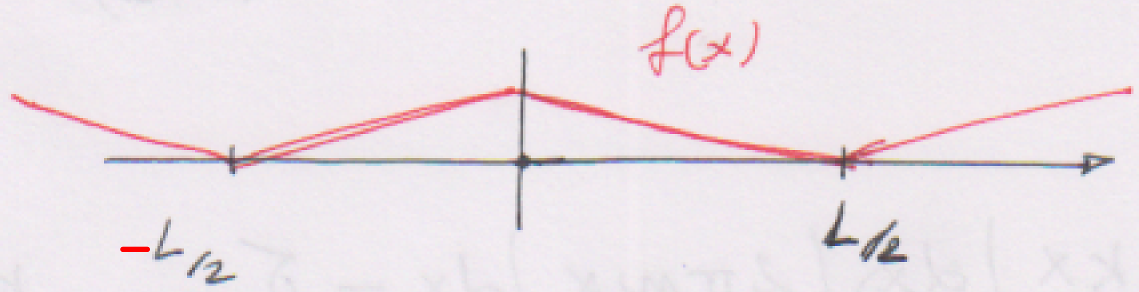
Sviluppo in serie di Fourier

Consideriamo una funzione $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

periodica con periodo L



assumiamo $f(x)$ continua. Si dimostra che $f(x)$ può

essere espressa come una serie in seni e coseni

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n 2\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n 2\pi x}{L}\right)\right)$$

in cui $$a_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) dx$$

Verifichiamo alcune proprietà elementari delle f. seno e cos

1) $$\int_{-L/2}^{L/2} \sin\left(\frac{2\pi k x}{L}\right)dx = \int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{2\pi k x}{L}\right)dx = 0$$

$\forall\ k \in N^+$

2) $$\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{2\pi k x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right)dx = \delta_{k,m} \qquad k,m \in N^+$$

$$\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \sin\left(\frac{2\pi k x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi m x}{L}\right)dx = \delta_{k,m}$$

3) $$\int_{-L/2}^{L/2} \sin\left(\frac{2\pi k x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) = 0$$

Verifichiamo prop. 1)

$$\int_{-L/2}^{L/2} \sin\left(\frac{2\pi k x}{L}\right)dx = -\frac{L}{2\pi k}\cos\left(\frac{2\pi k x}{L}\right)\Bigg|_{-L/2}^{L/2} =$$

$$= -\frac{L}{2\pi k}\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{L}\frac{L}{2}\right) - \cos\left(-\frac{2\pi}{L}k\frac{L}{2}\right)\right) = 0$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{2\pi k x}{L}\right)dx = \frac{L}{2\pi k}\sin\left(\frac{2\pi k x}{L}\right)\Bigg|_{-L/2}^{L/2} = 0$$

Prop 2

usiamo $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{2\pi k}{L}x\right)\cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\cos\left(\frac{2\pi}{L}x(k-m)\right)dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\cos\left(\frac{2\pi}{L}x(k+m)\right)dx$$

se $k \neq m$ per prop. 1 entrambi gli integ. si annullano

se $k = m$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\left(1+\underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{L}2kx\right)}_{0}\right)dx = \frac{L}{2}$$

analogo per il termine seno-seno e seno-coseno

usando $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$$

Utilizzando queste proprietà possiamo verificare la coerenza della s. di FOURIER

Sia $f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\right)$ 1

allora $a_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx \qquad A = \frac{a_0}{2}$$

Verifica. Moltip. ① per $\cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right)$ $\quad m \in \mathbb{N}^+$

ed integriamo

$$\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right)dx = A\underbrace{\int_{-L/2}^{L/2}\cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right)dx}_{=0} +$$

$$+\sum_n \left\{ a_n \int_{-L/2}^{L/2} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx}_{\frac{L}{2}\delta_{nm}} + \right.$$

$$\left. \underbrace{b_n \int_{-L/2}^{L/2}\cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx}_{=0} \right\}$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right)dx = a_m \frac{L}{2}$$

analogo risultato se moltiplico per $\sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right)$

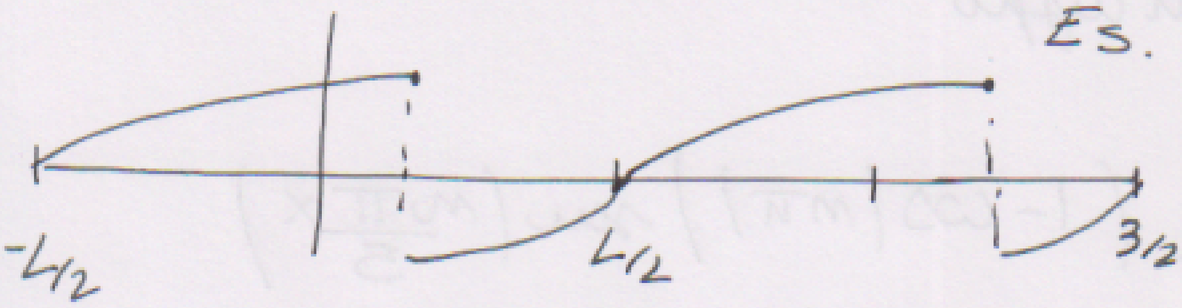
per il termine a_0 integro ①

$$\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\,dx = A\int_{-L/2}^{L/2} dx + \sum_n \left\{ \underbrace{a_n\int_{-L/2}^{L/2}\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx + b_n\int_{-L/2}^{L/2}\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx}_{=0} \right\}$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\,dx = L\,A = L\,\frac{a_0}{2}$$

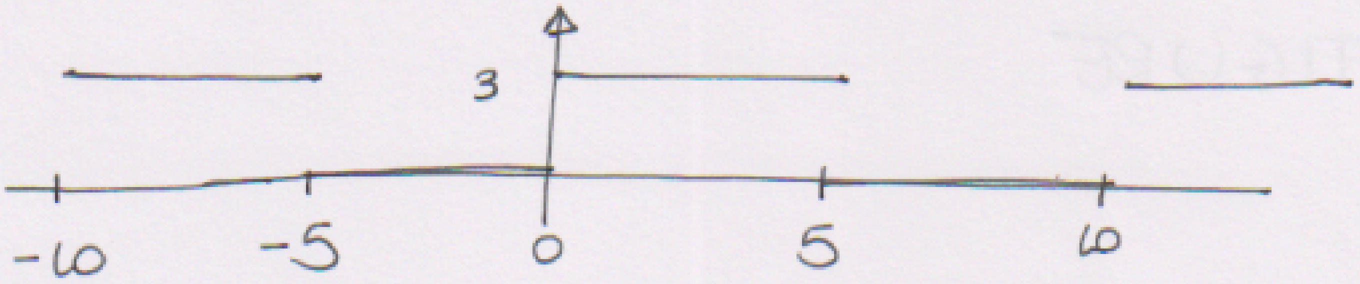
Sorprendentemente, si può dimostrare che la S.S.F. resta valido anche per funzioni periodiche continue a tratti: (continue in $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ eccetto un numero finito di punti in corrispondenza dei quali però esiste il lim. destro e lim. sinistro)

Es.



Si dimostra che la serie F. converge puntualmente alla media fra lim dx e lim sx.

Esempio $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & -5<x<0 \\ 3 & 0<x<5 \end{cases} \quad$ periodo $L=10$



Calcoliamo i coeff. $a_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$

$$= \frac{1}{5}\int_0^5 3\cdot\cos\left(n\frac{\pi}{5}x\right)dx = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{n\pi}\sin\left(\frac{\pi}{5}xn\right)\Big|_0^5 = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx = \frac{1}{5}\,3\int_0^5 \sin\left(\frac{\pi x}{5}n\right)dx =$$

$$= \frac{3}{5}\,\frac{5}{\pi n}\,(-)\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\Bigg|_0^5 = \frac{3}{\pi n}\left(-\cos(n\pi)+1\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\,dx = \frac{1}{5}\,3\int_0^5 1\,dx = 3$$

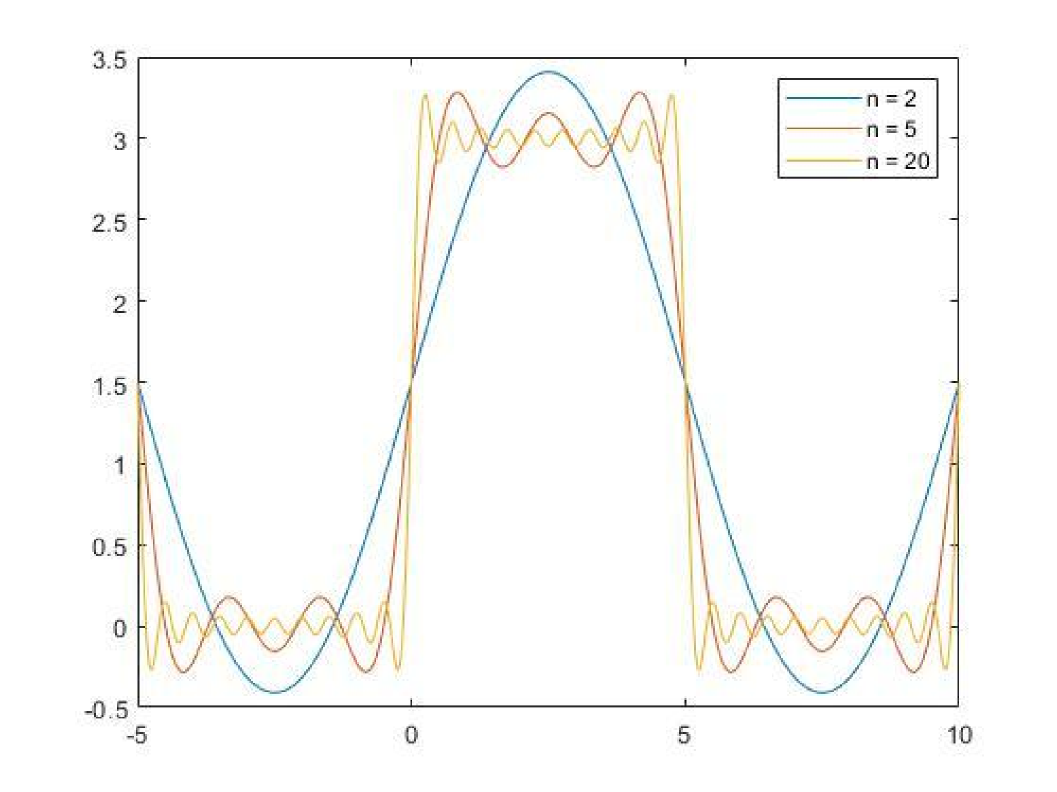
otteniamo il seguente sviluppo

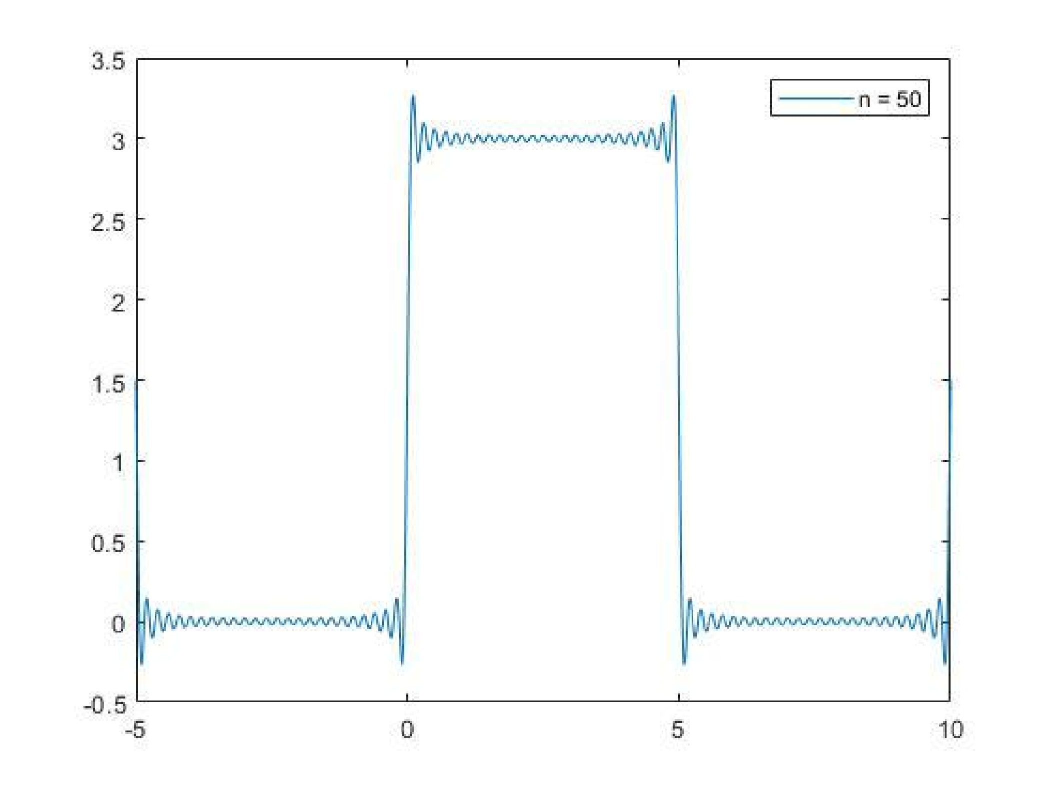
$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{5}x\right)$$

Notiamo che per $x=0$ $\quad f(0) = \frac{3}{2} = f(\pm 5)$

Inoltre $\quad f(x) = \sum f_n(x)$

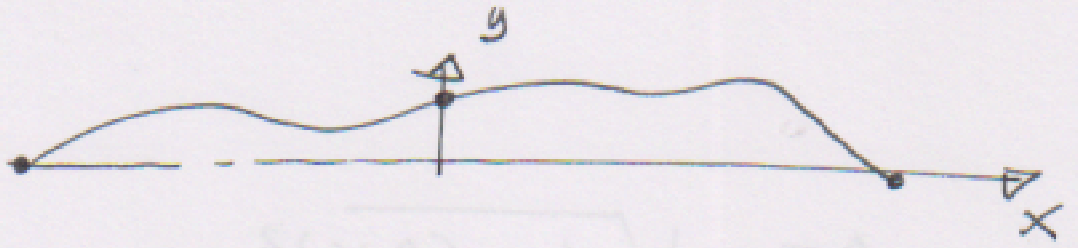
e vale $\quad |f_n(x)| \le K\,\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$





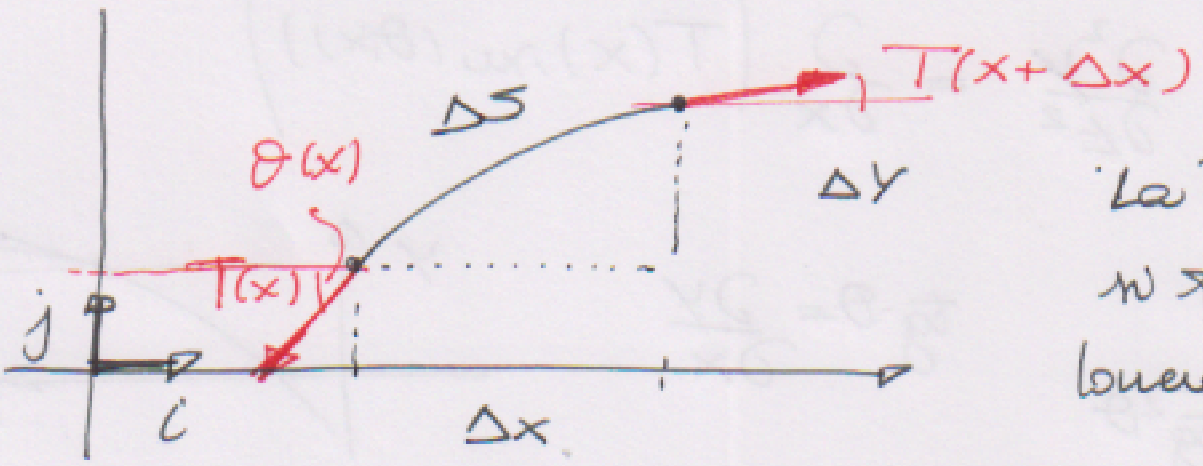
Equazione della corda vibrante: derivazione

Equazione che riproduce le vibrazioni trasverse di una corda tesa



$u(x,t)$ = spostamento verticale rispetto a orizz. dei punto della corda

Scriviamo l'equaz. di moto di un pezzettino di corda di lungh. ΔS



La Forza di Tensione si trasmette longitudinalmente (ovvero lungo la tg della corda)

$T(x)$: Tensione (Forza) trasmessa dal resto della corda

Il contributo netto delle Forze esterne su ΔS è

$$T(x+\Delta x) - T(x)$$

in direzione $\hat{j} \Rightarrow \left(T(x+\Delta x) - T(x)\right)\cdot \hat{j} =$

$$\Delta F_y = T(x+\Delta x)\sin(\theta(x+\Delta x)) - T(x)\sin(\theta(x))$$

$$\hat{i} \Rightarrow \Delta F_x = T(x+\Delta x)\cos(\theta(x+\Delta x)) - T(x)\cos(\theta(x))$$

Consideriamo solo lo spost. verticale della corda

La seconda legge di Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ si scrive

$$\sigma \frac{\Delta s}{\Delta x} \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{T(x+\Delta x)\sin(\theta(x+\Delta x)) - T(x)\sin\theta(x)}{\Delta x}$$

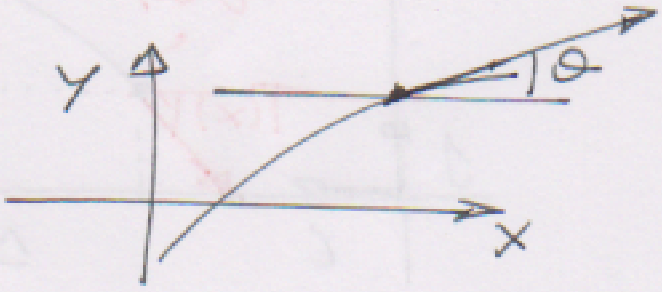
$\downarrow$
densità di massa longit.

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \qquad \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

Nel limite $\Delta_x \to 0$

$$\sigma \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(T(x)\sin(\theta(x))\Big)$$

$$\sin\theta = \frac{tg\,\theta}{\sqrt{1+tg^2\theta}} \qquad tg\,\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$



Otteniamo

$$\sigma \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T\,\partial y/\partial x}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}\right)$$

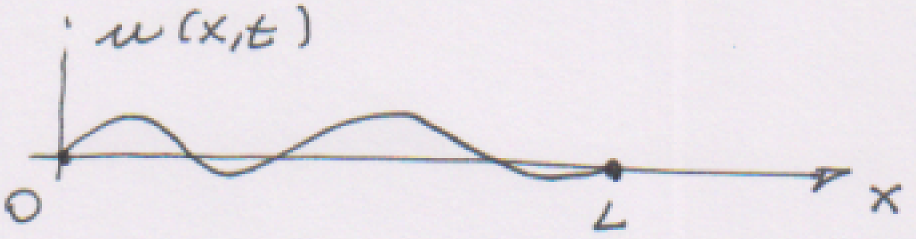
Assumiamo 2 Hp semplificative

- Piccole vibrazioni $\frac{\partial y}{\partial x} \ll 1$
- Tensione costante lungo la corda

Trascuriamo $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ risp. a 1 e otteniamo

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad c^2 = \frac{T}{\sigma}$$

Problema della corda vibrante



$$\text{(1)} \begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & (0,L) \times (0,\infty) \\ u(0) = u(L) = 0 & \\ u = g(x) \quad \partial_t u = h(x) & [0,L] \times \{t=0\} \end{cases}$$

E' utile considerare 2 sotto casi e scrivere

$u = u_b + u_p$

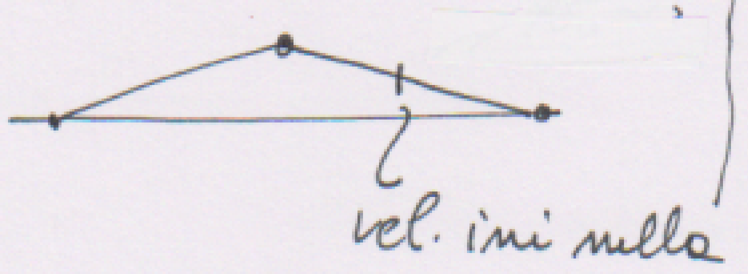
dove u_b è soluz. di (1) con $g=0$

sol. CORDA BATTUTA ⇒ Posizione iniziale fuori Eq.: vel. iniz $=0$

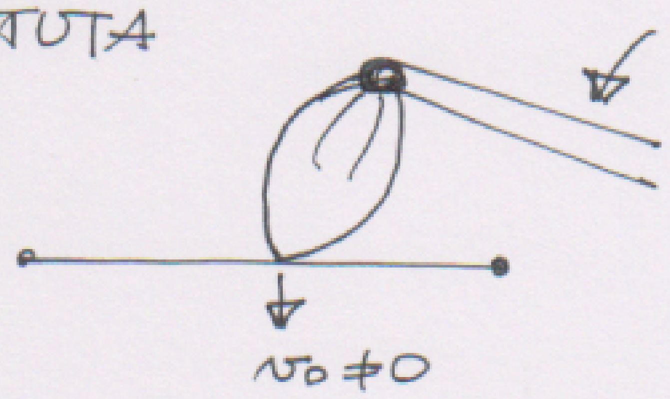
u_p è sol. di (1) con $h=0$ ⇒ Pos. iniz. in eq. veloc. iniz $\neq 0$

Sol. CORDA PIZZICATA

$t=0$ PIZZICATA



BATTUTA



Corda vibrante: soluzione

Consideriamo per semplicità il caso della corda ~~battuta~~

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & (0,L)\times(0,+\infty) \\ u(0) = u(L) = 0 \\ \partial_t u = 0 \quad u = g(x) & [0,L]\times\{t=0\} \end{cases}$$

Cerchiamo una soluzione col metodo della separaz. delle variabili $u(x,t) = \underbrace{S(t)\,Z(x)}_{\text{fattorizz. della soluzione}}$

$$\partial_t^2 u = \ddot{S}(t) Z(x)$$

$$\partial_x^2 u = S(t) Z''(x)$$

eq. onde $\Rightarrow$ $\ddot{S} Z = S Z''$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\ddot{S}(t)}{S(t)} = \dfrac{Z''(x)}{Z(x)}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow \qquad\quad \downarrow$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f(t) \qquad h(x)$

$f(t) = h(x) \Rightarrow f(t) = K = h(x)$

$\hookrightarrow$ costante

Verifichiamo che K deve essere negativa

1) $K > 0 \Rightarrow Z'' = \overset{K}{\overset{\shortparallel}{\lambda^2}} Z \Rightarrow Z = Ae^{\sqrt{K}x} + Be^{-\sqrt{K}x}$

$= Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$

Trovo A e B con le c.c.

$x=0 \Rightarrow u(0)=S(t)\,Z(0)=0 \Rightarrow Z(0)=0$

$u(L)=S(t)\,Z(L)=0 \Rightarrow Z(L)=0$

$Z(0)=0 \Rightarrow A+B=0 \quad \Rightarrow B=-A$

$Z(L)=0 \Rightarrow Ae^{\lambda L}+Be^{-\lambda L}=0$

$\hookrightarrow \quad Ae^{\lambda L}-Ae^{-\lambda L}=A(e^{\lambda L}-e^{-\lambda L})=0$

$A=0 \quad B=0$

$K=\lambda^2 \Rightarrow$ soluz. banale

2) $K=0$ $\quad Z''=0 \Rightarrow Z=Ax+B$

$Z(0)=0 \Rightarrow B=0$

$Z(L)=0 \Rightarrow AL=0 \Rightarrow A=0$

sol. banale

Caso $K<0$: $K=-\lambda^2$

$Z''=-\lambda^2 Z \Rightarrow Z=A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)$

C.C. $\quad Z(0)=0 \Rightarrow B=0$

$Z(L)=0 \Rightarrow A\sin(\lambda L)=0$

$\Rightarrow \lambda L=n\pi \quad \boxed{\lambda=\frac{n\pi}{L}} \quad n\in\mathbb{N}^+$

Risolvendo la componente spaziale di u abbiamo trovato che ~~tutte~~ le funzioni $Z(x) = A \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$ sono sol di eq. e ~~soddisfano~~ soddisfano cond. al cont.

Considero la parte temporale

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -\lambda^2 \qquad \text{dove } \lambda = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \overset{\text{isolato}}{\lambda_n = \frac{n\pi}{L}}$$

Scelgo $n \Rightarrow \quad \frac{\ddot{T}}{T} = -\lambda_n^2$

$$\ddot{T} = -\lambda_n^2 T \Rightarrow \quad T = C_n \sin(\lambda_n t) + D_n \cos(\lambda_n t)$$

C. I. $\quad \partial_t u(\cancel{0},x) = 0$

$$0 = \dot{T}(0) Z(x) = 0 \Rightarrow \dot{T}(0) = 0$$

$$\dot{T} = \lambda_n (C_n \cos(\lambda_n t) - D_n \sin(\lambda_n t))$$

$$\dot{T}(0) = \lambda_n C_n = 0 \Rightarrow C_n = 0$$

Abbiamo ottenuto: fissato $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$

$$\Rightarrow \quad u_n(x,t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right)$$

è soluz. di $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$

$$u(x=0) = u(x=L) = 0$$

$$\partial_t u(x, t=0) = 0$$

per linearità anche $u(x,t) = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$

rispetta tutte le precedenti equazioni

Dobbiamo solo imporre che anche la C.I. sia soddisfatta

$$u(x, t=0) = g(x) = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$\Rightarrow A_n$ sono i coeff. dello s.s. Fourier di g (della sola componente seno

Ricordiamo la formula generale

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{L'} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L'}\right)\right)$$

$$a_n = \frac{2}{L'} \int_{-L'/2}^{L'/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L'}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{L'} \int_{-L'/2}^{L'/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L'}\right) dx$$

In modo da riscriverlo con i parametri della corda mettiamo $\frac{L'}{2} = L$ e $a_n = 0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right).$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

confrontando $g(x) = \sum A_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

NOTA: poiché $g(x)$: $g(0) = g(L) = 0$, g non può avere termini in coseno nello sviluppo

$$B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \overset{x=0}{\Rightarrow} B_n = 0$$

Abbiamo ottenuto la soluzione della corda ~~battuta~~ PIZ

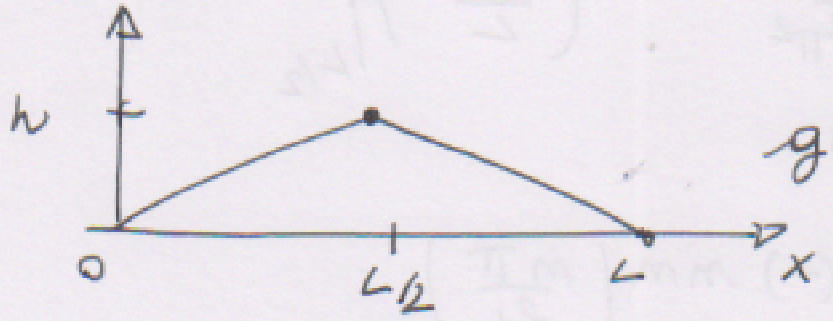
$$u_p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$$

Analogamente, nel caso della corda battuta avremo ottenuto

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & (0,L)\times(0,\infty) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \\ \partial_t u = h(x) \quad u(t=0) = 0 & [0,L]\times\{t=0\} \end{cases}$$

$$u_b = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}\int_0^L h(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$$

Soluz. corda pizzicata



$$g(x) = \begin{cases} x\,\dfrac{2h}{L} & 0<x<L/2 \\ \dfrac{2h}{L}(L-x) & \dfrac{L}{2}<x<L \end{cases}$$

otteniamo i coefficienti.

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx =$$

$$\frac{2}{L}\left\{\int_0^{L/2} x\frac{2h}{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \int_{L/2}^{L} 2h\frac{(L-x)}{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right\}$$

$$\int_0^{L/2} x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = -x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\frac{L}{n\pi}\Bigg|_0^{L/2} + \frac{L}{n\pi}\int_0^{L/2}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= -\frac{L^2}{2n\pi}\cancel{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}^{0} + \frac{L}{n\pi}\frac{L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Bigg|_0^{L/2} =$$

$$\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\int_{L/2}^{L} x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = +x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\frac{L}{n\pi}\Bigg|_{L/2}^{L} - \int_{L/2}^{L}\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= \frac{L^2}{n\pi}\cos(n\pi) - \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_{L/2}^{L} =$$

$$= \frac{L^2}{n\pi}\cos(n\pi) - \frac{L^2}{n^2\pi^2}(-)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{L}\left[\frac{2h}{L}\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2h}{L}\left(\frac{L^2}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) + \underbrace{2h\int_{L/2}^{L}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx}\right]$$

$$-\frac{2hL}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_{L/2}^{L} = -\frac{2hL}{n\pi}\cos(n\pi)$$

$$a_n = \frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

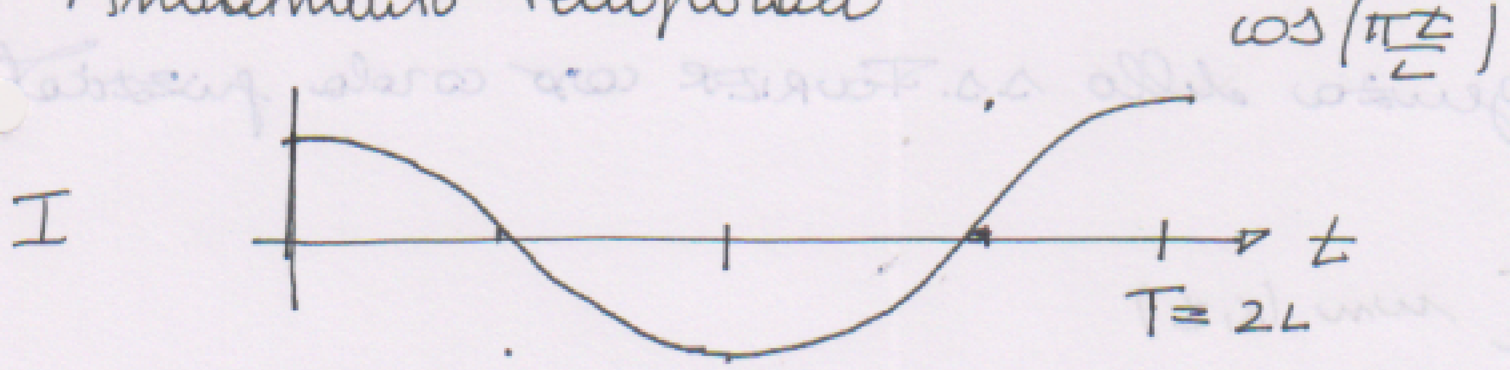
$$w(x,t) = \sum a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) =$$

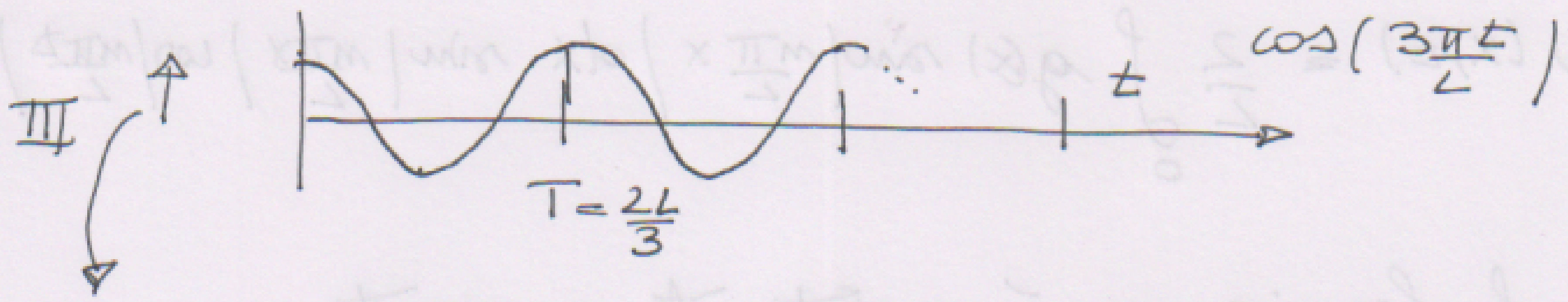
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8h}{\pi^2}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) =$$

solo termini dispari

$$= \frac{8h}{\pi^2}\left\{\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi t}{L}\right)}_{\text{arm. fond.}} - \frac{1}{3^2}\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{3\pi t}{L}\right)}_{\text{III armonica}} + \frac{1}{5^2}\sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{5\pi t}{L}\right)}_{\text{V armonica}} + \dots\right\}$$

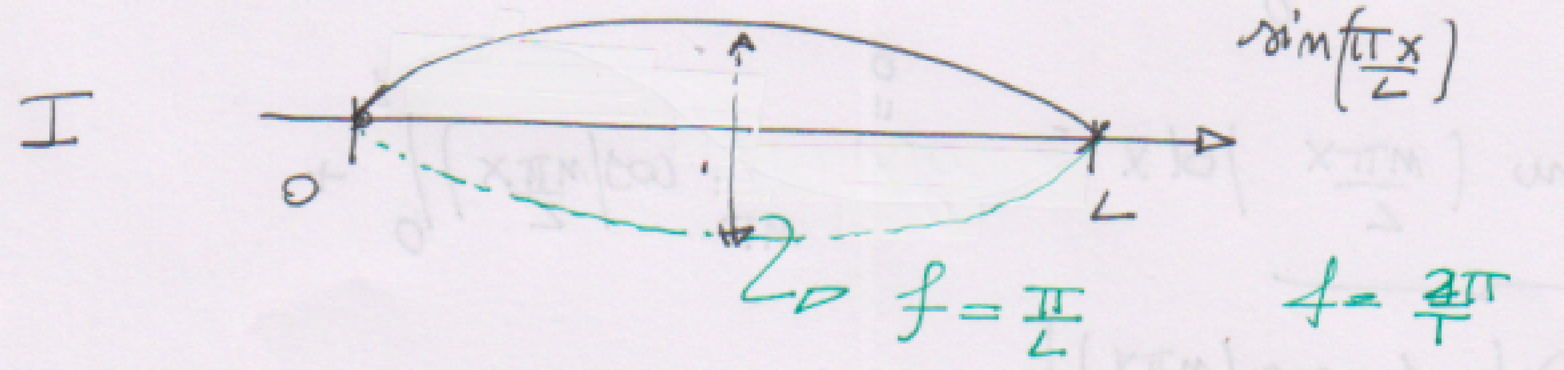
Andamento temporale

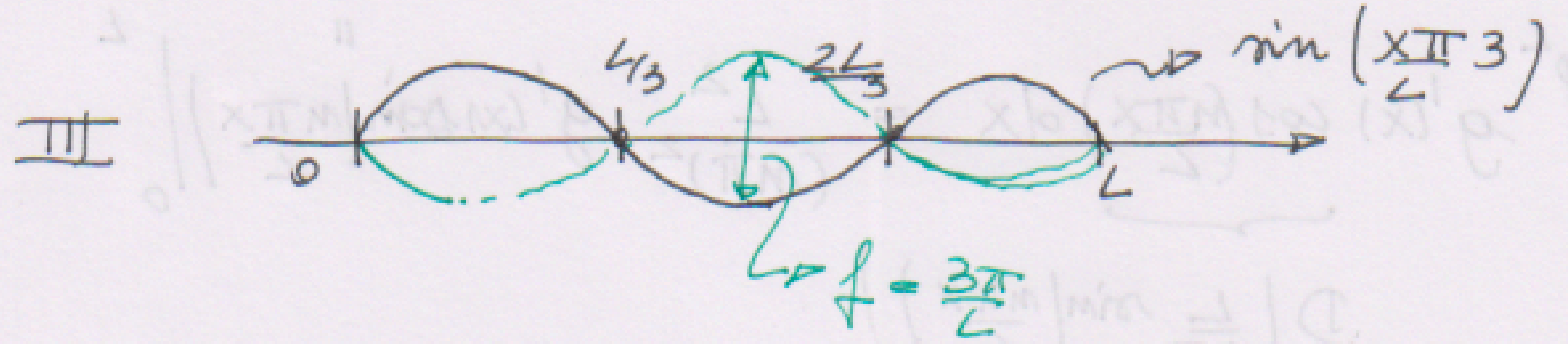




ampiezza $\frac{1}{9}$ risp. a I armonica

Ad ogni modo di oscillazione temporale corrisponde un modo di oscill. spaziale





Nota: convergenza della s.s. FOURIER caso corda pizzicata

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t)$$

$$u_n(x,t) = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$$

verif. che la serie u_n è assolutamente convergente

ovvero $\sum_{n=0}^{\infty}|u_n(x,t)|$ converge. Abbiamo.

$$|u_n(x,t)| \leq \frac{2}{L}\left|\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right|$$

ipotizziamo che g abbia derivate 2^e limitate

$$\int_0^L g(x)\underbrace{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{D\left(-\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)}dx = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{g(x)}}(-)\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\Big|_0^L +$$

$$+\frac{L}{n\pi}\int_0^L g'(x)\underbrace{\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{D\left(\frac{L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)}dx = \frac{L^2}{(n\pi)^2}g'(x)\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\sin}}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L$$

$$-\frac{L^2}{(n\pi)^2}\int_0^L g''(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

adesso $\left| \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| \leq \frac{L^2}{(n\pi)^2} \left| \int_0^L g''(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right|$

$$\leq \frac{L^2}{n^2\pi^2} \|g''\|_{L^\infty} L$$

quindi $|w_n| \leq \frac{2}{\pi^2} L^2 \|g''\|_{L^\infty} \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ convergente