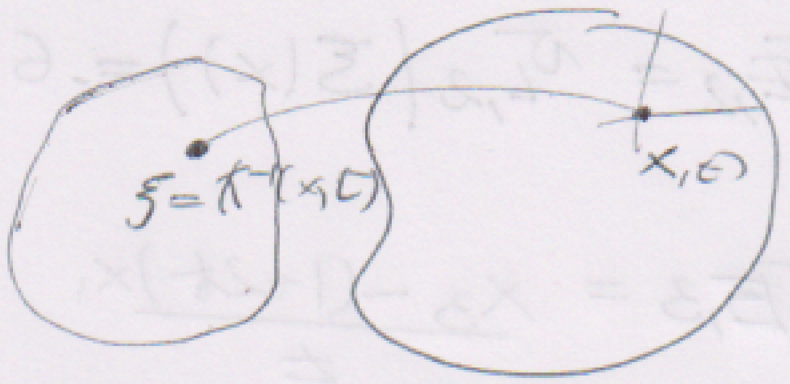
Lag $\Rightarrow$ $\theta = \theta(\xi, t)$ temp. di una porzione del continuo seguita nel suo moto

EUL $\Rightarrow$ $\theta = \theta(x, t)$ temp. in un punto dello spazio, indipendent. dalla particella che si trova in quel punto

Quale legame fra le 2 funzioni?

Fisso un pto nello spa $x$ e un tempo $t$

Risalgo alla particella nella sua configuraz. originale $\xi = \kappa^{-1}(x,t)$




Analogamente data $\xi$ posso risalire alla sua posizione al tempo $t$ $\quad x = \kappa(\xi, t)$

$$\theta_L(\xi, t) = \theta_E(x = \kappa(\xi,t), t)$$

$$\theta_E(x, t) = \theta_L(\xi = \kappa^{-1}(x,t), t)$$

## Derivata Materiale (o Lagrangiana)

derivata totale risp. al tempo di una grandezza riferita ad una specifica particella del continuo.

Se la quantità è espressa in forma Lagrangiana

$\vartheta = \vartheta_L(\xi, t)$

$$\frac{d}{dt}\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(\xi, t)$$

Se invece è espressa in termini Euleriani

$$\frac{d}{dt}\vartheta_E^{(x,t)} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(x,t) + \sum_i \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \underbrace{\frac{dx_i}{dt}}$$

dove $x_i = K(\xi, t)$

$\frac{dx_i}{dt} = v_i(x,t)$ campo di velocità in $x$ al tempo $t$

$$\frac{d}{dt}\vartheta(x,t) = \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(x,t) + \sum_i \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x,t)\, v_i(x,t)$$

$$= \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(x,t) + \vec{\nabla}_x \vartheta \cdot \vec{v}(x,t)$$

$\frac{d}{dt}\,\theta(x,t)$ : derivata materiale (o Lagrang.)

$\frac{\partial \theta}{\partial t}(x,t)$ : deriv. temp. Euleriana

$\frac{dx_i}{dt}$ : velocità del continuo misurata da un osservatore Euleriano

Spesso si utilizza la seguente notazione

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}$$

accelerazione $a(x,t) = \frac{d}{dt}\,\vec{v}(x,t) =$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum v_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}\,\vec{v}(x,t)$$