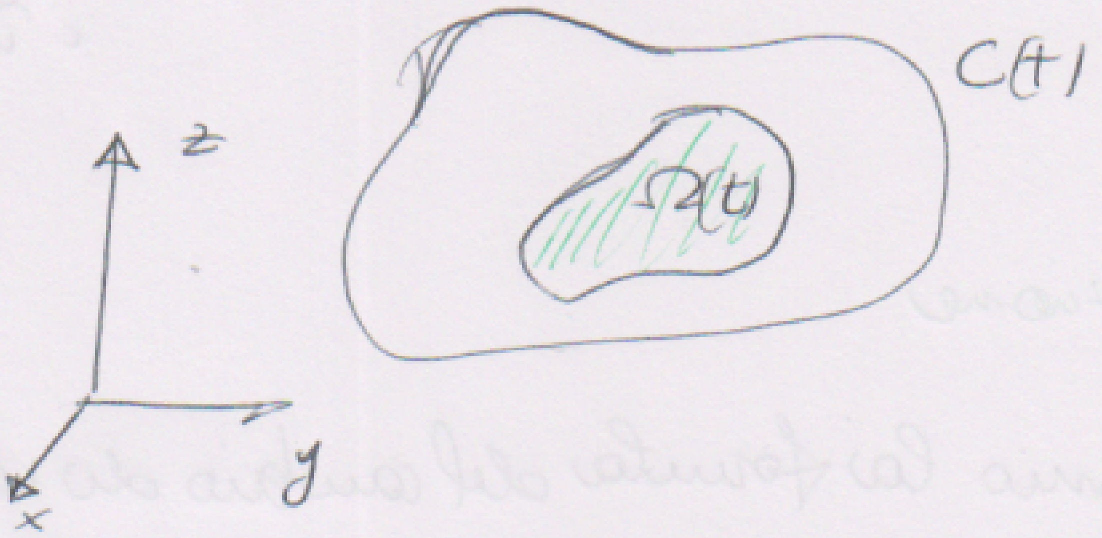
Utilizzando $\frac{d}{dt}\rho(x,t) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}\,\vec{\nabla}_x \rho$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{v}\,\vec{\nabla}\rho + \rho\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0$$

Teorema del trasporto

Sia $\Omega(t) \subset C(t)$ un sottoinsieme (una parte) del continuo



Es. particelle in un fluido con composizione chimica diversa

Ogni particella abbia massa dm, la massa totale contenuta in Ω è costante

$$\frac{d}{dt} m_{\Omega(t)} = \frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho(x,t)\,dV = 0 \qquad t \in [t_0, T]$$

Sia $\varphi(x,t)$ una quantità fisica del sistema in esame

ex. energ. cinetica, temperatura

di cui vogliamo studiare l'evoluzione

$$\bar{\varphi}(t) \doteq \int_{\Omega(t)} \varphi(x,t)\,dV \qquad t \in [t_0, T)$$

$\Downarrow$
media su Ω

chiaramente, se $\varphi = \rho \Rightarrow \frac{d}{dt}\bar{\varphi} = 0$

Teorema del trasporto

si ha che $$\frac{d}{dt}\bar{\varphi}(t) = \int_{\Omega(t)} \Big[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \underbrace{\mathrm{div}(\varphi \cdot \vec{v})}_{\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi v_i)} \Big] dV$$

Dimostrazione

Utilizziamo la formula del cambio di variabili nell'integrale in modo da riportarci alla configurazione di riferimento C^0

$$\frac{d}{dt}\bar{\varphi} = \frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \varphi(x,t)\,dV = \frac{d}{dt}\int_{\Omega^0} \varphi(x(\xi,t),t)\,|J|\,dV^0$$

$$= \int_{\Omega^0} \frac{d}{dt}\Big(\varphi(x(\xi,t),t)\;|J|\Big)\,dV^0 =$$

$$= \int_{\Omega_0} \left[\frac{d\varphi}{dt}(x(\xi,t),t)\, |J| + \varphi(x(\xi,t),t) \underbrace{\frac{d}{dt}|J|}_{|J| \operatorname{div} \vec{v}} \right] dV^0$$

$$= \int_{\Omega_0} \left[\underbrace{\frac{d\varphi}{dt}(x(\xi,t),t)}\, + \varphi(x(\xi,t),t) \operatorname{div} \vec{v} \right] |J|\, dV^0$$

$$\frac{d}{dt}\varphi = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \underbrace{\frac{dx^i}{dt}}_{= v^i} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \vec{v} \cdot \nabla \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{dt}(t) = \int_{\Omega_0} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla}\varphi + \varphi \vec{\nabla}\vec{v} \right] |J|\, dV_0$$

$$= \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \underbrace{\vec{v}\vec{\nabla}\varphi + \varphi \vec{\nabla}\vec{v}}_{} \right] dV$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\varphi + \varphi\, \vec{\nabla} \cdot \vec{v} =$$

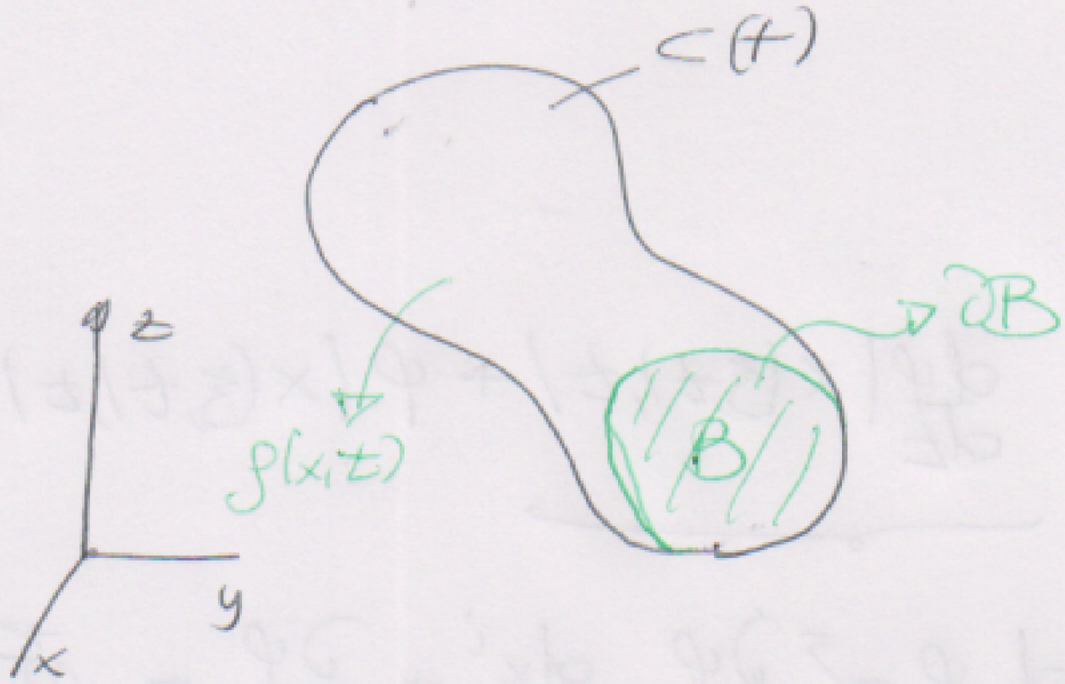
$$\vec{\nabla}(\varphi \vec{v}) = \operatorname{div}(\varphi \vec{v})$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{dt}(t) = \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi \vec{v}) \right] dV \qquad \square$$

Infine applicando il th della div.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overline{\varphi} = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dV + \int_{\partial\Omega(t)} \varphi\, \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS}$$

Equazioni fondamentali



Consideriamo un sottodominio B, di un corpo continuo C(t). Con quale forze B interagisce con C(t)? A quali forze è sottoposto?

- Forze di massa (a distanza)
- Forze di superficie (trasmesse dalla frontiera ∂B)

Forze di massa: densità di forza, forza specifica di volume $\vec{f}_v = \vec{f}_v(P,t)$

↳ punto generico

Forza di volume risultante

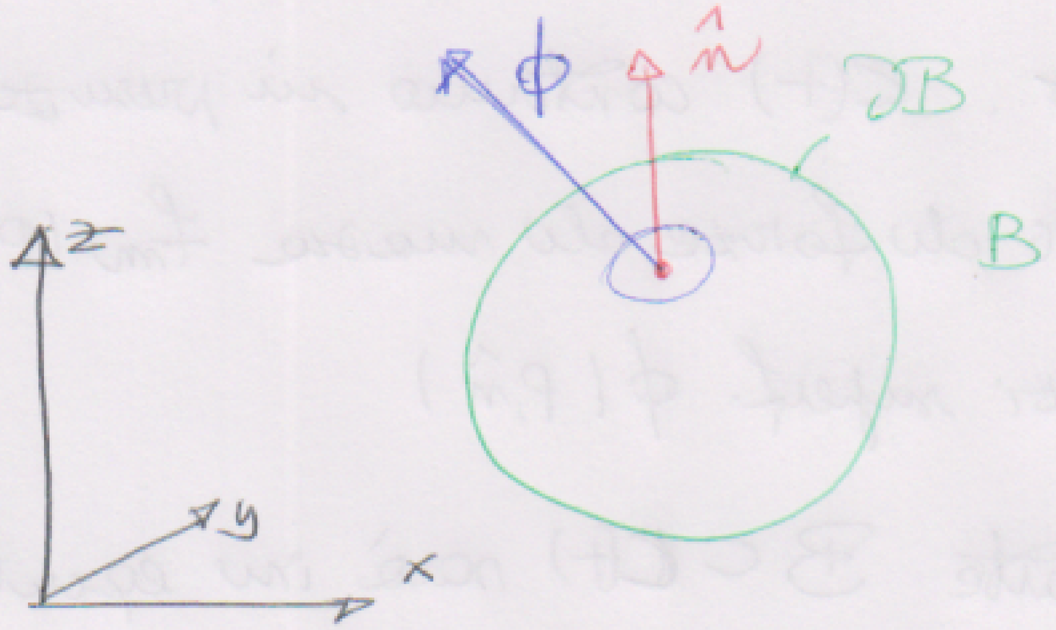
$$\vec{F}(t) = \int_{B(t)} f_v(x,t)\,dV$$

forza specifica di massa $f_m(P,t) \doteq \dfrac{f_v(P,t)}{\rho(P,t)}$

Es. peso $\quad f_m = \vec{g}$ costante

$$f_v = \vec{g}\,\rho(x,t)$$

Forze di superficie e stato di tensione



Associamo ad ogni punto della superficie con normale $\hat{n}$ una densità superficiale di forza $\phi(P,\hat{n},t)$ detta sforzo specifico e t.c. si potrà esprimere la forza di sup. risultante come

$$\vec{\Phi}(t) = \int_{\partial B} \vec{\phi}(x,\hat{n},t)\,dS$$

$\vec{\phi}\cdot\vec{n}$: Sforzo specifico $\begin{cases} >0 & \text{di trazione} \\ <0 & \text{di compressione} \end{cases}$

La componente di $\vec{\phi}(\vec{x},\hat{n},t)$ nel piano normale a $\hat{n}$ è detta sforzo specifico di taglio

Applicando il principio di azione - reazione, si avrà

$$\vec{\phi}(P, \hat{n}, t) = -\vec{\phi}(P, -\hat{n}, t)$$

Equazioni Cardinali della statica

Analizziamo le condizioni di equilibrio di un continuo. $C(t)$ continuo in presenza di un campo assegnato di forze di massa $f_m(P)$ e distribuz. di sforzi superf. $\phi(P, \hat{n})$

Ogni parte $B \subset C(t)$ sarà in equilibrio se

$$\int_{B(t)} \rho(x) f_m(x)\, dV + \int_{\partial B(t)} \phi(P, n)\, dS = 0 \quad \text{I. cardinale}$$

$$\int_{B(t)} (P-O) \wedge (\rho(P) f_m(P))\, dV + \int_{\partial B(t)} (P-O) \wedge \vec{\phi}(P, \hat{n})\, dS = 0$$

II cardinale

Le eq. Cardinali della statica da sole non sono sufficienti a determinare la configurazione di equilibrio di un continuo, in quanto non contengono nessuna informazione circa la deformaz. del continuo stesso ad opera delle forze ⇒ EQUAZIONI COSTITUTIVE

In analogia con i sistemi discreti, introduciamo le seguenti quantità

Quantità di moto $\quad Q = \int_{C(t)} \rho(P,t)\,\vec{v}(P,t)\,dV$

Momento angolare della quantità di moto

$$K(O) = \int_{C(t)} \rho(P,t)\,(P-O) \wedge \vec{v}_P \, dV$$

Energia Cinetica

$$T = \frac{1}{2} \int_{C} \rho(P,t)\,v^2(P,t)\,dV$$

Equazioni Cardinali della Dinamica

Principio di D'Alembert: Le equazioni della dinamica si ottengono da quelle della statica, sottraendo alla forze applicate, l'accelerazione del punto con suo applicato (Forze inerziali)

$$\left(F = ma \Rightarrow \left(\frac{F}{m} - a \right) = 0 \right)$$

otteniamo le eq. cardinali della dinamica

$$\int_{B} \rho(P,t)\left[f_m(P,t) - a \right] dV + \int_{\partial B} \phi(P,\hat{n})\, dS = 0$$

$$\int_{B} \rho(P,t)\,(P-O)\wedge\left[f_m(P,t) - a \right] dV + \int_{B} (P-O)\wedge \phi(P,\hat{n})\, dS = 0$$