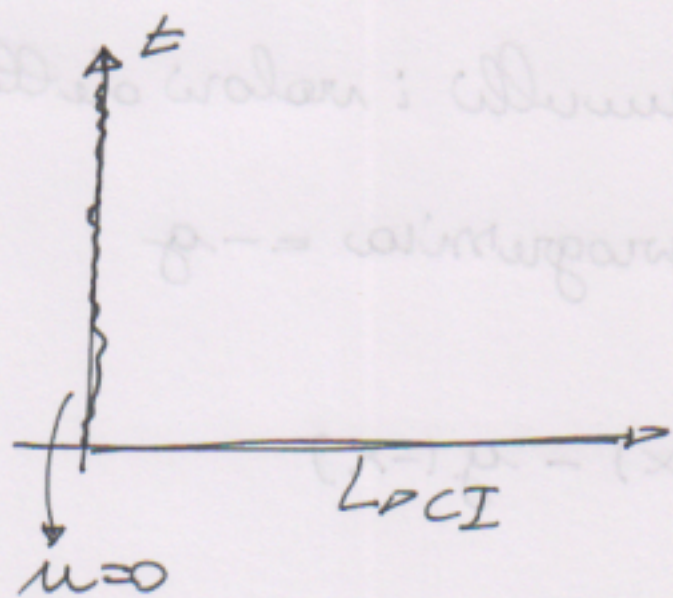


Equazioni alle onde in  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ : metodo della riflessione

Risolviamo il seguente sistema

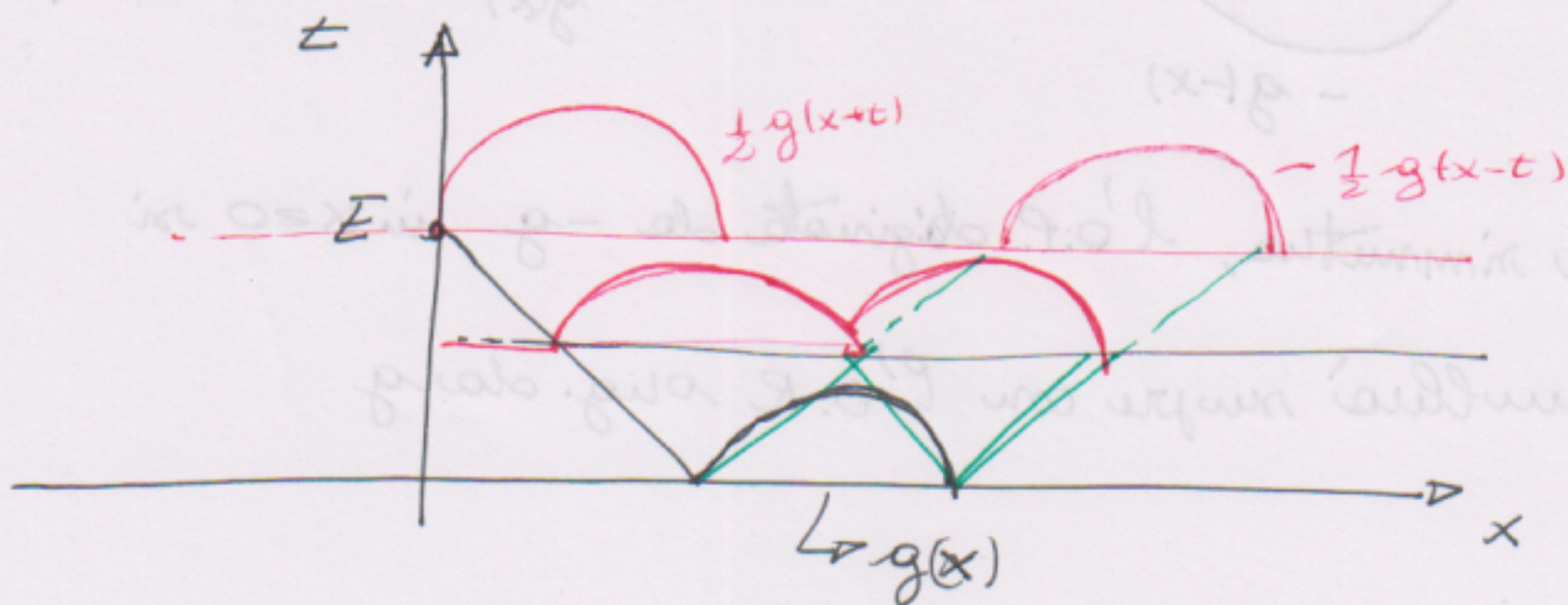
$$I \begin{cases} \partial_z^2 w - \partial_x^2 w = 0 & \mathbb{R}^+ \times (0, +\infty) \\ w = g \quad \partial_z w = h & \mathbb{R}^+ \times \{t=0\} \\ w = 0 & \text{in } \{x=0\} \times (0, +\infty) \end{cases}$$



Idea del metodo: prendiamo  $h=0$

La soluz. di d'Alembert (in  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ ) diventa

$$w = \frac{1}{2} (g(x+z) + g(x-z))$$

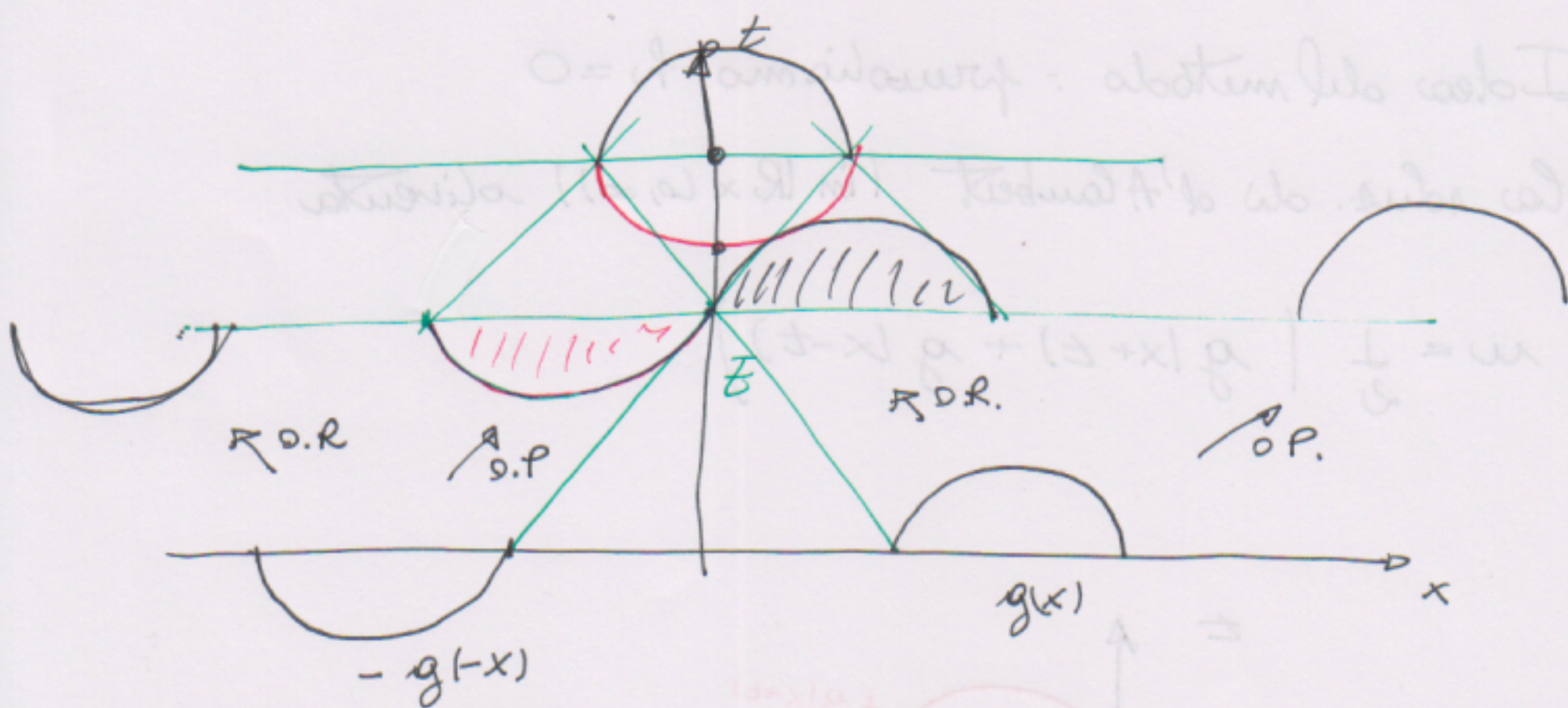


In questo caso particolare, fino al tempo  $T$ , la soluz. d'Alambert è anche soluz. del prob. I

Per tempi maggiori la soluzione d'Al. non può più essere accettata in quanto prevede un valore  $u(0,t) \neq 0$  contrario alle cond. al contorno. Come entrare il problema!

Si potrebbe inserire una c.i. diversa da zero per  $x < 0$  e tale che annulli i valori dell'onda regressiva in  $x=0 \Rightarrow$  onda progressiva  $= -g$

$$c.i \quad g'(x) = g(x) - g(-x)$$



Per simmetria, l'o.p. originata da  $-g$  in  $x \leq 0$  si annulla sopra con l'o.p. orig. da  $g$

Passiamo al caso generale. Le considerazioni preesposte suggeriscono di definire le seguenti funzioni

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ -g(-x) & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & x \geq 0 \\ -h(-x) & x \leq 0 \end{cases}$$

Nota; in principio  $h$  e  $g$  sono definite solo per  $x \geq 0$

Risolviamo l'eq. alle onde in  $\mathbb{R}$

$$\text{II} \begin{cases} \partial_t^2 \tilde{u} - \partial_x^2 \tilde{u} = 0 & \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ \tilde{u} = \tilde{g} & \partial_t \tilde{u} = \tilde{h} & \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{cases}$$

La soluzione di II è data dalla formula d'Alembert

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy$$

Valutiamo  $\tilde{u}$  lungo l'asse  $x=0$

$$\tilde{u}(0, t) = \frac{1}{2} [\tilde{g}(t) + \tilde{g}(-t)] + \frac{1}{2} \int_{-t}^t \tilde{h}(y) dy$$

$$t > 0 \Rightarrow \tilde{g}(t) = g(t) \quad \tilde{g}(-t) = -g(t)$$

$$\tilde{u}(0, t) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^t \tilde{h}(y) dy + \int_{-t}^0 \tilde{h}(y) dy \right] =$$

$$\tilde{u}(0, t) = \frac{1}{2} \int_0^t h(y) dy + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-t}^0 (-) h(-y) dy}_{\int_0^t h(y) dy} = 0$$

Se restringo la soluzione  $\tilde{u}(x, t)$  al semipiano  $x \geq 0$

$\tilde{u}$  fornisce una soluzione del prob. I

Verifichiamo le C.I. ( $x \geq 0$ )

$$\tilde{u}(x, 0) = \frac{1}{2} [\tilde{g}(x) + \tilde{g}(x)] = \tilde{g}(x) = g(x)$$

$$\partial_x \tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{g}'(x+t) - \tilde{g}'(x-t)] + \frac{1}{2} [\tilde{h}(x+t) + \tilde{h}(x-t)] \xrightarrow{t=0} \partial_x \tilde{u}(x, 0) = \tilde{h}(x) = h(x)$$

Quindi  $\tilde{u}$  soddisfa Eq. onole in  $\mathbb{R}^+ \times (0, \infty)$ , C.C. e C.I.

Conviene scrivere la soluzione di I in funzione

delle sole  $g(x)$  e  $h(x)$ ;

Abbiamo  $x \geq 0$   $t \geq 0$

Caso  $x \geq t \geq 0$   $x-t \geq 0$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= \frac{1}{2} [\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy \\ &= \frac{1}{2} [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int h(y) dy \end{aligned}$$

Caso  $0 \leq x \leq t$   $x-t \leq 0$

$$\tilde{w}(x, t) = \frac{1}{2} \left[ \tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t) \right] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy$$

$\begin{matrix} \text{"} & & \text{"} \\ g(x+t) & -g(t-x) & \end{matrix}$

$$= \frac{1}{2} \left[ g(x+t) - g(t-x) \right] + \frac{1}{2} \left[ \int_{x-t}^0 \tilde{h}(y) dy + \int_0^{x+t} \tilde{h}(y) dy \right]$$

$\begin{matrix} \text{"} & & \text{"} \\ -h(y) & & h(y) \end{matrix}$

$\int_0^{t-x} h(y) dy$

$$= \frac{1}{2} \left[ g(x+t) - g(t-x) \right] + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} h(y) dy$$

La soluz. di I è quindi

$$w(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy & 0 \leq t \leq x \\ \frac{1}{2} [g(x+t) - g(t-x)] + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} h(y) dy & 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

Esercizio - Piazzi-D'Alembert

E.F.D.

Soluzioni equazioni alle onde in  $\mathbb{R}^n$

Iniziamo con alcune definizioni

Definiamo

$$U(x, \pi, t) \doteq \int_{\partial B(x, \pi)} w(y, t) dS(y)$$

Notiamo come dalla conoscenza di  $U$  possiamo facilmente ricavare  $w$

$$\lim_{\pi \rightarrow 0} U(x, \pi, t) = \lim_{\pi \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \pi)} w(y, t) = w(x, t)$$

$w \in C^0$

Verifichiamo il seguente risultato

Sia  $w \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$  soluz. dell'eq. delle onde

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta_x w = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ w = g \quad \partial_t w = h & \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

Allora  $U(x, \pi, t)$  è soluzione di Eq.

**EULERO-BISSON-DARBOUX**

$$\begin{cases} \partial_t^2 U - \partial_x^2 U - \frac{n-1}{\pi} \partial_x U = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times (0, \infty) \\ U = G \quad \partial_t U = H & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \{t=0\} \end{cases}$$

EP-D

in cui in E-P-D  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  è fissato (angolo di parametro)

$$e \quad H(x, \pi) = \int_{\partial B(x, \pi)} h(y) dS(y)$$

$$G(x, \pi) = \int_{\partial B(x, \pi)} g(y) dS(y)$$

NOTA del Eq. vuole a E-P-D siamo partiti dal un' eq.

PDE in  $\mathbb{R}^{m+1}$  a  $\mathbb{R}^2$ . Risolvendo E-P-D per la  $U$

ricaviamo  $w(x, t)$

Deriviamo Eq. E-P-D

$$\text{calcoliamo } \frac{\partial}{\partial \pi} U(x, \pi, t) = \frac{\partial}{\partial \pi} \int_{\partial B(x, \pi)} w(\bar{y}, t) dS(y)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \pi} \frac{1}{|\partial B(x, \pi)|} \int_{\partial B(x, \pi)} w(y, t) dS(y) \quad z = \frac{y-x}{\pi}$$

$$dS(z) = \frac{dS(y)}{\pi^{m-1}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \pi} \frac{1}{\pi^{m-1} m \alpha(m)} \int_{\partial B(0, 1)} w(\pi \bar{z} + \bar{x}) \pi^{m-1} dS(z)$$

$$= \frac{1}{m \alpha(m)} \int_{\partial B(0, 1)} \frac{\partial}{\partial \pi} w(\bar{x} + \pi \bar{z}) dS(\bar{z}) = \frac{1}{m \alpha(m)} \int_{\partial B(0, 1)} \bar{\nabla}_x w \cdot \bar{z} dS(z)$$

(z = x + \pi \bar{z})

$$\partial_\pi U(x, \pi, t) = \frac{1}{\pi^{m-1} m \alpha(m)} \int_{\partial B(x, \pi)} \nabla_x w(y) \cdot \frac{y-x}{\pi} dS(y)$$

$\nabla$   
 normale uscente  
 alla palla  $B(x, \pi)$

th. div.

$$= \frac{1}{\pi^{m-1} m \alpha(m)} \int_{B(x, \pi)} \Delta w dV(y) = \frac{\pi}{m} \int_{B(x, \pi)} \Delta w dV(y)$$

Utilizziamo che  $w$  è sol Eq. onde

$$\partial_\pi U(x, \pi, t) = \frac{1}{\pi^{m-1} m \alpha(m)} \int_{B(x, \pi)} \partial_\xi^2 w dV(y)$$

Quindi

$$\pi^{m-1} \partial_\pi U = \frac{1}{m \alpha(m)} \int_{B(x, \pi)} \partial_\xi^2 w dV(y)$$

Deriviamo rispetto a  $\pi$

$$\frac{\partial}{\partial \pi} (\pi^{m-1} \partial_\pi U) = \frac{1}{m \alpha(m)} \frac{\partial}{\partial \pi} \int_{B(x, \pi)} \partial_\xi^2 w dV(y)$$

Formula coarea

$$= \frac{1}{m \alpha(m)} \frac{\partial}{\partial \pi} \int_0^\pi d\rho \left( \int_{\partial B(x, \rho)} \partial_\xi^2 w dS(y) \right) = \frac{1}{m \alpha(m)} \int_{\partial B(x, \pi)} \partial_\xi^2 w dS(y)$$



$$\frac{\partial}{\partial \pi} \left( \pi^{m-1} \partial_{\pi} U \right) = \frac{1}{m \alpha(m)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{\partial B(x, \pi)} w \, dS(y)$$

$$\pi^{m-1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{\partial B(x, \pi)} w \, dS(y) = \pi^{m-1} \partial_z^2 U$$

Quindi  $(m-1) \pi^{m-2} \partial_{\pi} U + \pi^{m-1} \partial_{\pi}^2 U = \pi^{m-1} \partial_z^2 U$

Soluzioni Eq. E-P-D con  $n=3$

$$\begin{cases} \partial_z^2 U - \partial_{\pi}^2 U - \frac{2}{\pi} \partial_{\pi} U = 0 & \mathbb{R}^+ \times (0, \infty) \\ U = G & \partial_z U = H & \mathbb{R}^+ \times \{t=0\} \end{cases}$$

Definiamo  $\bar{U} = \pi U$  e analog.  $\bar{G} = \pi G, \bar{H} = \pi H$

$$\begin{aligned} \text{calcoliamo } \partial_z^2 \bar{U} &= \pi \partial_z^2 U = \pi \left( \partial_{\pi}^2 U + \frac{2}{\pi} \partial_{\pi} U \right) = \\ &= \pi \partial_{\pi}^2 U + 2 \partial_{\pi} U = \frac{\partial}{\partial \pi} \left( U + \pi \partial_{\pi} U \right) \end{aligned}$$

Notiamo  $\partial_{\pi} \bar{U} = U + \pi \partial_{\pi} U$

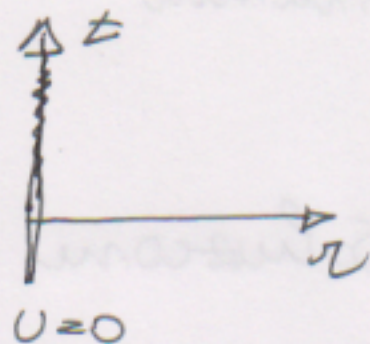
$$\partial_z^2 \bar{U} = \partial_{\pi}^2 \bar{U} \quad \text{eq. snole in } \mathbb{R}^+ \times (0, \infty)$$

Per costruzione abbiamo  $\lim_{\pi \rightarrow 0} \bar{U}(x, \pi, t) =$

$$= \lim_{\pi \rightarrow 0} \pi \underbrace{U(x, \pi, t)}_{\substack{\downarrow \pi \rightarrow 0 \\ u(x, t) \text{ regolare}}} = 0$$

Quindi abbiamo che  $\bar{U}$  è soluz. dell'eq.

$$\begin{cases} \partial_t^2 \bar{U} - \partial_x^2 \bar{U} = 0 & \mathbb{R}^+ \times (0, \infty) \\ \bar{U} = \bar{G} & \partial_t \bar{U} = H & \mathbb{R}^+ \times \{t=0\} \\ \bar{U} = 0 & & \{x=0\} \times (0, \infty) \end{cases}$$



Abbiamo già risolto l'equazione. Poiché siamo interessati

a  $w(x, t) = \lim_{\pi \rightarrow 0} U(x, \pi, t)$ , possiamo  $\forall p$   $0 \leq x \leq t$

nella formula risoltrice

$$\bar{U}(x, \pi, t) = \frac{1}{2} [\bar{G}(\pi+t) - \bar{G}(t-x)] + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} H(y) dy$$

$$\text{in cui } \bar{G}(\pi) = \pi G(\pi) = \pi \int_{\partial B(x, \pi)} g(y) ds(y)$$

$\hookrightarrow x$  è un parametro fisso

$$\text{Ritroviamo } w(x, t) = \lim_{\pi \rightarrow 0} U(x, \pi, t) = \lim_{\pi \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \bar{U}(x, \pi, t)$$

$$\lim_{\pi \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \bar{U}(x, \pi, t) = \lim_{\pi \rightarrow 0} \frac{\bar{G}(\pi+t) - \bar{G}(t-\pi)}{2\pi}$$

$$+ \lim_{\pi \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \bar{H}(y) dy$$

$\bar{H}(t)$

$\frac{\partial \bar{G}(t)}{\partial t}$

$$w(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) \right) + t \int_{\partial B(x, t)} h(y) dS(y)$$

$$= \int_{\partial B(x, t)} (g(y) + t h(y)) dS(y) + t \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y)}_{I}$$

$$I = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi} \frac{t^2}{t^2} \int_{\partial B(0, 1)} g(tz+x) dS_z$$

$z = \frac{y-x}{t}$

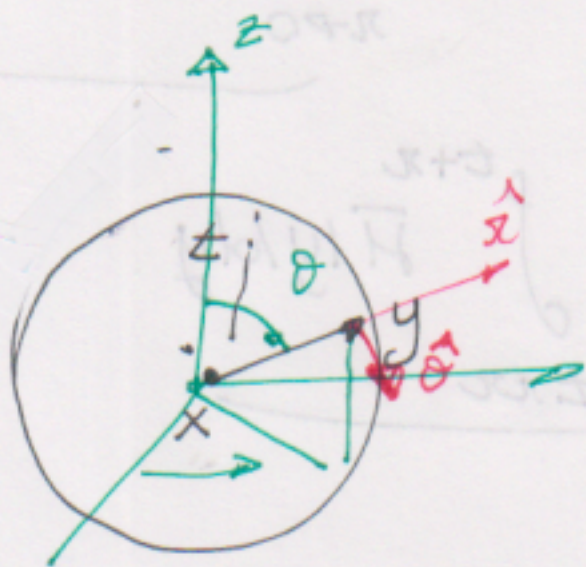
$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(0, 1)} \nabla g \Big|_{tz+x} \cdot \vec{z} dS(z) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(x, t)} \nabla g \cdot \frac{|y-x|}{t} dS(y)$$

$$tI = \int_{\partial B(x, t)} \nabla g \cdot \frac{|y-x|}{t} dS(y)$$

Otteniamo le formule di Kirchhoff

$$w(x, t) = \int_{\partial B(x, t)} \left( g(\bar{y}) + t h(\bar{y}) + \nabla g \cdot (\bar{y} - \bar{x}) \right) dS(\bar{y})$$

Scriviamo la formula in coord sferiche



grad. in coord. sferiche  $\nabla g = (\hat{i} \partial_x + \hat{j} \partial_y + \hat{k} \partial_z) g =$

$$\frac{\partial g}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$$

$$\vec{y} - \vec{x} = \vec{r} \quad \text{con } |\vec{r}| = r$$

$$\nabla g \cdot (\vec{y} - \vec{x}) = \frac{\partial g}{\partial r} \hat{r} \cdot \hat{r} \cdot r = r \frac{\partial g}{\partial r}$$

Otteniamo

$$w(x, z) = \frac{1}{4\pi z^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left| g + z h + z \frac{\partial g}{\partial r} \right| z^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

$ds(y)$

# Formula cambio di variabili in integrali

$$\int_{\varphi(U)} f(x) dS(x) = \int_U f(\varphi(x)) |J| dS(x)$$

$$\downarrow$$

$$\sqrt{\det(JJ^T)} \quad ; \quad J = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}}$$

$$\int_{B^3(0,r)} f(x) dS = \int_{\varphi^+(B^1)} f(x) dS + \int_{\varphi^-(B^2)} f(x) dS$$

||

$$\varphi^+(B^2(0,r)) \cup \varphi^-(B^2(0,r))$$

$$\int_{\varphi^+(B^2)} f(x) dS = \int_{B^2(0,r)} f(\varphi^+(x,y)) |J| dx dy$$

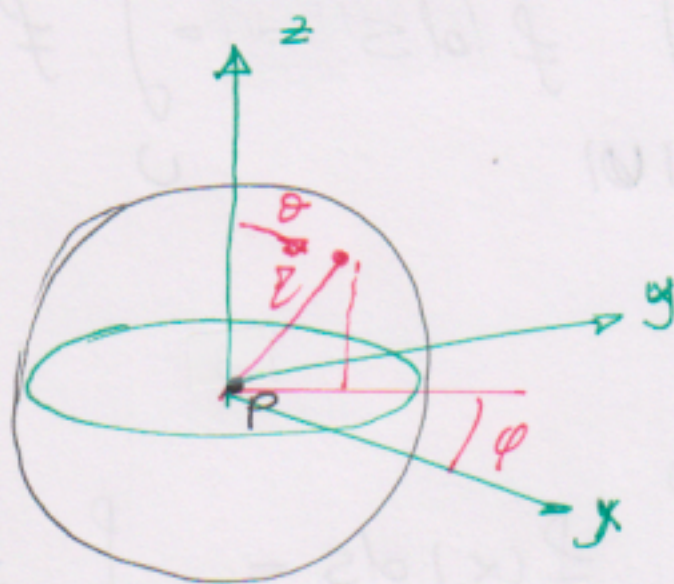
$$J = \frac{\partial(\varphi_x^+, \varphi_y^+, \varphi_z^+)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_x^+}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_y^+}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_z^+}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_x^+}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_y^+}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_z^+}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial z^+}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z^+}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{con } z^+ = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

$$JJ^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial z^+}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z^+}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial z^+}{\partial x} & \frac{\partial z^+}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial z^+}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial z^+}{\partial x} \frac{\partial z^+}{\partial y} \\ \frac{\partial z^+}{\partial x} \frac{\partial z^+}{\partial y} & 1 + \left(\frac{\partial z^+}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo la formula per il calcolo di un integrale di una funzione sulla surf. di una sfera in  $\mathbb{R}^3$ , in coordinate cartesiane

$$\int_{\partial B(0, r)} f(x, y, z) dS$$



$$\partial B(0, r) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \right\}$$

Descriviamo la surf. sferica come il grafico di una funzione  $(x, y) \rightarrow (x, y, z)$

$$z = \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

$$\partial B(0, r) = \partial^+ B(0, r) \cup \partial^- B(0, r)$$

$$\partial^+ B(0, r) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{(x, y) \in B^2(0, r)}_{x^2 + y^2 \leq r^2}, z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \right\}$$

Possiamo definire  $\varphi^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \varphi^+(x, y) = \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \end{pmatrix}$

Abbiamo  $\varphi^+(B^2(0, r)) = \partial^+ B^3(0, r)$

analogamente  $\varphi^-(B^2(0, r)) = \partial^- B^3(0, r)$

$\hookrightarrow$  rad. negativa di  $z$

$$\det(JJ^T) = \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

$$= 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + |\nabla \varphi^+|^2$$

otteniamo

$$\int_{B^2(\omega, r)} f(\varphi^+(x, y)) |J| dx dy = \int_{B^2(\omega, r)} f(x, y, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

In conclusione

$$\int_{\partial B^3(\omega, r)} f(x, y, z) dS = \int_{B^2(\omega, r)} \left( f(x, y, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}) + f(x, y, -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}) \right) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

Risolviamo la formula traslando il centro della

sfera. Usiamo la notazione  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$$\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$$

prendiamo  $\bar{x} = (x_1, x_2, 0)$

\*1

$$\int_{\partial B^3(\bar{x}, r)} f(y_1, y_2, y_3) dS(\bar{y}) = \int_{B^2(x_1, x_2), r} \left( f(y_1, y_2, z) + f(y_1, y_2, -z) \right) \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial y_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y_2} \right)^2} dy_1 dy_2$$

$$\text{with } z = \sqrt{r^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_1} = \frac{-1 \cdot 2(x_1 - y_1)}{2 \sqrt{r^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}} = \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{r^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_2} = \frac{x_2 - y_2}{\sqrt{r^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}}$$

$$1 + \left( \frac{\partial z}{\partial y_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y_2} \right)^2 = 1 + \frac{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}{r^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2} =$$

$$= \frac{r^2}{r^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}$$

$$\sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial y_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y_2} \right)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}}$$



Utilizziamo questo calcolo per ottenere la soluz. dell'equazione delle onde in dimensione 2

$$(1) \begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ w = g, \quad \partial_t w = h & \text{in } \mathbb{R}^2 \times \{t=0\} \end{cases}$$

dove  $w = w(x_1, x_2, t)$

definiamo  $\bar{w} = \bar{w}(x_1, x_2, x_3, t) \doteq w(x_1, x_2, t)$

$$\bar{g}(x_1, x_2, x_3, t) \doteq g(x_1, x_2, t)$$

$$\bar{h}(x_1, x_2, x_3, t) = h(x_1, x_2, t)$$

Ho introdotto una dipendenza fittizia dalle variabili  $x_3$

formalmente  $\bar{w}: \mathbb{R}^{3+1} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\partial_{x_3} \bar{w} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)}_{\Delta_{x_1, x_2}} w = (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) \bar{w} = (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2) \bar{w} = \Delta_{x_1, x_2, x_3} \bar{w}$$

$$\partial_t w = \partial_t \bar{w}$$

Quindi  $\bar{w}$  è soluzione di un'eq. onde in  $\mathbb{R}^{3+1}$

con c. I. che non dipendono dalla 3<sup>a</sup> variabile

spaziale

$$\begin{cases} \partial_t^2 \bar{u} - \Delta \bar{u} = 0 & \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ \bar{u} = \bar{g} & \partial_t \bar{u} = \bar{h} & \mathbb{R}^3 \times \{t=0\} \end{cases}$$

La formula di Kirchhoff fornisce la soluzione  $\bar{u}$

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \int_{\partial B^3(\bar{x}, t)} (t \bar{h}(y) + \bar{g}(y) + \nabla \bar{g}(y-x)) dS(y)$$

Poiché  $\bar{u}$  non dipende da  $x_3$  possiamo porre  $x_3 = 0$

$$u(x_1, x_2, t) = \bar{u}(x_1, x_2, 0, t) =$$

$$\int_{\partial B^3(x_1, x_2, 0), t} \left( t \bar{h}(y_1, y_2) + \bar{g}(y_1, y_2) + \frac{\partial}{\partial y_1} \bar{g}(y_1, -x_1) + \frac{\partial}{\partial y_2} \bar{g}(y_2, -x_2) \right) dS(y)$$

integrati lungo la sup. di una sfera in  $\mathbb{R}^3$  di una funzione che dep. solo dalle prime 2 variabili

o in integrali della forma

$$\frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B^3(x_1, x_2, 0), t} f(y_1, y_2) dS(y) = *^1$$

$$= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{B^2((x_1, x_2), t)} f(y_1, y_2) \frac{t}{\sqrt{t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}} dy_1 dy_2$$

$$= \frac{1}{2} \int_{B^2((x_1, x_2), t)} f(y_1, y_2) \frac{t}{\sqrt{t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}} dy_1 dy_2$$

Otteniamo la formula di Poisson per la soluzione

del problema alle onde in dimensione 2

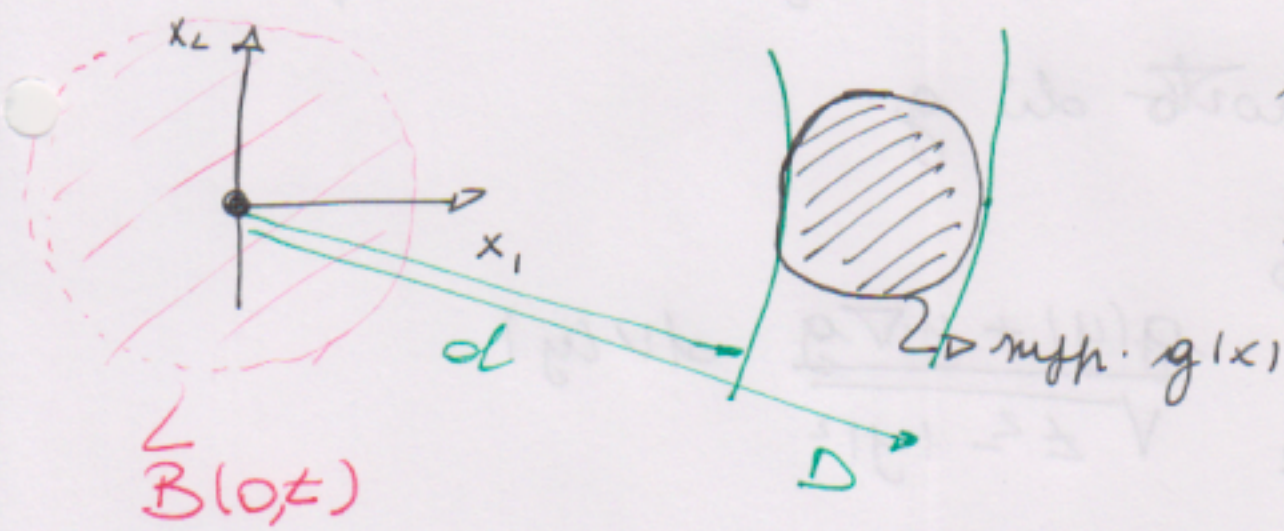
$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2} \int_{B^2((x_1, x_2), t)} \frac{t^2 h + t g + t \left( \frac{\partial g}{\partial y_1} |y_1 - x_1| + \frac{\partial g}{\partial y_2} |y_2 - x_2| \right)}{\sqrt{t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}} dy_1 dy_2$$

in notazione compatta  $\bar{x} = (x_1, x_2)$   $\bar{y} = (y_1, y_2)$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B(x, t)} \frac{t^2 h(y) + t g(y) + t \nabla_y g \cdot (y - x)}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}} dV(y)$$

Interpretazione della soluzione: proprietà di onde  
 che si propagano nel piano  
 consideriamo il caso  $h=0$  e  $g(x)$  a supporto compatto

$$w(\bar{x}, t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi t^2} \int_{B(x, t)} \frac{g(|y|) + (y-x) \cdot \nabla g}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} dV(y)$$



$d$  = dist min sup.  $g$  da orig.

$D$  = dist max sup.  $g$  da orig.

$w(x, 0) = g(x) \rightarrow$  ex. uguali di pressione sulla sup.

di un fluido

$g(x)$  rappresenta una perturb. in pressione

di un mezzo elastico a  $t=0$

Analizziamo il comportamento del segnale di pressione in  $x=0$

(posizione in mezzo in  $x=0$ )

per  $t=0$  non rilevo alcun segnale  $w(0, 0) = 0$

$$g(0) = 0$$

Al crescere di  $t$  il dominio di integrat. aumenta

ma finché  $t < d$   $w(0, t) = 0$   $\text{supp } g \cap B(0, t) = \emptyset$

per  $t > d$   $w(0, t) \neq 0$

$$w(0, t) = \frac{1}{2\pi t} \int_{B(0, t)} \frac{g(y) + y \cdot \nabla g}{\sqrt{t^2 - |y|^2}} dV(y).$$

Per  $t > D$  il dominio di integrazione comprende tutto il supporto di  $g$

$$w(0, t) = \frac{1}{2\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{g(y) + y \cdot \nabla g}{\sqrt{t^2 - |y|^2}} dV(y)$$

per  $t \gg D$

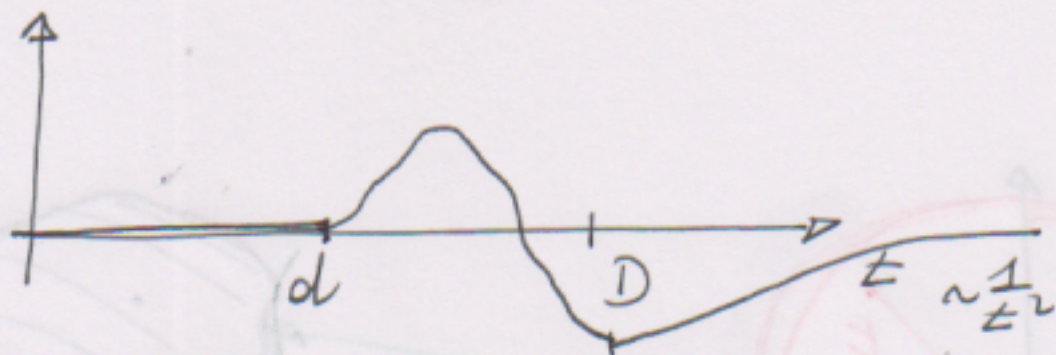
$$\frac{1}{\sqrt{t^2 - |y|^2}} = \frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{|y|}{t}\right)^2}} \xrightarrow{|y| < D} \frac{1}{t}$$

$$w(0, t) \underset{t \gg D}{\sim} \frac{1}{2\pi t^2} \int_{\mathbb{R}^2} (g(y) + y \cdot \nabla g) dV(y) =$$

$$\frac{1}{2\pi t^2} \int_{\mathbb{R}^2} (g(y) - g \vec{\nabla} \cdot \vec{y}) = -\frac{1}{2\pi t^2} \int_{\mathbb{R}^2} g(y) \sum_i \frac{\partial y_i}{\partial y_i} = 2$$

Il segnale rilevato in  $x=0$  ha il seguente comportamento

$$u(x, t) = \nu$$



al radd. il tempo necessario affinché il segnale si trasmetta fino all'origine: il segnale si propaga

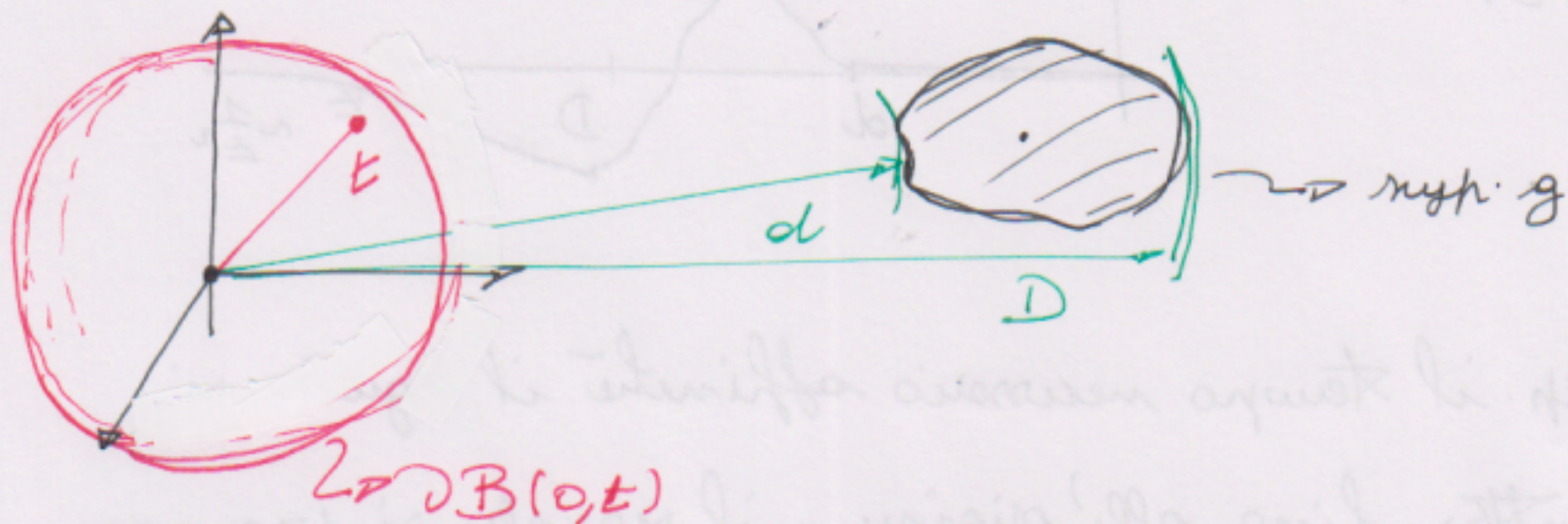
con velocità  $v = \frac{d}{t} = 1$

Dopo che il fronte d'onda è passato  $D$  è il tempo necessario affinché la perturb. più lontana dall'origine giunga in origine) il segnale decade come  $\frac{1}{t^2}$



The signal is propagated along the x-axis with velocity  $v = 1$ . The time  $D$  is the time needed for the signal to reach the origin.

caso  $n=3$   $h=0$   $g(x,y,z) \neq 0$



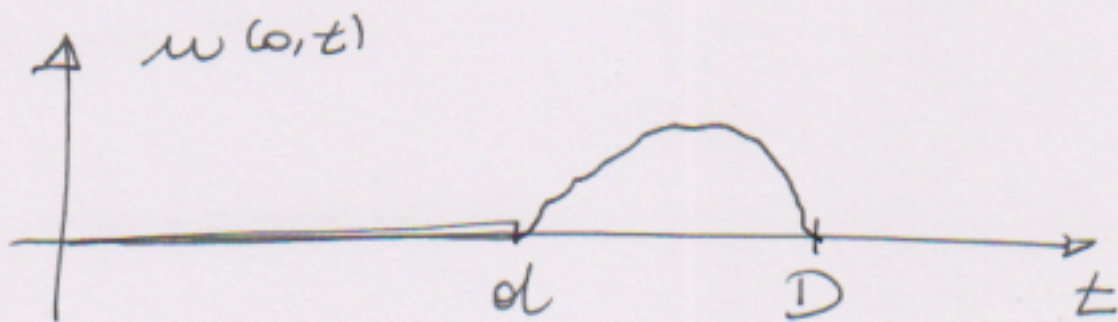
$$w(0,t) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(0,t)} (g(y) + \vec{\nabla} g \cdot \vec{y}) dS(y)$$

$$w(0,0) = g(0) = 0$$

$$\text{Per } t < d \quad \text{supp } g \cap \partial B(0,t) = \emptyset \Rightarrow w(0,t) = 0$$

$$\text{per } d < t < D \quad w(0,t) \neq 0$$

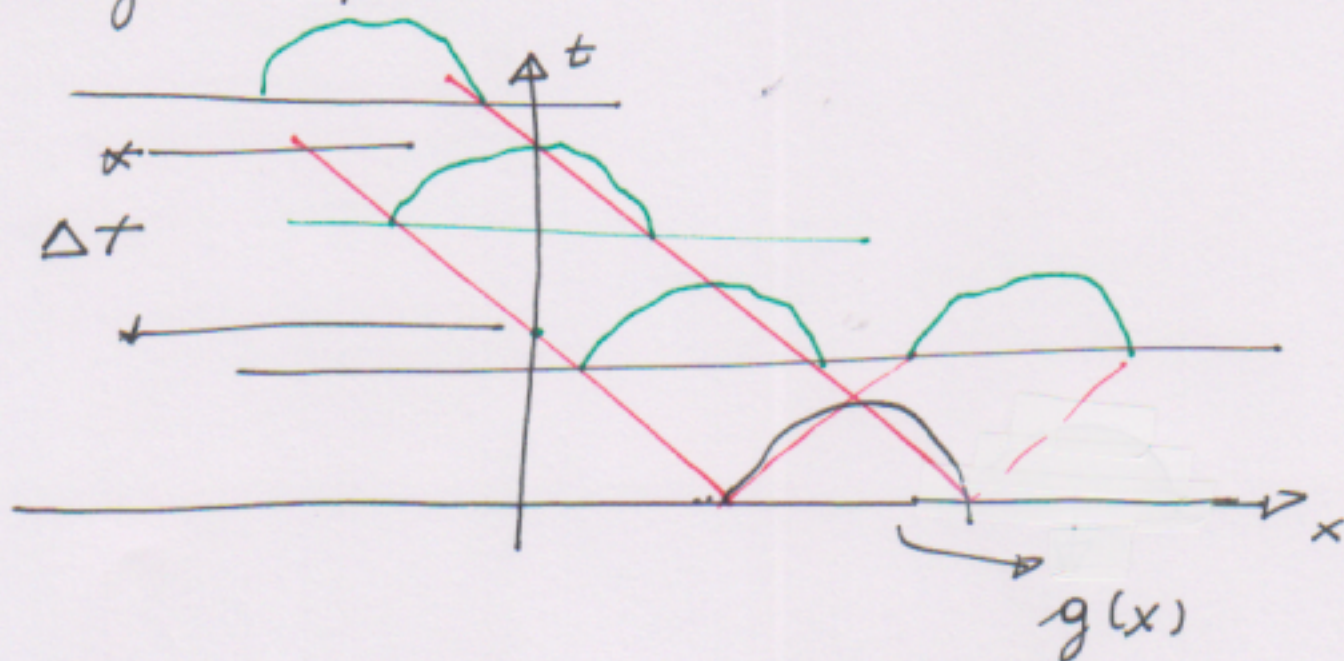
$$\text{per } t > D \quad \text{supp } g \cap \partial B(0,t) = \emptyset \Rightarrow w(0,t) = 0$$



Il segnale si propaga dalla sorgente all'origine con  $v=1$  dopo che il segnale che è partito da  $D$

giunge nel rivelatore, non si misura altro segnale.

Analogo a quanto avviene in IR



Solo durante l'intervallo  $\Delta t$  si può ricevere un segnale