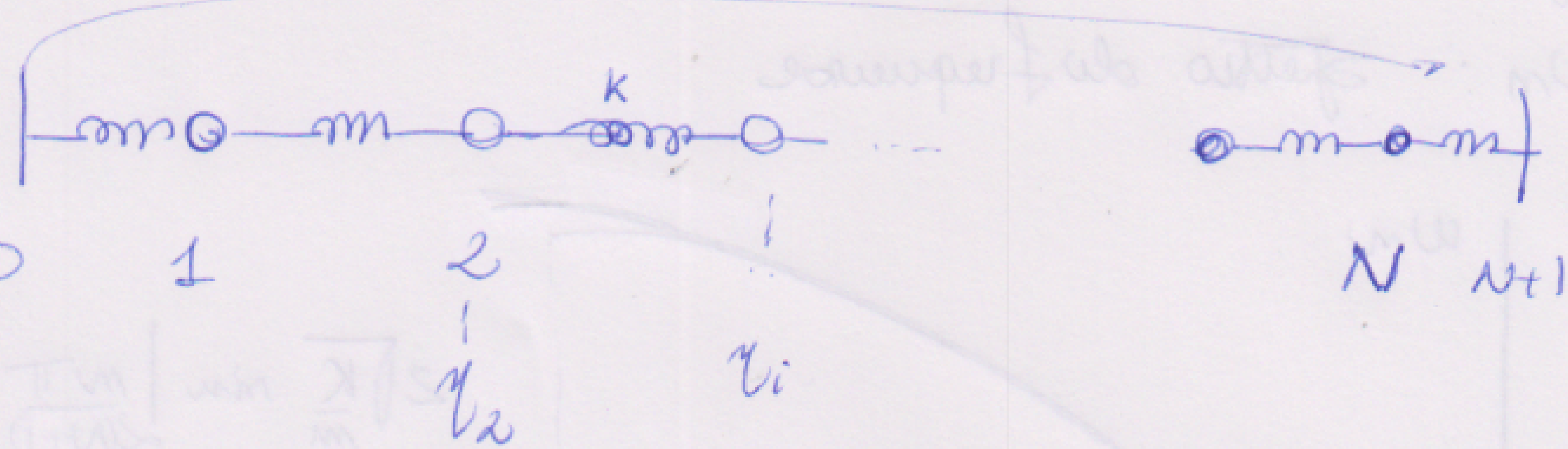
Consideriamo una catena di N atomi



— Anello periodico

Procedendo come nel caso generale otteniamo il seguente sist. di eq. accoppiate

$$m\ddot{\eta}_i - k(\eta_{i+1} - \eta_i) + k(\eta_i - \eta_{i-1}) = 0 \qquad i = 1 \dots N$$

$$m\ddot{\eta}_i = k(\eta_{i+1} - 2\eta_i + \eta_{i-1}) \qquad (1)$$

Th Il sistema lineare di Eq (1) con condiz. al contorno $\eta_0 = \eta_{N+1} = 0$ ammette N soluzioni linearmente indipendenti della forma

$$\eta_i(t) = \sin\left(\frac{i n \pi}{N+1}\right) q(t)$$

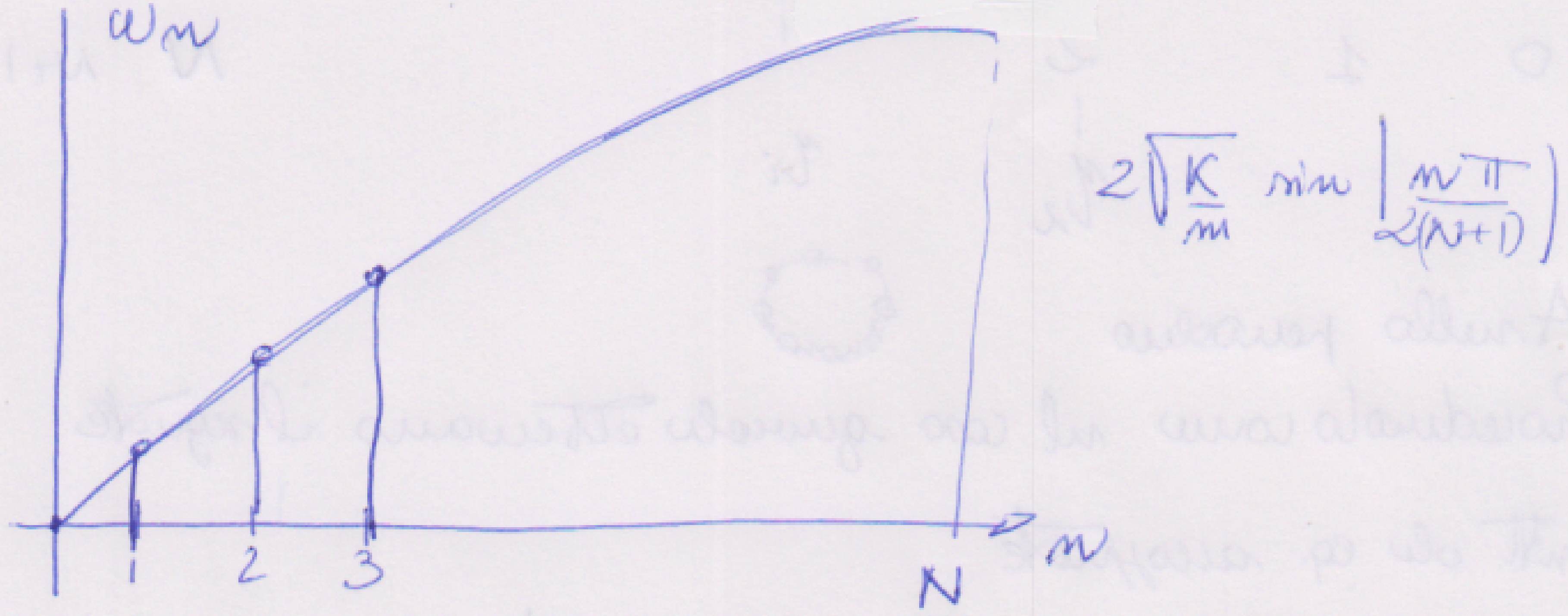
$$q(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$$

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right) \qquad n = 1 \dots N$$

a_n, b_n costanti arbitrarie

ogni soluzione è detta modo normale di vibrazione

ω_n : spettro di frequenze



Verifica

Consideriamo sol. della forma $x_i(t) = X_i\, q(t)$

$\downarrow$ costante reale

Otteniamo $\quad X_i\,\ddot{q}(t) = \frac{k}{m}\left(X_{i+1} - 2X_i + X_{i-1}\right) q(t)$

$$q(t) = e^{i\omega t} A \qquad \ddot{q} = -\omega^2 A e^{i\omega t}$$

$$\frac{k}{m}\left(X_{i+1} - 2X_i + X_{i-1}\right) = -\omega^2 X_i$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} \qquad \frac{k}{m}\begin{pmatrix} -2+\omega^2\frac{m}{k} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -2+\omega^2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -2+\omega^2 & 1 & 0 \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 1 & -2+\omega^2 \end{pmatrix} \vec{X} = 0$$

Problema agli autovettori.

Poniamo $x_i = \sin(i\gamma)$

↳ da determinare

otteniamo

$$\frac{k}{m}\left(\sin[(i+1)\gamma] - 2\sin(i\gamma) + \sin[(i-1)\gamma]\right) =$$

$$= -\omega^2 \sin(i\gamma)$$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

bisezione

$$\frac{2k}{m}(\cos\gamma - 1)\sin(i\gamma) = -\frac{4k}{m}\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\sin(i\gamma)$$

2ª eq. diventa

$$\underbrace{\left(\frac{4k}{m}\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \omega^2\right)}_{\overset{\shortparallel}{0} \text{ per arbit. di } i}\sin(i\gamma) = 0$$

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\gamma/2)$$

condizioni agli estremi $x_0 = 0$ ok

$$x_{N+1} = \sin((N+1)\gamma) = 0 \Rightarrow \gamma_n = \frac{n\pi}{N+1} \qquad n = 1 \ldots$$

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right)$$

$$q_n(t) = A\, e^{i\omega_n t} \Rightarrow a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$$