ottenamo le eq. cardinali della dinamica

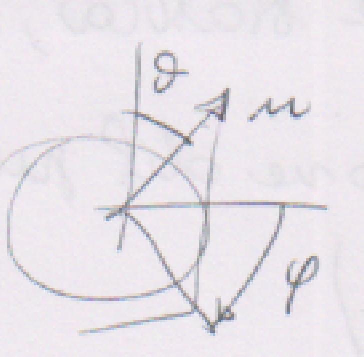
$$\int_{B} \rho(P,t)\left[f_m (P,t) - a \right] dV + \int_{\partial B} \phi(P,\hat{n})\, dS = 0$$

$$\int_{B} \rho(P,t)\,(P-O) \wedge \left[f_m (P,t) - a \right] dV + \int_{B} (P-O) \wedge \phi(P,\hat{n})\, dS = 0$$

Tensore degli sforzi di Cauchy

La densità superficiale di forza $\phi(P,\hat{n},t)$ caratterizza lo scambio di forze fra l'interno e l'esterno del dominio B.

Poiché ϕ dipende dalla normale, ovvero dall'orientamento della sup. ∂B che delimita la porzione di corpo considerata dipenderà in generale da 2 parametri angolari $\in \mathbb{R}^2$



Il teorema di Cauchy permette di determinare il valore dello sforzo specifico, conoscendo solamente il suo valore relativo a 3 direzioni ortogonali

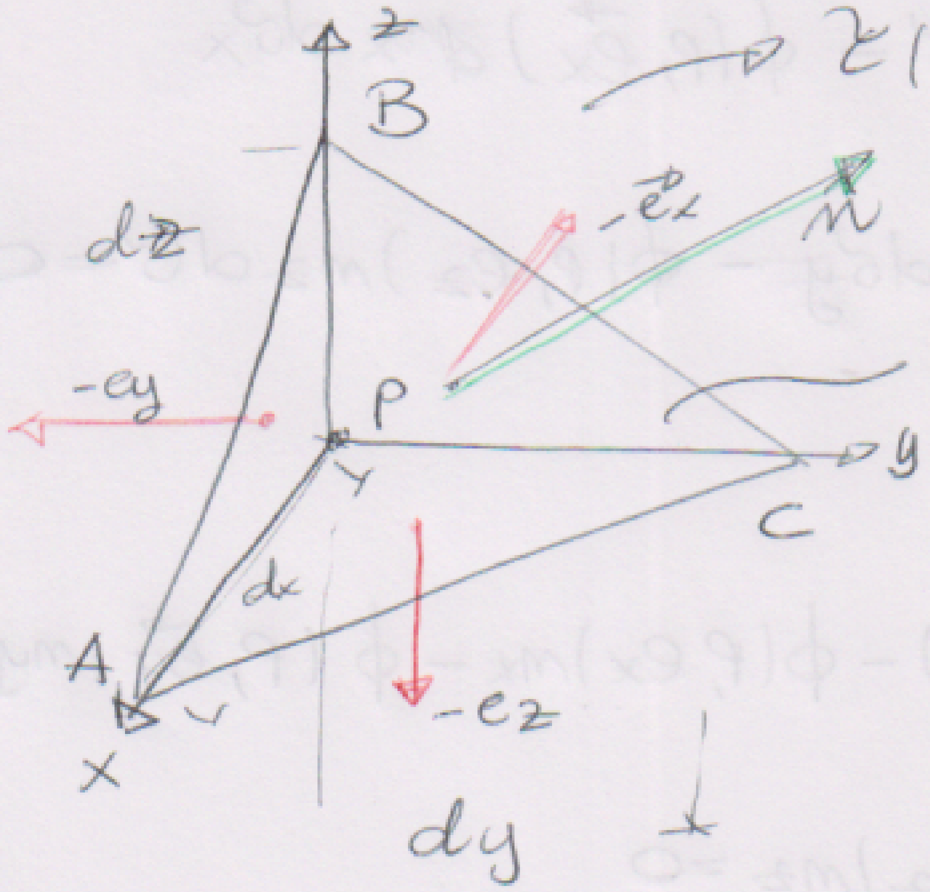
Teorema di Cauchy

In ogni punto del continuo è definito un tensore simmetrico T (tensore degli sforzi) t.c. lo sforzo $\phi(P,\hat{n})$ è dato da

$$\phi(P,\hat{n}) = T(P)\cdot\hat{n}$$

Dimostrazione

Consideriamo un tetraedro infinitesimo appartenente a $C(t)$



$$\hat{n} = n_x\vec{e}_x + n_y\vec{e}_y + n_z\vec{e}_z$$

$$n_i = \hat{n}\cdot\vec{e}_i$$

Ipotesi: Σ inf. piccolo che le forze sup. e di massa sono costanti

Bilancio delle forze agenti sul tetraedro τ

$$\rho \vec{f}_m dV + \phi(P,\hat{n})d\sigma + \phi(P,-e_x)d\sigma_x + \phi(P,-e_y)d\sigma_y$$

$$+\phi(P,-e_z)d\sigma_z = 0$$

Ricordando $\phi(P,-\hat{n}) = -\phi(P,\hat{n})$

inoltre valgono

$d\sigma_x = n_x d\sigma \qquad d\sigma_y = n_y d\sigma \qquad d\sigma_z = n_z d\sigma$

$$\rho f_m dV + \phi(P,\hat{n})d\sigma - \phi(P,\vec{e_x})n_x d\sigma$$

$$-\phi(P,\vec{e_y})n_y d\sigma - \phi(P,e_z)n_z d\sigma = 0$$

dividiamo per $d\sigma$

$$\rho f_m \frac{dV}{d\sigma} + \phi(P,\hat{n}) - \phi(P,e_x)n_x - \phi(P,\vec{e_y})n_y$$

$$-\phi(P,e_z)n_z = 0$$

$\frac{dV}{d\sigma} \to 0 \qquad dV \sim d\sigma\, dl$

otteniamo $\vec{\phi}(P,\hat{n}) = \vec{\phi}(P,e_x)n_x + \vec{\phi}(P,\vec{e_y})n_y + \vec{\phi}(P,e_z)n_z$

$$\phi_x(P,\hat{n}) = \phi_x(\vec{e}_x)\, n_x + \phi_x(\vec{e}_y)\, n_y + \phi_x(e_z)\, n_z$$

$$\phi_y(\hat{n}) = \phi_y(\vec{e}_x)\, n_x + \dots$$

$$\phi_z(\hat{n}) = \phi_z(\vec{e}_x)\, n_x + \dots$$

indicando con $\sigma_{ji} = \phi_i(P, \vec{e}_j)$ $\quad i,j = x,y,z$

$$\phi_i(P,\hat{n}) = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ji}\, n_j = \sum_{j=1}^{3} T_{ij}(P)\, n_j$$

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \phi_x(\vec{e}_x) & \phi_y(\vec{e}_x) & \phi_z(\vec{e}_x) \\ \phi_x(\vec{e}_y) & \phi_y(\vec{e}_y) & \phi_z(\vec{e}_y) \\ \phi_x(\vec{e}_z) & \phi_y(\vec{e}_z) & \phi_z(\vec{e}_z) \end{pmatrix}$$

Verificheremo che il tensore di Cauchy è simmetrico

Posso ottenere lo stato di tensione in un punto del contorno, conoscendo solo 3 vettori (gli sforzi relativi alle 3 facce coordin. del tetraedro)

Equazioni di Equilibrio e della dinamica

Riscriviamo le eq. delle dinamica in forma diff.
Avendo la def. di tensore di Cauchy

$$\int_B \rho(P) f_m(P)\,dV + \int_{\partial B} \vec{\phi}(P,\hat{n})\,dS =$$

$$\int_B \rho(P) f_m(P)\,dV + \int_{\partial B} T(P)\,\hat{n}\,dS$$

$$= \int_B \left(\rho(P) f_m(P) + \operatorname{div} T \right) dV = 0$$

Per l'arbit. di B $\Rightarrow$ Equaz. cardinali della statica

$$\rho f_m + \operatorname{div} T = 0$$

$$\operatorname{div} T = \sum_i^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{\phi}(e_i)$$

Col princ. d'Alembert possiamo immed. scrivere le eq. cardinali della dinamica

$$\rho(f_m - a) + \operatorname{div} T = 0$$

$$\rho a = \rho f_m + \operatorname{div} T$$

Poiché $a = \frac{dv}{dt} = \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)\vec{v}}_{\text{descr. Euleriana}}$

Si ottiene

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - f_m + \frac{1}{\rho}\operatorname{div} T}$$

Eq. cardinale della dinamica

Dimostriamo adesso che il tensore degli ~~sforzi~~ è simmetrico : $T_{ij} = T_{ji}$

Riprendiamo la II eq. della statica

$$\int_B (P-O)\wedge(\rho f_m) + \underbrace{\int_{\partial B}(P-O)\wedge\vec{\phi}(P,\hat{n},t)\,dS}_{\overset{|||}{G}} = 0$$

$$G = \int_{\partial B}(P-O)\wedge\left[\vec{\phi}(\vec{e}_x)n_x + \vec{\phi}(e_y)n_y + \vec{\phi}(e_z)n_z\right]dS$$

Applichiamo th div. $\int_{\partial B}\underbrace{[(P-O)\wedge\vec{\phi}(e_x)]}_{\vec{v}}n_x$

$\hat{n}$ è normale a ∂B

$$\int_{\partial B}\vec{v}\,n_x\,dS = \int_B \frac{\partial}{\partial x}\vec{v}\,dV$$

$$\to \int_B \frac{\partial}{\partial x}\left((P-O)\wedge\vec{\phi}(e_x)\right)dV$$

otteniamo

$$G = \int_B \left[\frac{\partial}{\partial x} \left((P-O) \wedge \vec{\phi}(\vec{e}_x) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((P-O) \wedge \vec{\phi}(\vec{e}_y) \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z} \left((P-O) \wedge \vec{\phi}(\vec{e}_z) \right) \right] dv$$

scrivendo $(P-O) = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$

$$G = \int_B (P-O) \wedge \left[\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x}(e_x) + \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial y}(\vec{e}_y) + \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial z}(\vec{e}_z) \right] dv$$

$$+ \int_B \left(\vec{e}_x \wedge \vec{\phi}(e_x) + \vec{e}_y \wedge \vec{\phi}(e_y) + \vec{e}_z \wedge \vec{\phi}(e_z) \right) dv$$

Ricordiamo la def. di T : $T_{ij} = \phi_j(\vec{e}_i)$

$$\operatorname{div} T = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ij} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{\phi}(\vec{e}_i)$$

$$G = \int_B \left((P-O) \wedge \operatorname{div} T \right) dv + \int_B \left(\vec{e}_x \wedge \vec{\phi}(e_x) + \vec{e}_y \wedge \phi(e_y) \right.$$

$$\left. + \vec{e}_z \wedge \phi(e_z) \right) dv$$

inseriamo nella II eq. statica

$$\int_{B} (P-O)\wedge \underbrace{\left(\rho f_m + \mathrm{div}\, T\right)}_{\substack{\Vert \\ 0}} - \int_{B} \sum_i \vec{e}_i \wedge \vec{\phi}(\vec{e}_i)\, dV = 0$$

per la I eq. della statica

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{e}_x \wedge \vec{\phi}(e_x)}_{\vec{e}_z\, \phi_y(\vec{e}_x) - \vec{e}_y\, \phi_z(e_x)} + \vec{e}_y \wedge \vec{\phi}(e_y) + \vec{e}_z \wedge \vec{\phi}(\vec{e}_z) = 0$$

$$\vec{e}_y \wedge \vec{\phi}(e_y) = \vec{e}_x\, \phi_z(e_y) - \vec{e}_z\, \phi_x(\vec{e}_y)$$

$$\vec{e}_z \wedge \vec{\phi}(e_z) = \vec{e}_y\, \phi_x(\vec{e}_z) - \vec{e}_x\, \phi_y(e_z)$$

$$\vec{e}_x \Rightarrow \phi_z(\vec{e}_y) = \phi_y(\vec{e}_z)$$

$$\vec{e}_y \Rightarrow \phi_z(\vec{e}_x) = \phi_x(\vec{e}_z)$$

$$\vec{e}_z \Rightarrow \phi_y(\vec{e}_x) = \phi_x(\vec{e}_y)$$

ovvero $T_{ij} = T_{ji}$