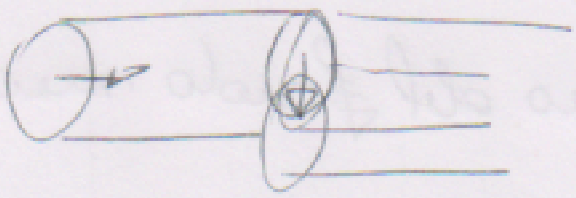
Introduzione alla fluidodinamica

Caratterizziamo i fluidi (liquidi, gassosi) come i sistemi continui che non possono controbilanciare sforzi di taglio in condizioni di riposo.



Definizione: Si dicono fluidi i sistemi continui nei quali, in condizioni statiche, sono presenti solo sforzi di compressione.

Fluido perfetto ~ acqua, gas

in generale sono una buona approx di fluido perfetto tutti i fluidi a bassa viscosità (olio) ed in assenza di elevati gradienti di velocità.

Il tensore degli sforzi è diagonale

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \vec{\Phi}(\bar{e}_1) = \underbrace{\phi_x(e_1)\,\vec{e}_1}_{\text{sforzo } /\!/ \text{ alla direzione della giacitura}}$$

Teorema di Pascal: In un fluido in equilibrio, il tensore degli sforzi ha la seguente forma

$$T = -p\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove p è uno scalare positivo detto pressione.

Quindi, tutti gli sforzi all'interno del fluido sono uguali.

Dimostrazione

Utilizziamo il Th di Cauchy

$$\vec{\phi}(P,\hat{n}) = \vec{\phi}(\vec{e_x})n_x + \vec{\phi}(\vec{e_y})n_y + \phi(\vec{e_z})n_z \quad (I)$$

poiché lo sforzo avviene lungo $\hat{n}$ posso scrivere

$$\vec{\phi}(\hat{n}) = -p(P,\hat{n})\hat{n} = -p(P,\hat{n})(n_x\vec{e_x} + n_y\vec{e_y} + n_z\vec{e_z})$$

analogamente $\vec{\phi}(P,\vec{e_x})n_x = -p(P,\vec{e_x})\vec{e_x}n_x$

Sostituendo in (I)

$$-p(P,\hat{n})(n_x\vec{e_x} + n_y\vec{e_y} + n_z\vec{e_z}) = -p(P,\vec{e_x})\vec{e_x}n_x - p(P,\vec{e_y})\vec{e_y}n_y - p(P,\vec{e_z})\vec{e_z}n_z$$

$$-p(P,\hat{n}) = p(P,\vec{e_x}) = p(P,\vec{e_y}) = p(P,\vec{e_z})$$

per ogni $\hat{n}$ $\Rightarrow$ $p = p(P) \Rightarrow \vec{\phi}(P,\hat{n}) = -p(P)\hat{n}$

Equazione fondamentale della statica

Per il Th Pascal all'interno di un fluido a riposo sono presenti solo forze di pressione

$$T = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} T = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \underset{\underset{T_{ij}}{\shortparallel}}{T_{ji}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} T_{11} + \frac{\partial}{\partial y} T_{12} + \frac{\partial}{\partial z} T_{13} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} T_{21} + \frac{\partial}{\partial y} T_{22} + \frac{\partial}{\partial z} T_{23} = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} T_{31} + \frac{\partial}{\partial y} T_{32} + \frac{\partial}{\partial z} T_{33} = -\frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} T = - \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = -\vec{\nabla} p$$

Equazione della statica

$$\rho \vec{f}_m + \operatorname{div} T = \rho \vec{f}_m - \vec{\nabla} p = 0$$

Equazione fondamentale della statica dei fluidi

$$\boxed{\rho \vec{f}_m = \vec{\nabla} p}$$

In caso della sola presenza della forza peso

$$\rho \vec{g} = \vec{\nabla} p$$

Equazione fondamentale della dinamica

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{f}_m - \vec{\nabla} p$$

Nel fluido a bassa viscosità, il tensore degli sforzi si mantiene diagonale anche durante il moto (fluido perfetto)

$$\vec{a} = \vec{f}_m - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\, \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{f}_m - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p}$$

L'equazione non è direttamente risolubile, troppe incognite. Inco. $\vec{v}, p, \rho$ = 5 inco e 3 eq.

Si assume anche l'eq. di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$$

Manca ancora una relazione che permette di risolvere il sistema: legame pressione - densità, che dipende dalla natura specifica del fluido

Trinomio di Bernulli

Consideriamo un fluido pesante e incomprimibile.

Definiamo il trinomio di Bernulli

$$B = \frac{1}{2} v^2 + g z + \frac{p}{\rho}$$

più in generale possiamo scrivere

$$B = \frac{1}{2} v^2 - U + P$$

$U =$ potenziale delle forze conservative

$P =$ potenziale delle forze di pressione,

definito come la primitiva della funzione $\frac{1}{\rho(p)}$

$$P = \int \frac{1}{\rho(p)} \, dp + P_0$$

↳ cost. di integraz.

Consideriamo i moti stazionari di un fluido: moti in cui la velocità può variare nello spazio ma è costante nel tempo

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Tale legame viene esplicitato tramite l'equazione di stato del sistema che si scrive generalmente nella forma $F(p, \rho; \vartheta) = 0$.
↳ temp.

Distinguiamo allora con

Fluidi barotropici: L'eq. di stato è indip. dalla temperatura e la densità può essere espressa in funzione della pressione

$$\rho = \rho(p)$$

Fluidi incompressibili

La densità è costante $\rho = \rho_0$

ricordiamo che in questo caso l'eq. di continuità diventa $\vec{\nabla} \vec{v} = 0$

Il sistema

- Eq. di moto
- Eq di continuità
- Funzione di stato

è noto come equaz. di Eulero dei fluidi

Teorema di Bernoulli

Nei moti stazionari di un fluido perfetto barotropico sottoposto a forze conservative il trinomio di Bernoulli è costante in ogni punto del fluido durante il moto

Dimostrazione

Notiamo che $\vec{\nabla} P = \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}\vec{e_z}$

Poiché $P = \int^{p} \frac{1}{\rho(p)}\, dp \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{1}{\rho(p)}$

$$\vec{\nabla} P = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p$$

L'equazione di moto $\rho(\vec{f} - a) = \vec{\nabla} p$

diventa $\vec{a} = \vec{f} - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} = \nabla U - \nabla P$

$\vec{f} = \vec{\nabla} U$ nel caso di forze conservative

$$\vec{a} = \nabla(U - P)$$

molt. per $\vec{v}$

$$\vec{a}\cdot\vec{v} = \nabla(U-P)\cdot\vec{v} = \underbrace{\frac{d}{dt}(U-P)}$$

$$\frac{d}{dt}U(x) = \sum \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \vec{v}\vec{\nabla} U$$

$$\vec{a}\cdot\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

otteniamo $\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} - U + P\right) = 0$

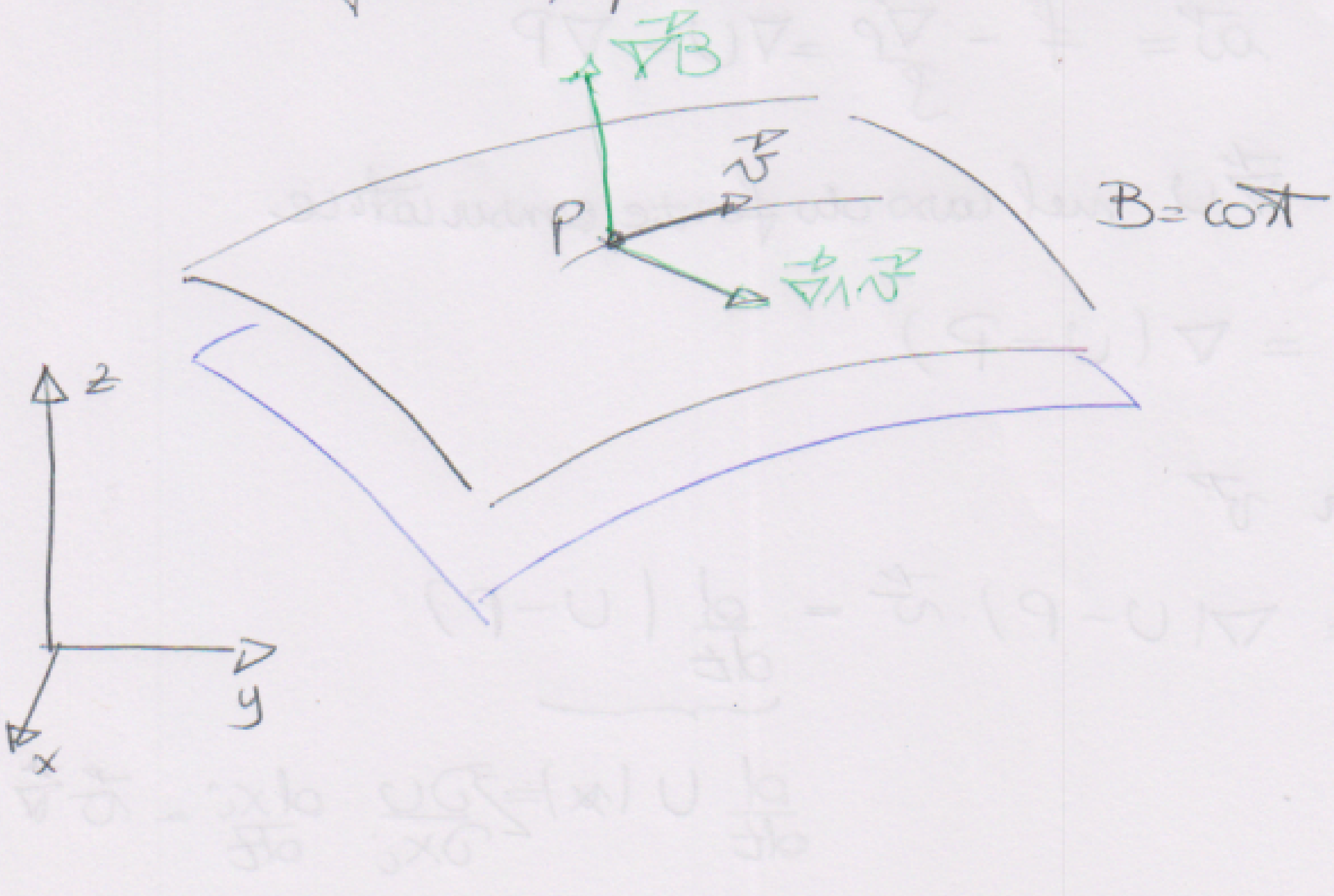
VISIONE LAGRANGIANA

Nel Th si segue il moto di una particella test

$B(A) \neq B(B)$ $\qquad B(A) = B(A')$ LUNGO il flusso

$B(P)$ rappresenta l'energia totale di un elemento del fluido per unità di massa

Dato un fluido, possiamo considerare le sup. $B = \text{cost}$.



Teorema di Bernoulli (versione Euleriana)

Nel moto di un fluido perfetto, barotropico, soggetto a forze conservative, in moto stazionario, le superfici $B(P) =$ costante, sono sup di corrente e di vortice (i.e. $\vec{v}$ e $\vec{\nabla} \wedge \vec{v} \in T_g B$)

$\square$

Dimostriamo prima il seguente risultato: l'accelerazione di un punto del fluido può essere scritta come

$$\vec{a} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 + \operatorname{rot} v \wedge v$$

dove $\operatorname{rot} v \doteq \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \doteq \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} =$

$$\hat{i} \left(\partial_y v_z - \partial_z v_y \right) + \hat{j} \left(\partial_z v_x - \partial_x v_z \right) + \hat{k} \left(\partial_x v_y - \partial_y v_x \right)$$

Ricordiamo $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v}$

il termine $(\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = \sum_{i=1}^{3} \left(v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \vec{v}$

$$= \sum_{j,i=1}^{3} v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \vec{e}_j$$

Consideriamo invece $(\vec{\nabla} \vec{v}) \vec{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \vec{v}$

$$= \sum_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} v_j \vec{e}_j \neq (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v}$$

Calcoliamo $(\nabla \wedge v) \wedge v =$

$$\hat{i}\Big[\underbrace{(\partial_z v_x - \partial_x v_z)}_{(\nabla\wedge v)_j} v_z - \underbrace{(\partial_x v_y - \partial_y v_x)}_{(\nabla\wedge v)_k} v_y\Big] +$$

$$\hat{j}\Big[-(\nabla\wedge v)_i v_k + (\nabla\wedge v)_k v_i\Big] + \hat{k}\Big[(\nabla\wedge v)_i v_j - (\nabla\wedge v)_j v_i\Big]$$

consideriamo il termine in $\hat{i}$

$$\hat{i} \Rightarrow \hat{i}\Big[\underbrace{\partial_z v_x v_z + \partial_y v_x v_y}_{(v_z\partial_z + v_y\partial_y)v_x} - v_z\partial_x v_z - v_y \partial_x v_y\Big]$$

$$= \vec{e}_i\Big[\sum_{j\neq i} v_j \partial_{x_j} v_i - \sum_{j\neq i} v_j \partial_{x_i} v_j\Big]$$

con $i = x$ $\vec{e}_x = \hat{i}$ $\qquad = \sum_{j\neq i} \vec{e}_i v_j\Big[\partial_{x_j} v_i - \partial_{x_i} v_j\Big]$

La stessa relazione vale per $\hat{j}$ e $\hat{k}$

$$\Rightarrow \Big[(\nabla\wedge v)\wedge v\Big] = \sum_{i\neq j} \vec{e}_i v_j \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)$$

Torniamo a $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \sum_{ij} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\vec{e}_i \pm \sum_{ij} v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\vec{e}_i$$

$$= \sum \vec{e}_i v_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \sum_{ij} v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\vec{e}_i$$

$$= (\nabla \wedge v)\wedge v + \underbrace{\sum_{j,i} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{v_j^2}{2}}$$

$$\sum_i \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\sum_j v_j^2}{2} = \sum \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

$$= \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

Quindi $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})v = (\nabla\wedge v)\wedge v + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right)$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})v = \frac{\partial}{\partial t}v + (\nabla\wedge\vec{v})\wedge\vec{v} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right)}$$

Torniamo all'eq. di Bernoulli

$$\vec{a} = \nabla(U - P)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\vec{v}\wedge\vec{v} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \nabla(U - P)$$

per moto stazionario $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

otteniamo

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} \wedge \vec{v} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2} v^2 - U + P \right) = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} \wedge \vec{v} = -\vec{\nabla} B$$

$$B = \frac{1}{2} v^2 - U + P$$

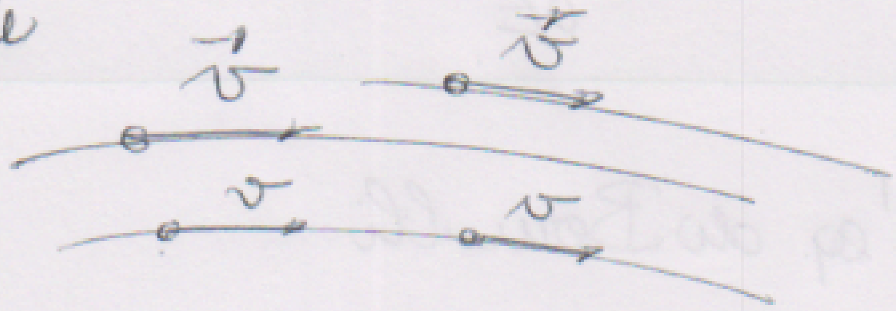
Quindi abbiamo dimostrato che v e $\nabla \wedge v$ sono ortogonali a $\vec{\nabla} B \Rightarrow$ giacciono nel piano $B = \text{cost}$

$\square$

Alcune definizioni

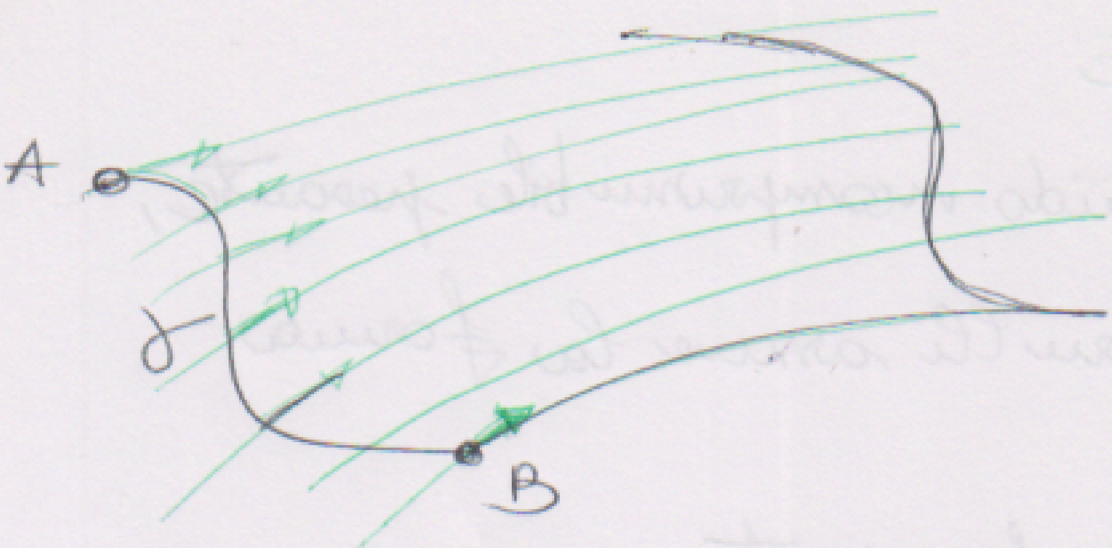
Linee di flusso del campo della velocità

Linee tangenti al campo di velocità: traiettorie delle particelle

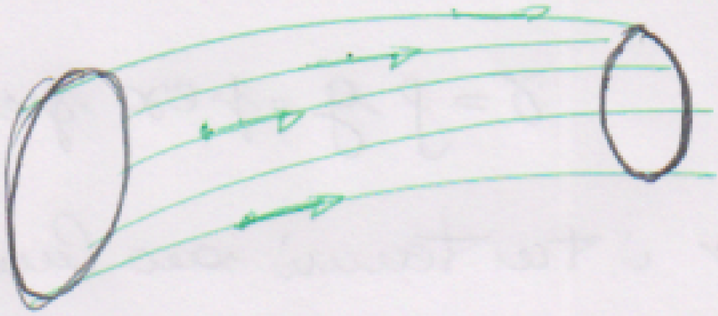


ottenute integrando il campo $\dot{x} = \vec{v}(\vec{x})$

Superficie di flusso: insieme delle linee di flusso che passano per una curva fissata



se la curva è chiusa si parla di tubo di flusso



Se il moto è stazionario le sup. di flusso non variano nel tempo

Linee di vortice: linee tg al campo vettoriale del rot $\vec{v}$

Moti irrotazionali: Se rot $\vec{v}=0$, ovvero il moto non è vorticoso, allora il Teorema di Bernulli è costante per tutti i punti del fluido.

Dimost.: dal teorema di Bernulli avevamo trovato

$$\text{rot}\,\vec{v} \wedge \vec{v} + \nabla\left(\frac{1}{2}v^2 - U + P\right) = 0$$

$$\text{rot}\, v = 0 \Rightarrow \nabla\left(\frac{1}{2}v^2 - U + P\right) = \nabla B = 0$$

$\Rightarrow$ B costante nello spazio

Es.: Liquido pesante

Si consideri un fluido incomprimibile pesante, il trinomio di Bernoulli assume la forma

$$B = \frac{1}{2} v^2 + g z + \frac{p}{\rho} = cost$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} = cost \qquad \gamma = \rho g = \text{peso specifico}$$

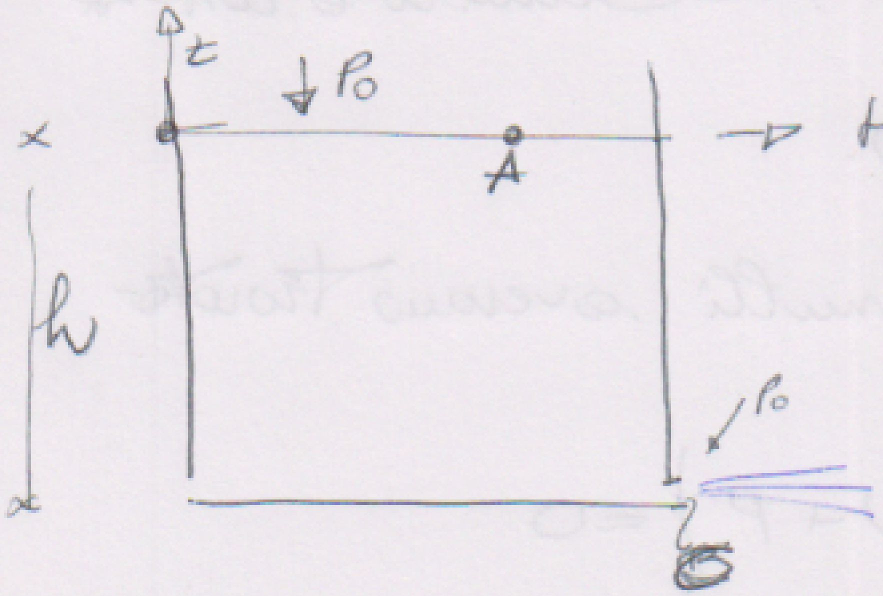
→ i tre termini sono lunghezze

↓

Quota cinetica: altezza da cui si deve far cadere un corpo perché acquisti velocità v

$\frac{p}{\gamma}$ = quota piezometrica: altezza della colonna di un fluido che a terra produce una pressione p

Es. Teorema di Torricelli

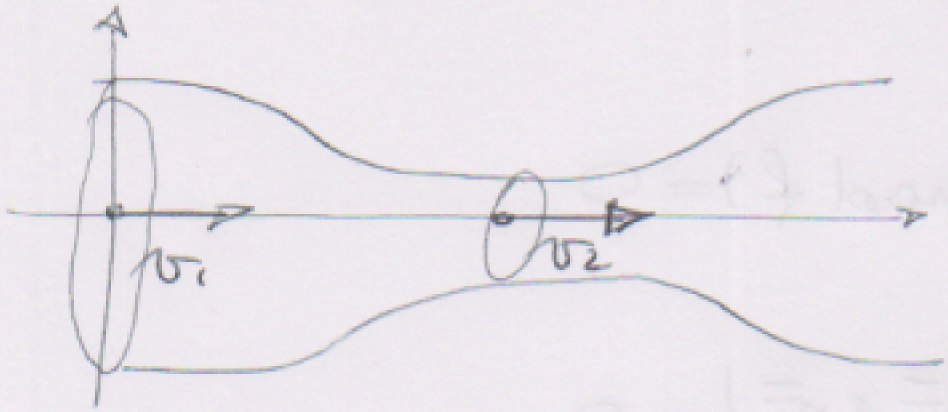


→ Hp altezza del pelo libero approx costante nel tempo

Velocità di fuoriuscita del fluido

$$B(A) = \frac{p_0}{\gamma} \qquad B(C) = \frac{v^2}{2g} - h + \frac{p_0}{\gamma} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Es. Tubo di Venturi



Fluido in moto stazionario non vorticoso

per la costanza di flusso, la velocità lungo la strozzatura dovrà essere maggiore

$$\int_{\text{Sezione}} v \, dS = \text{cost}$$

Poiché il trinomio di Bernoulli è costante, lungo la strozzatura la pressione diminuisce (si trova a valle della strozzatura): effetto Venturi

Moti irrotazionali: dinamica di $\text{rot}\,\vec{v}$

Determiniamo l'evoluzione temporale del termine $\text{rot}\,\vec{v}$. Prendiamo il rot. dell'equaz. di moto

$$\text{rot}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v + \underbrace{g \nabla z + \frac{1}{\rho} \nabla p}_{\nabla(-U + P)} \right) = 0$$

Ricordando $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v = \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 + \text{rot}\, v \wedge v$

$$\text{rot}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \text{rot}\,v \wedge v + \nabla B\right) = 0$$

$$\text{rot}\,\nabla B = 0 \qquad \text{rot}(\text{grad}\,f) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\text{rot}\,\bar{v} + \text{rot}\left(\text{rot}\,\bar{v} \wedge \bar{v}\right) = 0$$

da cui si deduce che se $\text{rot}\,v = 0$ per $t = t_0$ il flusso si mantiene irrotazionale

Campo di velocità di un fluido

Considero la variazione di velocità di un fluido attorno ad un punto

$$v_i(\bar{x}') = v_i(\bar{x}) + \sum_{k=1}^{3} \left.\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right|_{x} (x'_k - x_k)$$

Costruiamo il tensore della velocità: matrice con componenti $A_{ij} = (\vec{\nabla}\vec{v})_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} v_i$

$$(\vec{\nabla}\vec{v})_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Scriviamo la matrice ∇v come somma di una mat. simm più una antisimmetrica

Nota $A + A^T \Rightarrow$ simmetrica

$$B_{ij} = A_{ij} + A^T_{ij} = A_{ij} + A_{ji}$$

$$B_{ji} = A_{ji} + A^T_{ji} = A_{ji} + A_{ij} = B_{ij}$$

$A - A^T \Rightarrow$ antisimm.

$$B_{ij} = A_{ij} - A^T_{ij} = A_{ij} - A_{ji}$$

$$B_{ji} = A_{ji} - A^T_{ji} = A_{ji} - A_{ij} = - B_{ij}$$

$$(\bar{\nabla} \bar{v}) = \underbrace{\frac{\nabla v + (\nabla v)^T}{2}}_{\substack{\shortparallel \\ \mathbb{D} \\ \text{comp. simm.}}} + \underbrace{\frac{\nabla v - (\nabla v)^T}{2}}_{\substack{\Omega \\ \text{comp. antisimm.}}}$$

$$v_i(x') = v_i(x) + \sum_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(x'_k - x_k) =$$

$$= v_i(x) + \sum_k (\nabla v)_{ik} (x'_k - x_k)$$

In forma vettoriale

$$\vec{v}(x') = \vec{v}(x) + (\nabla v)(\vec{x}' - \vec{x}) =$$

$$\vec{v}(x) + D(x' - \bar{x}) + \Omega(\vec{x}' - \vec{x})$$

Analizziamo l'azione del tensore Ω

$$\Omega = \frac{\nabla v - |\nabla v|^t}{2}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

Dal calcolo diretto si verifica che $\Omega \vec{y} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} v \wedge y$

$$\operatorname{rot} v = \nabla \wedge v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) e_x + \ldots$$

otteniamo

$$v(x') = v(x) + D(x' - x) + \frac{1}{2} \operatorname{rot} v \wedge (x' - x)$$

Vettore vorticità $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v}$

otteniamo

$$v(x') = \underbrace{v(x) + \vec{\omega} \wedge (x' - x)}_{\text{moto rigido}} + \underbrace{D(x - x')}_{\text{deformazione}}$$

Formula fond. moto rigido $v(P) = v(O) + \vec{\omega} \wedge (P - O)$