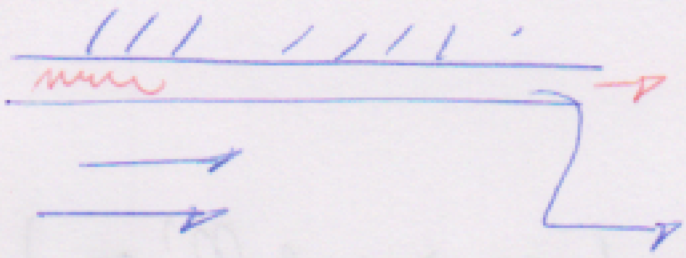
Approssimazione di strato limite

Fluido confinato: In prossimità di una parete che confina il moto di un fluido si viene a formare una regione, tgs. molto sottile all'interno della quale la velocità del fluido deve fare ad annullarsi



strato limite

bilanciamento dei termini convettivo e diffusivo dell'eq.

$\nu \Delta v$ non più trascurabile

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \underbrace{\boxed{v \nabla v}}_{\text{conv.}} = g + \frac{1}{\rho}\left(-\nabla p + \underbrace{\mu \Delta v}_{\text{diff.}}\right)$$

Diffusione non trascurabile in prossimità di ostacoli

Forze di taglio che creano dissipazione di E meccanica

Coeff. di viscosità cinematica $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

μ: coeff. viscosità dinamica

$[\nu] = m^2/s$ $\quad [\mu] = kg/m \cdot s$

Viscosità caratt. da n. Reynolds $Re = \frac{v_c L}{\nu}$

v_c: velocità caratt. del fluido contorno dell'ostacolo

Viscosità $\sim \dfrac{\Delta v^2}{Re}$

Tipicamente $Re \gg 1$ lontano da un ostacolo

Vicino si ha tipicamente una zona di strato limite dello spessore $\delta \sim \dfrac{1}{Re}$

Termine convettivo/diff $\sim \dfrac{\delta}{L} = Re^{-1/2}$

$$\delta = \frac{L^2}{Re} \to 0 \quad Re \to \infty$$

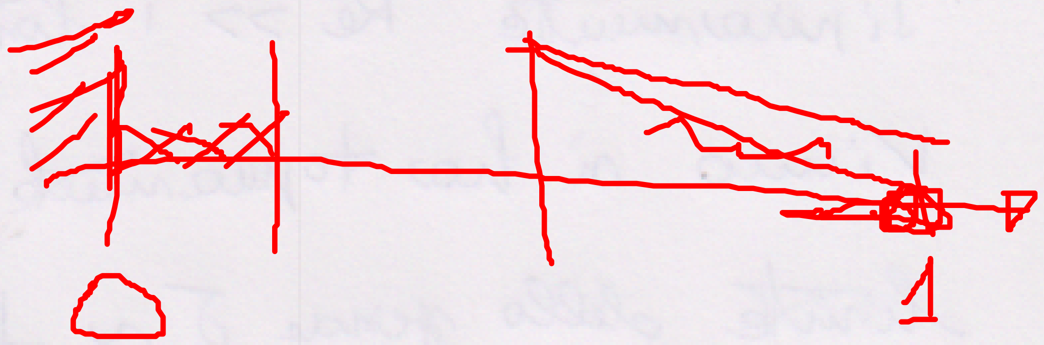
Eq. N-S. adimensionale

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta v$$

$1/Re \to 0$: Perturbazione SINGOLARE

ESEMPIO DI EQ. SINGOLARE

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{d^2v}{dx^2} + (1+2\varepsilon)\dfrac{dv}{dx} + 2v = 0 \\ v(0) = 0 \\ v(1) = 1 \end{cases}$$



$$\varepsilon \to 0 \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} + 2v = 0$$

$$v(x) = e^{-2(x-1)} \qquad v(1) = 1$$

$$v(0) \neq 0$$

$\rightarrow$ soluzione ESTERNA

Soluzione "buona" vicino a $x=0$

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon} \qquad v(x) = v(\varepsilon\xi) = u(\xi)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}u(\xi) = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}\right) =$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{dx}\frac{du}{d\xi} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{du}{d\xi^2}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{du}{d\xi}$$

Sostituendo si ottiene

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + (1+2\varepsilon)\frac{du}{d\xi} + 2\varepsilon u = 0$$

per $\varepsilon \to 0 \Rightarrow \dfrac{d^2 w}{d\xi^2} + \dfrac{du}{d\xi} = 0$

Soluzione (INTERNA) $= A(1 - e^{-\xi})$

$u(0) = 0$

Rendiamo la sol interna cap. con esterna

Sol esterna è ~~ottenuta~~ in $\varepsilon \to 0 \Rightarrow \xi \to \infty$

imponiamo

$\xi \to \infty$	$x \to 0$
INT	EST

$$\lim_{x \to 0} v(x) = \lim_{\xi \to \infty} w(\xi)$$

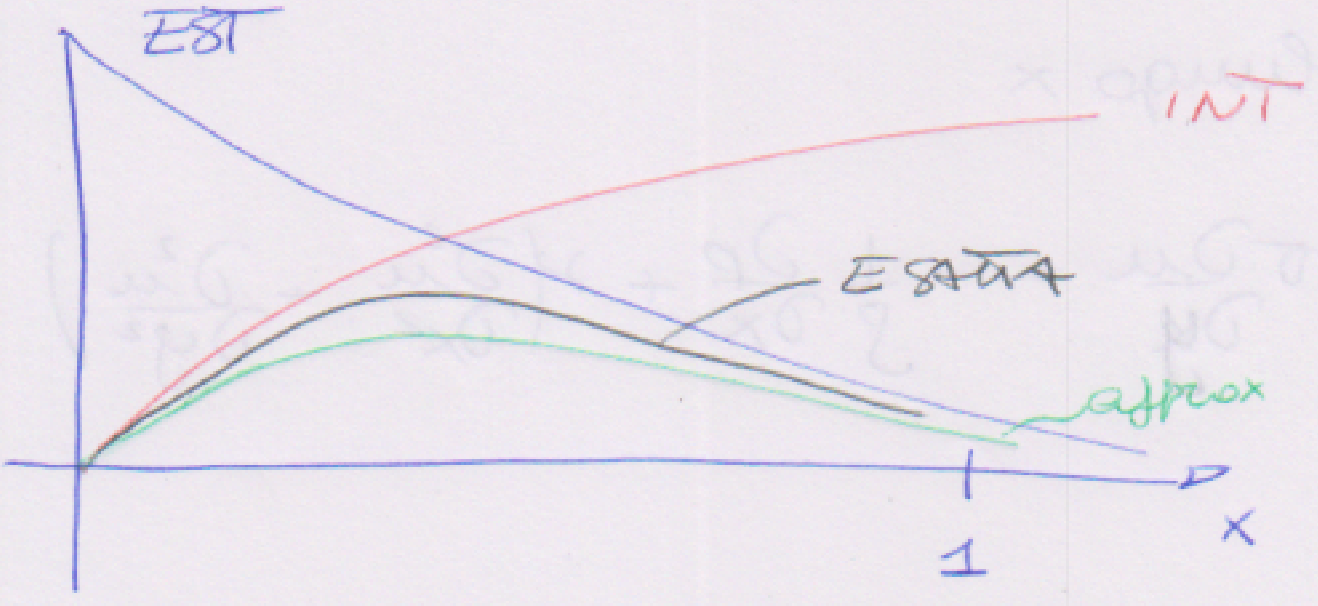
$$e^2 = A$$

SOL INT $= w(\xi) = e^2(1 - e^{-\xi})$

Sommando

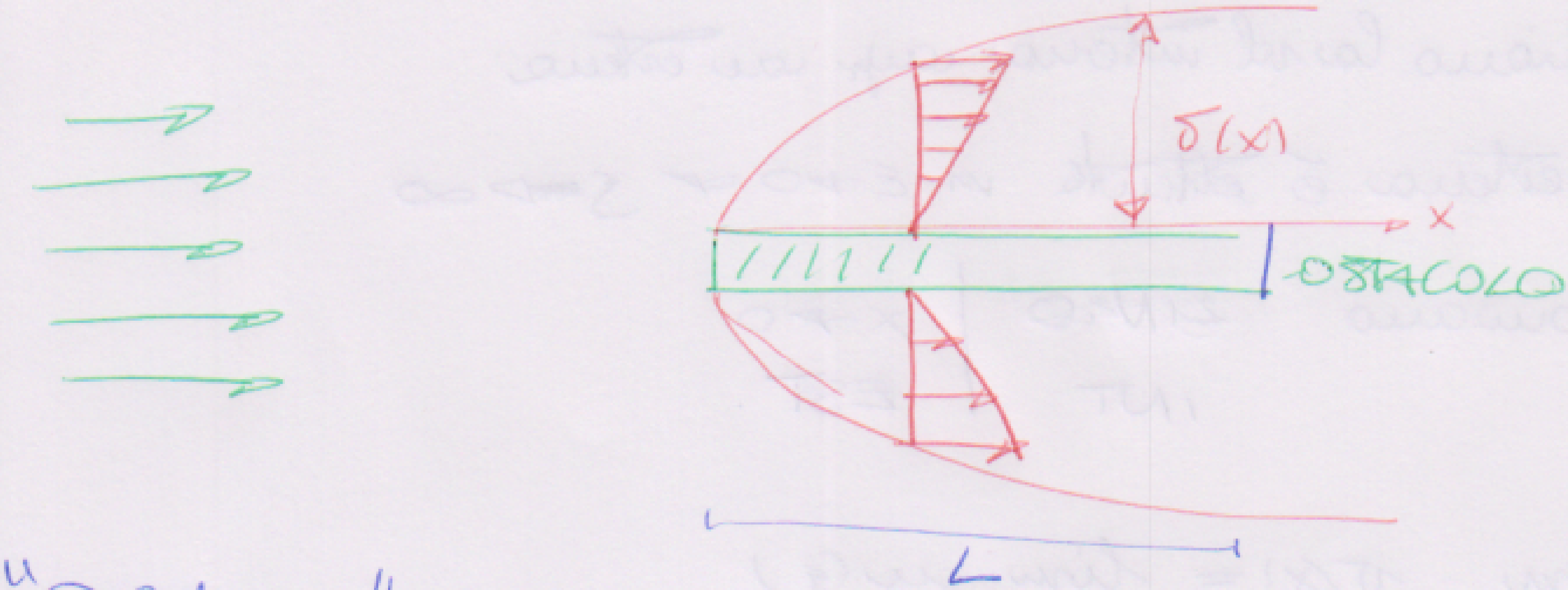
$$v(x) = e^{-2(x-1)} + e^2(1 - e^{-x/\varepsilon}) + e^2$$

omesso il $x \to 0$



SOL ESATTA $\quad v(x) = \dfrac{e^{-2x} - e^{-x/\varepsilon}}{e^{-2} - e^{-1/\varepsilon}}$

Equazione Strato limite



"Dilatiamo" le coordinate spaziali vicino all'ostacolo

Regime Turbolento $Re \gg 1$

$\vec{u} = (u(x,y), v(x,y))$ campo di velocità 2D

Eq. Regime Stazionario (peso trascurabile)

$$\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{u}$$

Componente lungo x

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Scaling