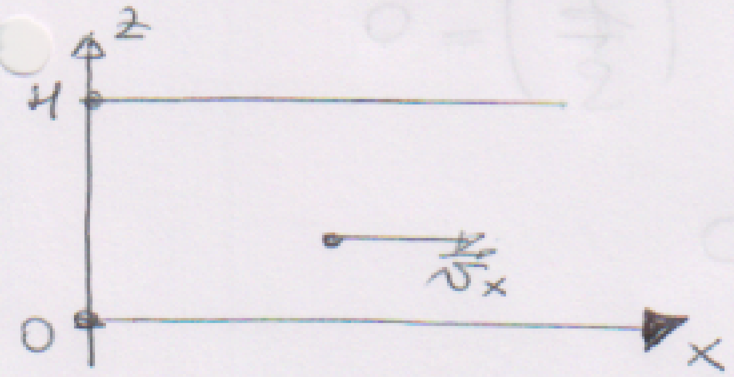
Fluidi viscosi

Consideriamo i limiti del modello del fluido perfetto. Nel modello di Eulero, non si considerano gli sforzi di taglio, questo ne limita fortemente l'applicazione nel caso di presenza di pareti o ostacoli.

Esempio Consideriamo un fluido fra 2 piani



Determiniamo il campo di velocità $\vec{v} = v_x(x,z)\vec{e}_x$ in presenza della forza peso. Eq. di Eulero

$$\text{rot}\,\vec{v} \wedge \vec{v} = -\nabla\left(\frac{1}{2}v^2 - U + P\right)$$

$$\text{rot}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z}\vec{e}_y - \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial y}\vec{e}_z}^{\,0} = \frac{\partial v_x}{\partial z}\vec{e}_y$$

$$\text{rot}\,\vec{v} \wedge \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z}\vec{e}_y \wedge v_x\vec{e}_x = -\frac{\partial v_x}{\partial z}v_x\vec{e}_z$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v_x^2}{2}\right)\vec{e}_z$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_x^2}{2}\right)\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v_x^2}{2}\right)\vec{e}_z$$

Sostituiamo

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \vec{e_x} = \nabla(U-P) = \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e_z} - \frac{\partial P}{\partial z} \vec{e_z} - \frac{\partial P}{\partial x} \vec{e_x}$$

potenziale del peso

Separiamo le 2 componenti

$$\begin{cases} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}(U-P) = \frac{\partial}{\partial z}\left(gz + \frac{p}{\rho}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow gz + \frac{p}{\rho} = \text{cost}(x) = C(x)$$

utilizziamo Hp di incompressibilità $\underbrace{\nabla \cdot v}_{\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0} = 0$

la 1ª eq. $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(C(x) - gz\right) = \frac{\partial}{\partial x} C(x)$

$\Rightarrow C$ costante

ho trovato una soluzione delle eq. <u>senza</u> determinare v_x $\Rightarrow$ campo di veloc. indeterminato, necessità di considerare sforzi di taglio

Abbiamo visto che la caratt. principale di un fluido ideale è quella di deformarsi in presenza di sforzi di taglio, anche piccoli.

Il th Pascal afferma che lo sforzo relativo ad un elemento di superficie è diretto lungo la normale ed il suo modulo è indip. dalla direzione normale

$$\vec{\phi}(P, \hat{n}) = -p\,\hat{n} = T\hat{n}$$

in termini matriciali $T_{ij} = -\delta_{ij}\,p$

possiamo anche scrivere $p = -\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,T = -\frac{1}{3}\sum_i T_{ii}$

Consideriamo più in generale fluidi in moto (non perfetti), in questo caso esisteranno anche sforzi di taglio

Scriviamo $T = -p\,\delta_{ij} + S_{ij}$

$\downarrow$

tensore degli sforzi o viscoso

è una funzione del moto e si annulla nel caso ~~statico~~: recup. il modello di fluido ideale.

Fluidi viscosi: fluidi nei quali, in presenza di elevato gradiente di velocità, gli sforzi di taglio non possono essere trascurati

Nel considerare gli sforzi di taglio dobbiamo distinguere il caso in cui il corpo si deforma dal caso in cui il fluido ~~sta~~ semplicemente compiendo un moto rigido

Il tensore degli sforzi contenente possibili elementi di taglio è costruito sommando al tensore del fluido perfetto $-pI$, un tensore che si annulla in presenza di moti rigidi. Gli sforzi di taglio compiono lavoro in presenza di scorrimento fra gli strati di un liquido. Nei moti rigidi questo è impedito. Dobbiamo escludere dalla trattazione i moti rigidi se vogliamo vedere nel bilancio delle forze il contributo degli sforzi di taglio.

Cerchiamo quindi un tensore degli sforzi della forma

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + S_{ij}$$

con S_{ij} che dipende dalle derivate $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ e

che si annulla nel caso di moto rigido

Ricordiamo che abbiamo decomposto il tensore della velocità in parte simm e asimmetrica

$$\frac{(\nabla v)+(\nabla v)^{t}}{2} \doteq D$$: tensore di deformazione

Si annulla nel caso del moto rigido. Il nome deriva dal fatto che nel caso di moto rigido, la deformazione è nulla.

Il tensore degli sforzi viscosi sarà costruito alla seguente maniera

S deve annullarsi per fluido in quiete

$S = S(D)$ è funzione del tensore degli sforzi di deformaz.

Nel caso di fluidi viscosi, la pressione è definita come $p = -\frac{1}{3} Tr\left(T - S\right) = -\frac{1}{3} \sum_i \left(T_{ii} - S_{ii}\right)$

Esistono vari modelli di fluidi viscosi

Fluidi Newtoniani S è funzione lineare di D

$$S_{ij} = \sum_{rs} K_{ijrs} D_{rs}$$

Se questa non vale, si parla di fluidi non Newtoniani

In caso di fluidi isotropi, la formula si semplifica notevolmente; di tutti i termini solo 2 sono indip.

$$S_{ij} = \underbrace{\lambda\, \delta_{ij} \sum_k D_{kk} + 2\mu D_{ij}}$$

coeff. di viscosità.

$$T_{ij} = -p\,\delta_{ij} + S = -p\,\delta_{ij} + \lambda\,\delta_{ij}\, \mathrm{Tr} D + 2\mu D_{ij}$$

$$T_{ii} = -p + \lambda\, \mathrm{tr}(D) + 2\mu D_{ii}$$

$$\frac{1}{3}\mathrm{tr}(T) = \frac{1}{3}\sum_i T_{ii} = -p + \underbrace{\frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)}_{=\,k}\mathrm{tr}(D)$$

k : coeff. di viscosità di volume

Il caso $k=0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}\mu$ è noto come

condizione di Stokes

in questo caso recuperiamo la relazione

$$p = -\frac{1}{3}\mathrm{tr}(T)$$

Equazioni di moto per un fluido viscoso

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v) = 0$$: Eq. continuità

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \nabla v = \rho f_m + \mathrm{div}(T)$$: Eq. cardinale della dinamica

$$T_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \lambda \delta_{ij}\, Tr(D) + 2\mu\, D_{ij}$$:

Eq. costitutiva

$$p = p(\rho)$$: Eq. di stato

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$: tensore di deformazione

Abbiamo 17 eq. scalari nelle incognite $T_{ij}, \rho, v_i, D_{ij}, p$

Possiamo già eliminare alcune delle incognite rielab. le equazioni

Consideriamo l'eq. cardinale della din

$$\rho\left(f - \frac{\partial v}{\partial t} - v\cdot\nabla v\right) = \mathrm{div}\left(p\delta_{ij} - \lambda\delta_{ij}\,Tr(D) - 2\mu D_{ij}\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}(p\delta_{ij}) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(p\delta_{ij}) = \sum_j \frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij} +$$

$$+ p\sum \cancel{\frac{\partial}{\partial x_j}\delta_{ij}}^{\,0} = \frac{\partial p}{\partial x_i} = (\nabla p)_i$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}(D_{ij}) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} D_{ij} = \frac{1}{2}\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_i\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} v_j = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\vec{\nabla}\vec{v}) + \frac{1}{2}\Delta v_j$$

$$= \frac{1}{2}\left(\nabla(\vec{\nabla}\vec{v}) + \Delta\vec{v}\right)_j$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}(\delta_{ij}\ tr D) = \frac{\partial}{\partial x_i} tr D = \frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{\nabla}\vec{v}) =$$

come per p

$$= (\nabla(\vec{\nabla}\vec{v}))_i$$

$$Tr\, D = \sum_i D_{ii} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right) = (\vec{\nabla}\vec{v})$$

abbiamo ottenuto

$$\rho\left(f - \frac{\partial v}{\partial t} - \bar{v}\bar{\nabla}v\right) = \vec{\nabla}p - \lambda\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{v}) -$$

$$-\mu\vec{\nabla}(\bar{\nabla}\bar{v}) - \mu\Delta\vec{v}$$

$$= \vec{\nabla}p - (\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\bar{\nabla}\bar{v}) - \mu\Delta\vec{v}$$

in componenti

$$\rho\left(f_i - \frac{\partial v_i}{\partial t} - \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i\right) =$$

$$= \frac{\partial p}{\partial x_i} - (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \mu\sum_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}$$

Eq. Navier-Stokes

Se vale la condiz. di Stokes $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ l'equazione diventa

$$\boxed{\rho\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \rho(\bar{v}\bar{\nabla})\bar{v} = \rho\bar{f} - \bar{\nabla}p + \frac{1}{3}\mu\left[\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\bar{v}) + 3\Delta\vec{v}\right)}$$

L'equaz. N-S. può essere risolta se affiancata all'eq. di continuità

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\bar{v}) = 0$$

e l'equazione di stato $\rho = \rho(p)$

Anche nel caso dei fluidi viscosi con eq. N-S possiamo considerare dei casi particolari: fluidi barotropici $\rho(p)$ e incomprimibili

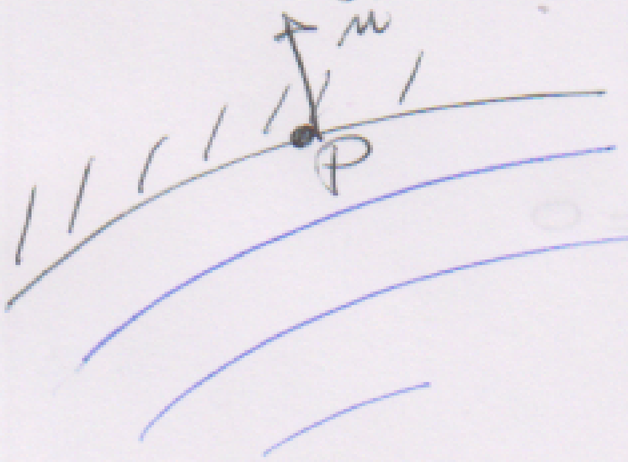
Fluidi incomprimibili soggetti a gravità

$\rho = \rho_0 \Rightarrow \bar{\nabla}\bar{v} = 0$: le eq. N-S si semplificano

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\cdot\bar{\nabla})\bar{v} = \bar{f} + \dfrac{1}{\rho}\left(-\vec{\nabla}p + \eta\,\Delta\vec{v}\right) \\ \nabla\cdot v = 0 \end{cases}$$

Nel caso tipico di fluidi pesanti $\bar{f} = \bar{g}$

COND. CONTORNO Eq. N-S.



parete

2 scelte tipiche

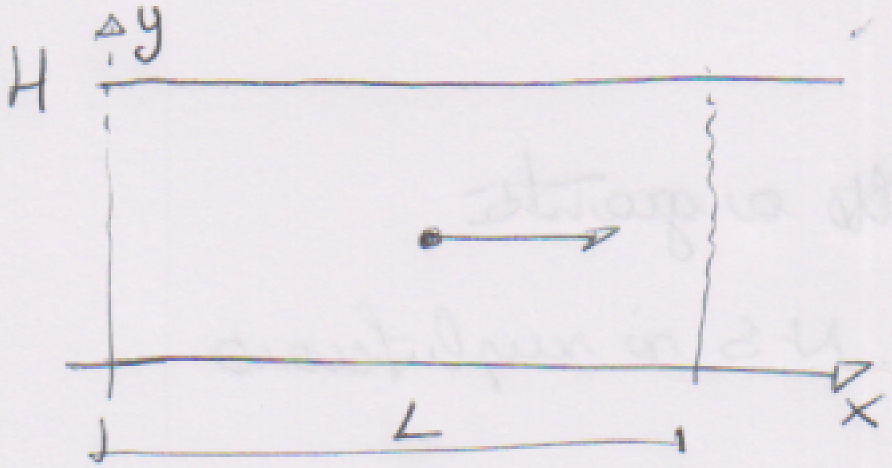
Non attravers. della parete

$\vec{v}\cdot\hat{n}\big|_P = 0$

Condizione di non scivolamento $v\big|_P = 0$

Nota: nel caso $\eta = \lambda = 0$ si riottengono le eq. di fluidi perfetti di Eulero

Scorrimento di un fluido all'interno di 2 pareti
(Moto di Poiseuille).



Campo di velocità unidimensionale, cerchiamo soluzione del tipo $\vec{v} = v_x(x,y)\,\vec{e}_x$ | sol. stat. unidimensionale

Ipotizziamo di conoscere i valori di pressione agli estremi della condotta.

Imponiamo la cond. di non slittamento $\vec{v}(x,0) = \vec{v}(x,L) = 0$

Fluido pesante incomprimibile

$$\nabla \vec{v} = 0 = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial y} v_y} = 0$$

$$\Rightarrow v_x = v_x(y)$$

Quindi $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = v_x(y)\frac{\partial}{\partial x}(v_x(y)\,\vec{e}_x) = 0$

$$\Delta v = \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_x(y)\,\vec{e}_x$$

L'eq. N-S. $\frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)v = -g\,\vec{e}_y + \frac{1}{\rho}(-\nabla p + \eta\Delta v)$

si semplifica

$$0 = -g\,\vec{e}_y + \frac{1}{\rho}\left| -\frac{\partial p}{\partial y}\,\vec{e}_y \underbrace{\ }_{-\frac{\partial p}{\partial x}\vec{e}_x} + \mu \frac{\partial^2}{\partial y}\,v_x\,e_x \right|$$

otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial y} = -g\rho \quad \Rightarrow \quad p = -g\rho y + c(x) \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial x} = \mu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial}{\partial x} c(x) = \mu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y) = G \end{cases}$$

$$f(x) = g(y)$$

$$p = -g\rho y + Gx + b$$

C.C. $\quad p(x=0) = p_0 \quad p(x=L) = p_L$ in $y=0$

$$b = p_0 \ ; \quad GL + p_0 = p_L \Rightarrow G = \frac{\Delta p}{L}$$ diff. di pressione

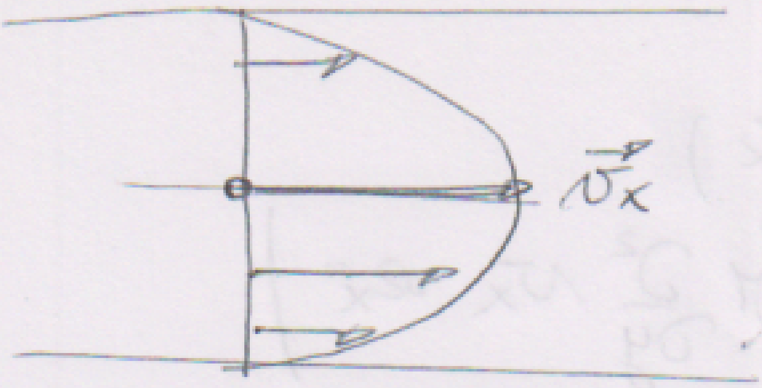
$$\boxed{p = -g\rho y + p_0 + \frac{\Delta p}{L} x}$$

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = G = \frac{\Delta p}{L} \Rightarrow v_x = \frac{\Delta p}{\mu L}\frac{y^2}{2} + Ay + B$$

C.C. $\quad v_x(0) = v_x(H) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad A = -\dfrac{\Delta p}{\mu L}\dfrac{H}{2}$

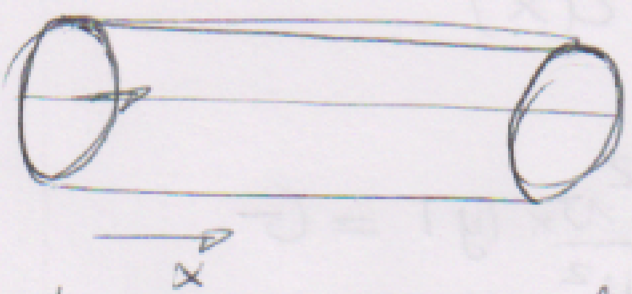
$$\boxed{v_x(y) = \frac{\Delta p}{2\mu L}\left|y^2 - Hy\right|}$$

andamento parabolico della velocità



$$|v_M| = \frac{\Delta P}{L}\,\frac{H^2}{8\mu}$$

Geometria cilindrica



Fluido viscoso in moto stazionario all'interno di un tubo cilindrico di raggio R.

Per simm. ipotesi $\vec{v} = v_x(r)\,\vec{e}_x$

$$p = p(x)$$

$\vec{v}(R) = 0$ aderenza con le pareti del tubo

Inoltre, per ragioni di simm. ci aspettiamo che la velocità sia massima lungo l'asse del tubo

$\left.\frac{dv_x}{dr}\right|_{r=0} = 0 \qquad v_x(0) = \max$

Le eq N-S si semplificano

$$-\nabla p + \mu \Delta v = 0$$

con $\nabla p = \frac{dp}{dx}\,\vec{e}_x \qquad \Delta v = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2}\right)\vec{e}_x$

Adimensionalizzazione Eq. N-S.

Proprietà di scalatura delle eq. in dim. 2:

Dominio rettangolare lungh. L e alt. H

Scalatura: riscrivere le eq. tramite variabili adimensionali ottenute esprimendo le grandezze fisiche come rapporto di alcuni valori tipici per il problema in esame

Ex: $\frac{x}{L} = x'$

L → lungh. tipica del mio problema

lung. dimensionale $[x] = m$

Fisso il regolo con cui misuro le grandezze.

Questo fa in generale apparire dei coeff. adimensionali nelle eq scalate (scritte nelle var. adimensionali) che permettono di stimare (a priori) il peso relativo dei vari elementi di un'equazione

N.S $v = (u_x, u_y)$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \qquad \text{incomp.}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right) + \rho g$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right)$$

variabili indipendenti : (x, y, t)

v. dipend. : u_x, u_y, p

parametri fisici L, H, ρ, η, g

Introd. le variab. adim. $x' = \frac{x}{L}$ $y' = \frac{y}{L}$

$$u'_x = \frac{u_x}{V} \qquad u'_y = \frac{u_y}{V}$$

V: velocità "tipica" del fenomeno

$t' = \frac{t}{L/V}$ tempo tipico $\sim \frac{L}{V}$

$$p' = \frac{p}{\eta L/V}$$

Adimensionalizz. $\Rightarrow$ $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p'}{\partial x} \frac{\eta L}{V} = \frac{\partial p'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\eta L}{V}$

$$= \frac{\partial p'}{\partial x'} \frac{\eta}{V}$$

Procedendo in questo modo ~~otteniamo~~ le Eq. N-S adimensionalizzate

$$\rho \frac{VL}{\eta} \left(\frac{\partial u'_x}{\partial t'} + u'_x \frac{\partial u'_x}{\partial x'} + u'_y \frac{\partial u'_x}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \left(\frac{\partial^2 u'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'_x}{\partial y'^2} \right) + \frac{\rho g L^2}{\eta V}$$

$$\rho \frac{VL}{\mu} \left(\frac{\partial w_y}{\partial t'} + w'_x \frac{\partial}{\partial x'} w'_y + w'_y \frac{\partial w'_y}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x'} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x'} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y} \right)$$

Sono apparsi 2 coeff adimensionali

Numero Reynolds $Re = \frac{\rho V L}{\mu}$

misura il rapp. fra le forze inerziali (a sx dell'eq.)

e le forze viscose $\sim \mu$

Numero Stokes: $St = \frac{\rho g L^2}{\mu V} \sim \frac{\text{forza grav.}}{\text{forze viscose}}$