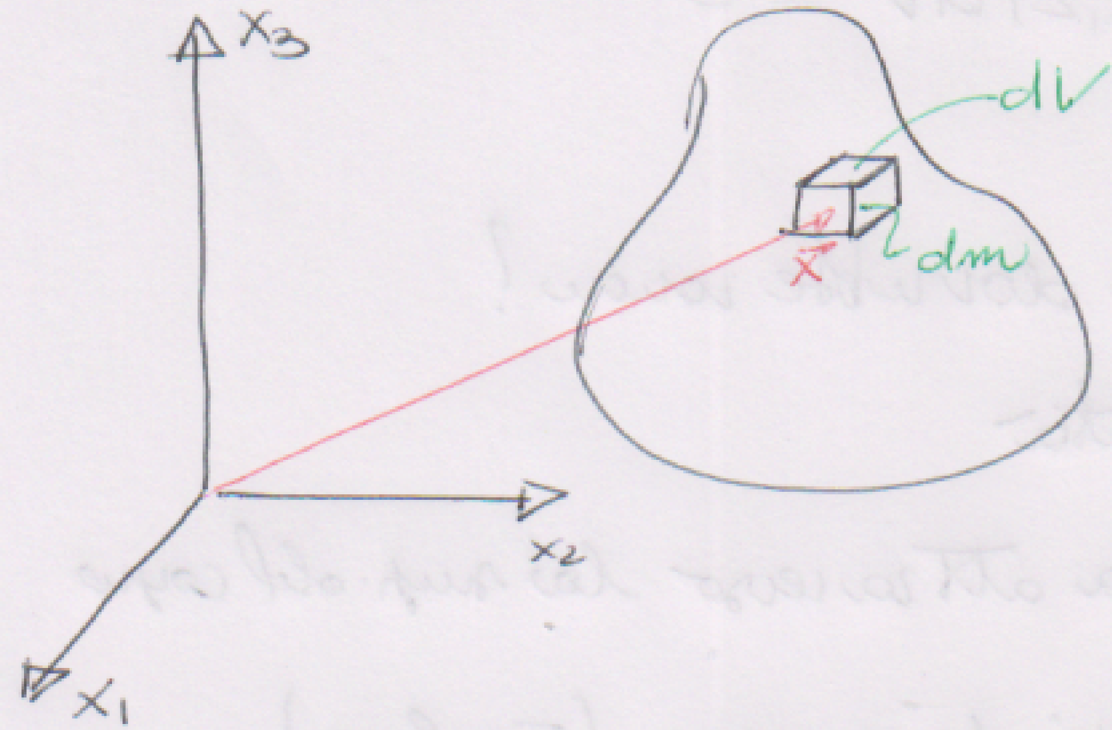
Dinamica dei continui: principi e equazioni fondamentali

Leggi di bilancio: esprimono la conservazione di alcune quantità fisiche

Forma integrale e forma differenziale

Equazione di continuità



Densità Euleriana $\rho(x,t) = \lim_{dV \to 0} \frac{dm}{dV}$

$\rho(x,t)$: campo scalare; densità rispetto alla conf. attuale

Massa totale $M = \int_V \rho(x,t)\, dV$

Se si fa riferimento alla configurazione C_0 possiamo def. una densità Lag. $\rho_0(\xi, t_0) = \lim_{dV_0 \to 0} \frac{dm_0}{dV_0}$

in questo caso la massa nella conf. di rif. si scrive

$$M = \int_{V_0} \rho_0 (\xi, t_0)\, dV_0.$$

Conservazione della massa: La massa di un corpo rimane costante in ogni configurazione

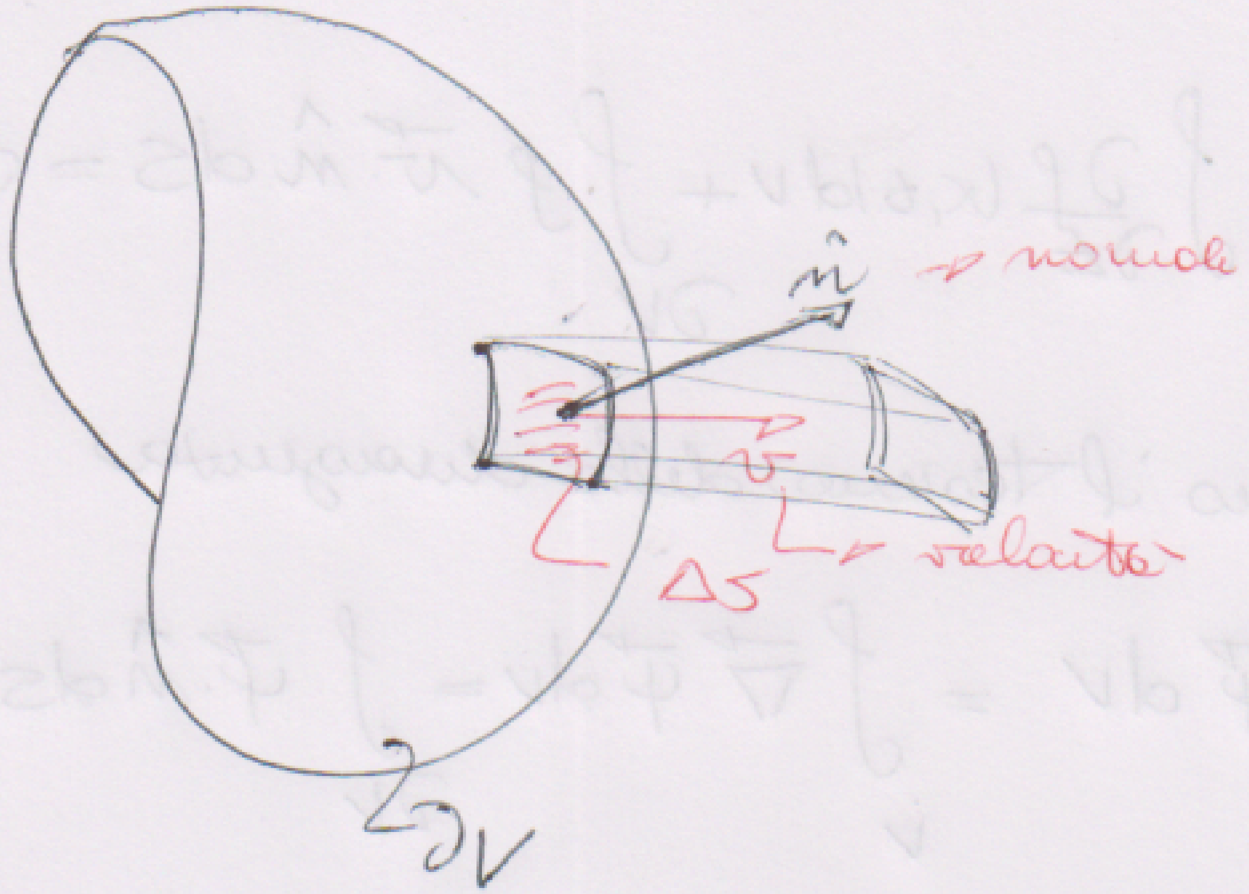
$$\frac{d}{dt} M = \frac{d}{dt} \int_V \rho(x,t)\, dV = 0$$

Perché la massa dovrebbe variare?

- Variaz. di densità
- Flusso di massa attraverso la sup. del corpo
- Sorgenti o pozzi di massa (Escluso)

$$\frac{d}{dt} m = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \int_{S=\partial V} \text{flusso attraverso la sup.}$$

Valutiamo la quantità di particelle che esce dal volume V in un unità di tempo

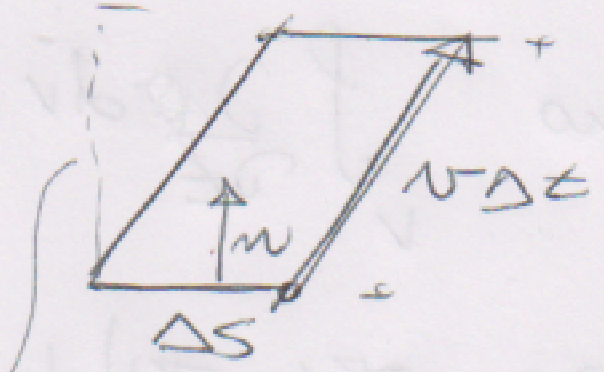


Quantifichiamo la massa uscente da ΔS in Δt

Nel parallelep. $\Delta m = \rho \overbrace{\Delta S \underbrace{\Delta t\, v_n}_{\text{spazio percorso}}}^{\text{volume parallelep.}}$

$v_n = \vec{v} \cdot \hat{n}$ velocità normale

Ricordo la misura dell'area



$h = \vec{v} \cdot \hat{n}\, \Delta t$

mandando $\Delta t \to 0$ valutiamo la massa scambiata attraverso la superficie $\underbrace{\left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_S = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho\, \Delta S\, v_n}_{\text{flusso di massa attraverso } \Delta S}$

otteniamo

$$\frac{dm}{dt} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t)\,dV + \int_{\partial V} \rho\, \vec{v}\cdot\hat{n}\, dS = 0$$

Applichiamo il teorema della divergenza

$$\int_V \mathrm{div}\, \vec{\varphi}\, dV = \int_V \vec{\nabla}\, \vec{\varphi}\, dV = \int_{\partial V} \vec{\varphi}\cdot\hat{n}\, dS$$

con $\vec{\varphi} = \rho\vec{v}$

$$\int_{\partial V} \rho\vec{v}\cdot\hat{n} = \int_V \underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})}_{\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i)}\, dV$$

otteniamo $\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \int_V \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})\, dV =$

$$\underbrace{\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v})\right) dV = 0}_{}$$

Formulazione integr. dell'Eq. continuità

Poichè questo bilancio di massa deve valere per qualsiasi volume che considero (o suddivisione del contorno)

Eq. di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0$$

Formulaz. Euleriana

caso di un fluido a densità costante $\rho(x,t) = \rho_0$

$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\vec{v} = 0 \quad$ Eq. dei fluidi incomprimibili

Notiamo che l'equaz. cont. può essere scritta anche

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\,\vec{\nabla}\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\rho}_{} = 0$$

deriv. materiale $\quad \overset{\text{Eq. cont.}}{\Rightarrow} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho\,\vec{\nabla}\vec{v} = 0$

Derivazione alternativa

Confrontiamo il calcolo della massa di un corpo nella conf di rif. e in quella attuale

$$m(V_0) = \int_{V_0} \rho_0(\xi, t_0)\, dV_0 = \int_V \rho(x,t)\, dV = m(V)$$

in cui abbiamo il legame $x = K(\xi, t)$
che induce il cambio di variabile $x \Leftrightarrow \xi$

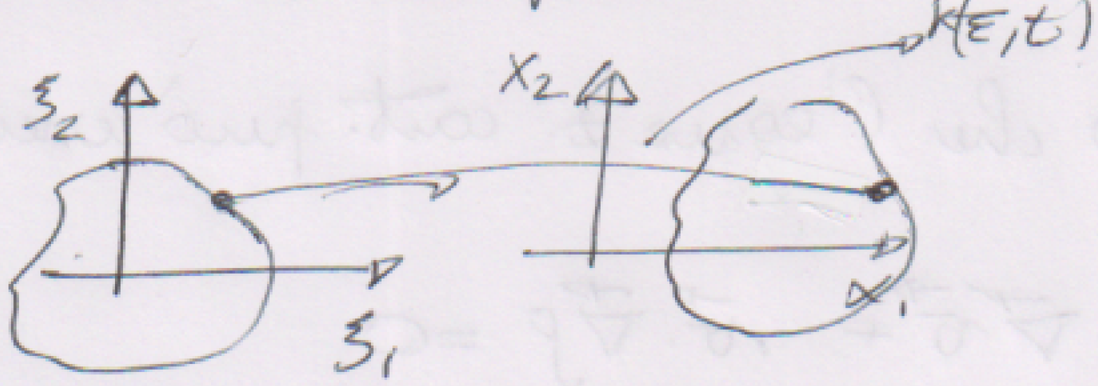
$$\int_V \rho(x,t)\,dV = \int_{V_0} \rho(x(\xi,t),t)\,|J(\xi,t)|\,dV_0$$

cambio di variabile

Formula del cambio di variabile in un integrale

$|J|$ = det della mat. Jacobiana della trasformazione

Es. consideriamo un caso piano



$$x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, t)$$

$$x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, t)$$

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}$$

$$|J| = \left| \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \right|$$

Tornando alla formula generale otteniamo

$$\int_{V_0} \left(\rho(x(\xi,t),t)\,|J(\xi,t)| - \rho_0(\xi_0,t_0) \right) dV_0 = 0$$

per l'arbitrarietà di V_0

$$\rho |J| = \rho_0 \quad \rightarrow \quad \rho\,|\,x(\xi,t),t\,)\,|J(\xi,t)| = \rho_0(\xi,t_0)$$

poiché $J(\xi,t_0) = 1$

l'eq. precedente indica che la quantità $\rho|J|$ è

costante : $\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\rho |J|\right) = 0}_{\text{Eq. di continuità in forma Lagrang.}}$

Ricaviamo il legame fra le 2 esp. di continuità

Consideriamo prima la formula * con $\rho = 1$

$$\underbrace{\int_{V_t} dV}_{\substack{\text{misura vol.}\\ \text{a tempo } t}} = \int_{V_0} |J(\xi,t)|\, dV_0$$

deriviamo

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t} dV = \int_{V_0} \frac{d|J|}{dt}\, dV_0 = \int_{V_0} \frac{1}{|J|}\frac{d|J|}{dt}\, \underbrace{|J|\, dV_0}_{\substack{\text{misura del}\\ \text{volume infinitesimo}\\ \text{trasformato al}\\ \text{tempo } t}}$$

$$|J|\, dV_0 = dV_t$$

↳ contraz./dilataz. del volume

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t} dV = \int_{V_t} \frac{1}{|J|}\frac{d|J|}{dt}\, dV_t$$

Adesso applichiamo la formula del bilancio di massa con trasporto nel caso Euleriano per $\rho = 1$

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t} dV = \int_{\partial V_t} \vec{v}\cdot\hat{n} = \int_{V_t} \vec{\nabla}\vec{v}\, dV_t$$

uguagliando $\displaystyle\int_{V_t} \frac{d|J|}{dt}\frac{1}{|J|}\, dV = \int_{V_t} \vec{\nabla}\vec{v}\, dV$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d|J|}{dt} = |J|\, \vec{\nabla}\vec{v}}$$

Riprendiamo l'eq. di continuità Lagrang.

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\, |J|\right) = 0$$

$$0 = \frac{d}{dt}\rho\, |J| + \rho\, \frac{d|J|}{dt} =$$

$$= \frac{d}{dt}\rho\, |J| + \rho\, |J|\, \vec{\nabla}\vec{v} = 0$$

Poichè $|J| \neq 0 \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\rho + \rho\vec{\nabla}\vec{v} = 0$

Utilizzando $\frac{d}{dt}\rho(x,t) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v}\,\vec{\nabla}_x\rho$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{v}\,\vec{\nabla}\rho + \rho\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0$$