Compito Fisica 1 ETL 17/6/2020

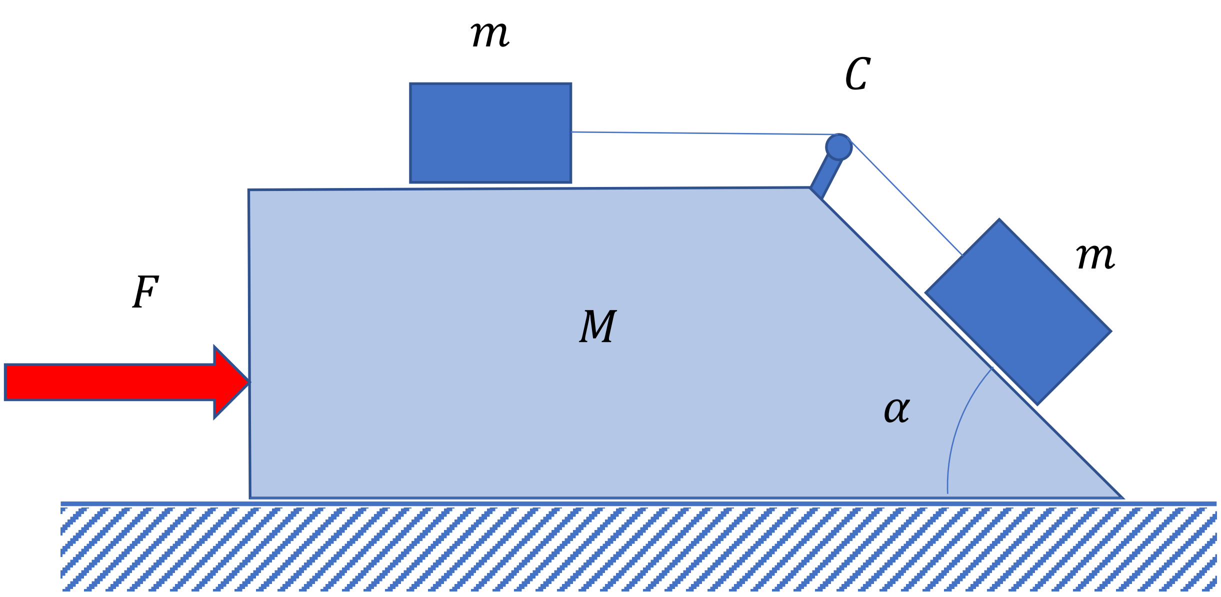
Franco Bagnoli

Esercizio 1 (12 pt)

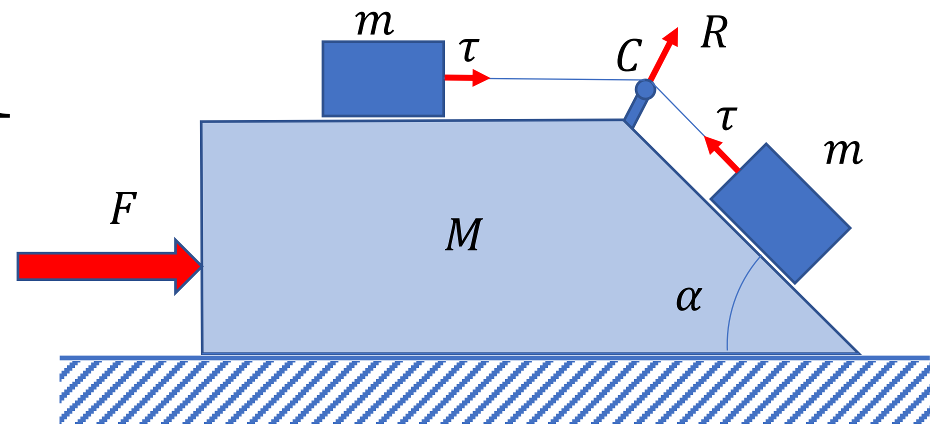
Su un blocco di massa M a forma di trapezio vengono posti due blocchetti di massa m, collegati tra loro da una fune inestensibile e di massa trascurabile, che passa in una carrucola C, sempre di massa trascurabile.

Una massa sta sul lato superiore (orizzontale), l'altra sta sul lato inclinato (angolo α rispetto all'orizzontale.

Non ci sono attriti. Il trapezio viene spinto da una forza F orizzontale costante.



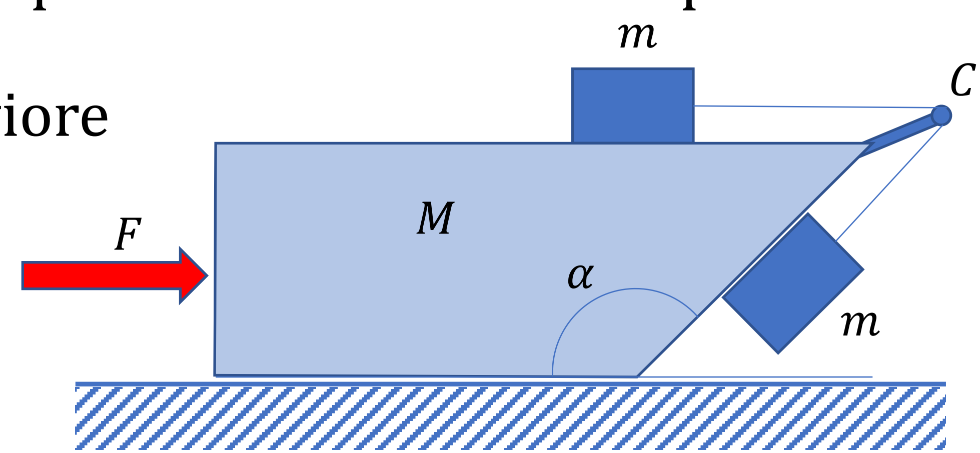
Domande esercizio 1



1) Sapendo che la forza F è tale che i i blocchi m rimangano fermi rispetto al trapezio M, quanto vale l'accelerazione a del sistema? E la tensione τ della corda?

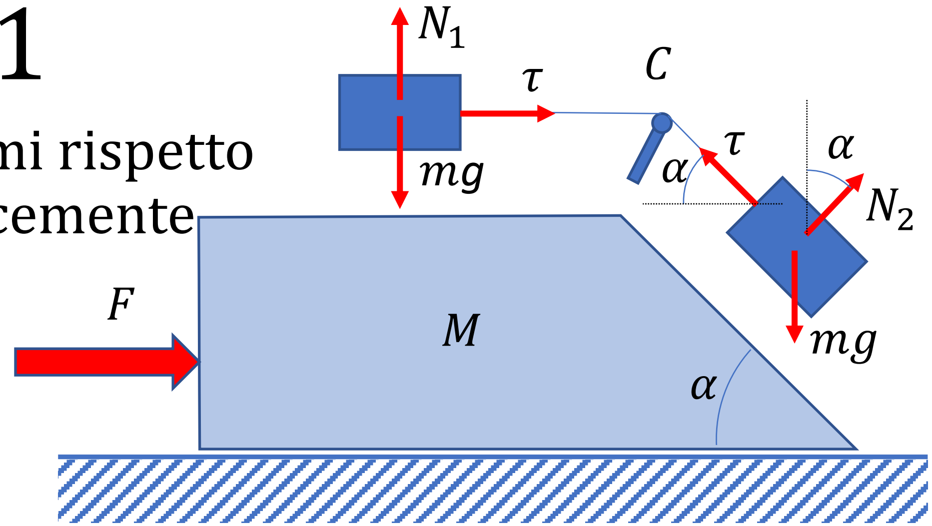
2) Quanto vale il modulo della reazione vincolare R sulla carrucola C?

3) Determinare l'intensità di F perché i blocchi non si spostino rispetto al trapezio M.
Può l'angolo α essere maggiore di $\frac{\pi}{2}$ (come nella figura qui a lato)?
Ci sono valori proibiti di α?



Traccia: Per i punti 1 e 2 non occorre sapere il valore di F. Per il punto 3 basta scrivere il bilancio delle forze ($f = ma$) per i 3 corpi.

Soluzione esercizio 1



1) Dato che i blocchetti m sono fermi rispetto ad M, l'accelerazione a è semplicemente

$$a = \frac{F}{M + 2m} .$$

La tensione τ sulla corda è la forza che accelera il blocco m sulla parte superiore, quindi

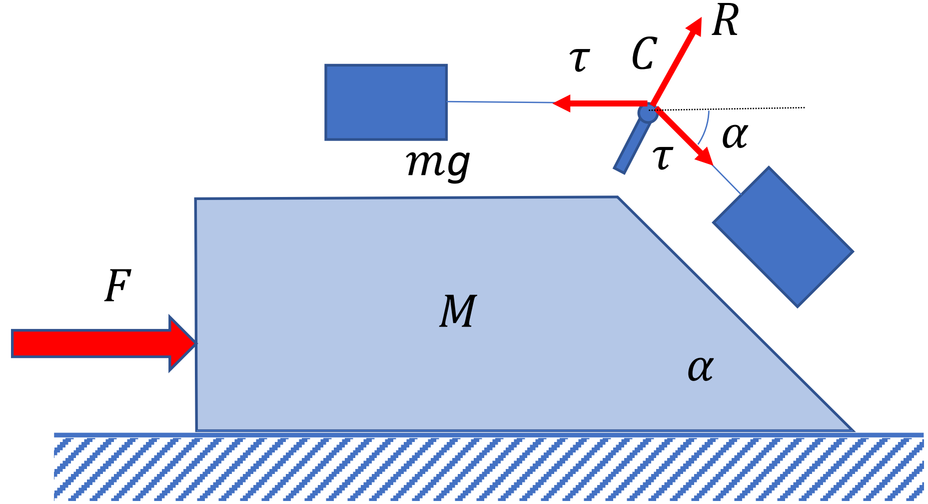
$$\tau = ma = \frac{mF}{M + 2m}.$$

2) Per calcolare la reazione R conviene scriverla in componenti

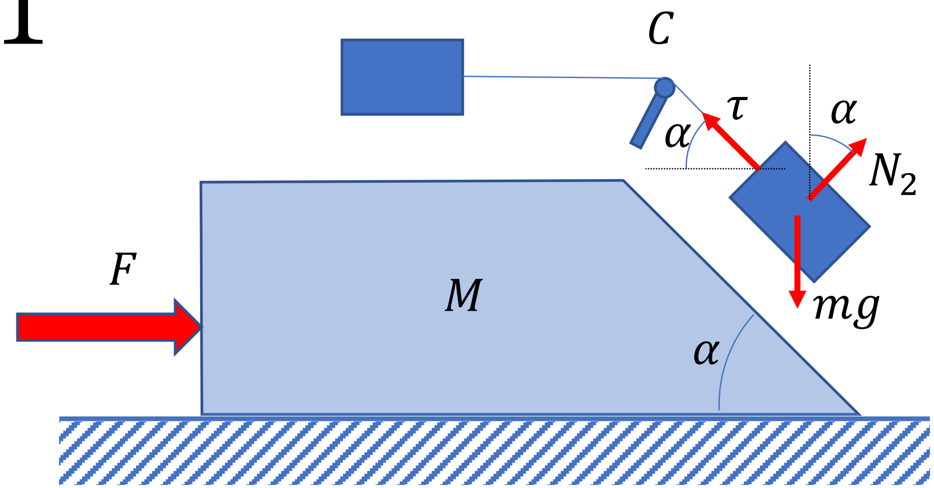
$$R_x = \tau - \tau\cos(\alpha)$$
$$R_y = \tau\sin(\alpha)$$

Quindi

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \tau\sqrt{2(1 - \cos(\alpha))}$$
$$= \frac{mF}{M + 2m}\sqrt{2(1 - \cos(\alpha))} .$$



Soluzione esercizio 1



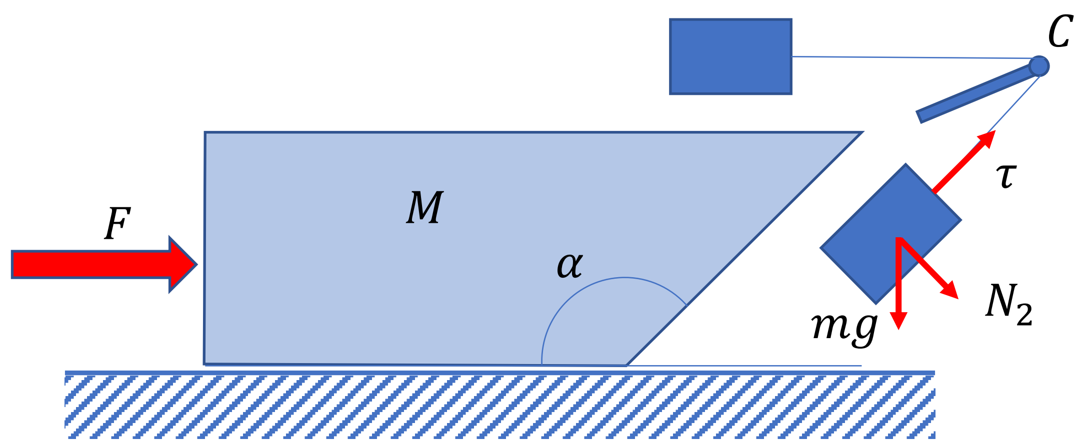
3) Per quanto riguarda il lato inclinato abbiamo

$$N_2 \sin(\alpha) - \tau \cos(\alpha) = ma$$
$$N_2 \cos(\alpha) + \tau \sin(\alpha) = mg$$

quindi, eliminando N_2 e inserendo $\tau = ma$ si ha

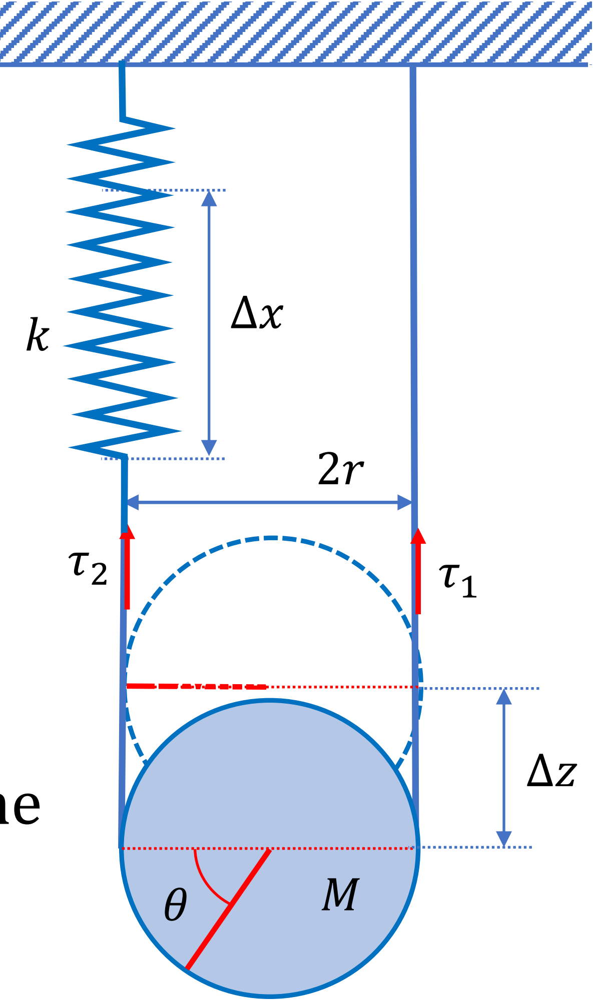
$$a = \frac{g \sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} \quad \text{da cui} \quad F = (M + 2m)\frac{g \sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

Come si vede, tutti i valori di $\alpha < \pi$ sono possibili, ovviamente se $\alpha > \frac{\pi}{2}$ la reazione N_2 spinge verso il basso, ma è tutto compreso in $N_2 \cos(\alpha)$.



Esercizio 2 (12 pt)

Attorno ad un disco di massa M è avvolta una fune inestensibile di massa trascurabile.
Un estremo della fune è fisso al soffitto mentre l'altro è collegato ad un molla di costante elastica k, a sua volta collegata al soffitto.



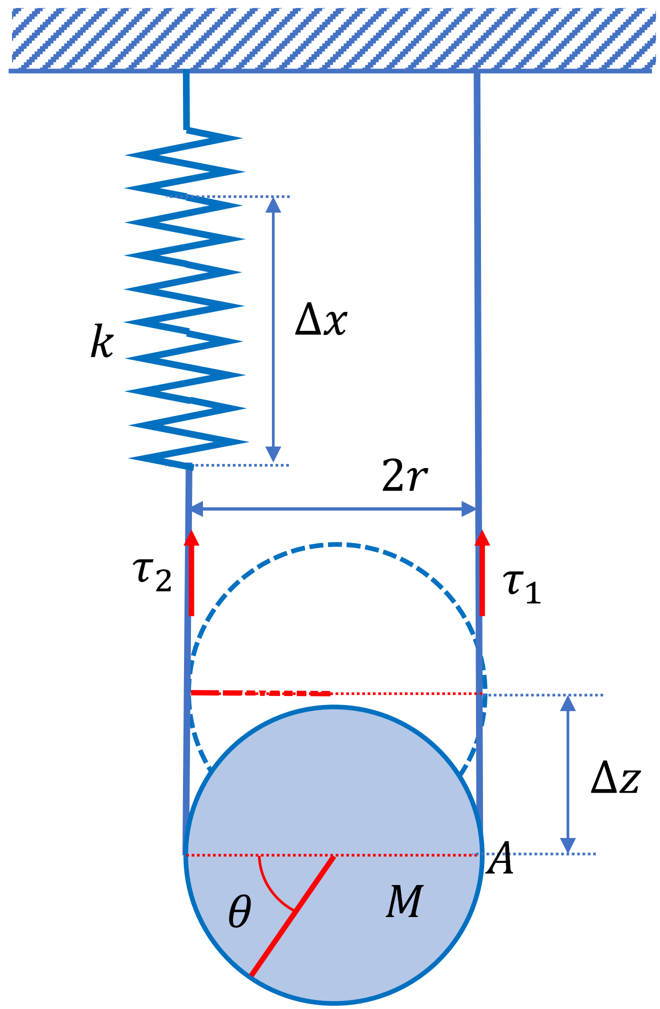
1) Trovare l'allungamento Δx_{eq} della molla nella posizione di equilibrio.

2) Si riporta la molla nella posizione di riposo e si lascia andare il sistema. Scrivere l'equazione di moto per l'angolo di rotazione θ del disco (moto armonico). Trovare il periodo T.

3) Determinare, durante il moto, la tensione τ_1 della corda con estremo fisso e la tensione τ_2 della corda collegata alla molla.

Traccia: Per prima cosa determinare la relazione tra θ, Δz e Δx (il disco "rotola" sulla corda fissa), poi usare (al solito) la seconda cardinale o l'energia. La prima cardinale serve solo per le reazioni.

Soluzione esercizio 2



1) Dalla seconda cardinale con polo in A si ottiene

$$Mgr - 2rk\Delta x_{\mathrm{eq}} = 0$$

da cui

$$\Delta x_{\mathrm{eq}} = \frac{Mg}{2k}.$$

2) Sempre dalla seconda cardinale con polo in A, si ha

$$I_A\ddot{\theta} = Mgr - 2rk\Delta x$$

con $\Delta x = 2\Delta z = 2\theta r$ (θ misurato dalla posizione in cui la molla è a riposo) e $I_A = \frac{3}{2}Mr^2$, quindi

$$\frac{3}{2}Mr^2\ddot{\theta} = -4kr^2\theta + Mgr$$

Si tratta quindi di un moto armonico di periodo $T = \pi\sqrt{\frac{3M}{2k}}$ e ampiezza θ_0, con $2\theta_0 r = \Delta x_{\mathrm{eq}} = \frac{Mg}{2k}$, quindi $\theta(t) = -\frac{Mg}{4kr}\cos\left(\sqrt{\frac{8k}{3M}}\,t\right)$.

Soluzione esercizio 2

3) Ovviamente

$$\tau_2 = k\Delta x = Mg - \frac{I_A\ddot{\theta}}{2r}$$

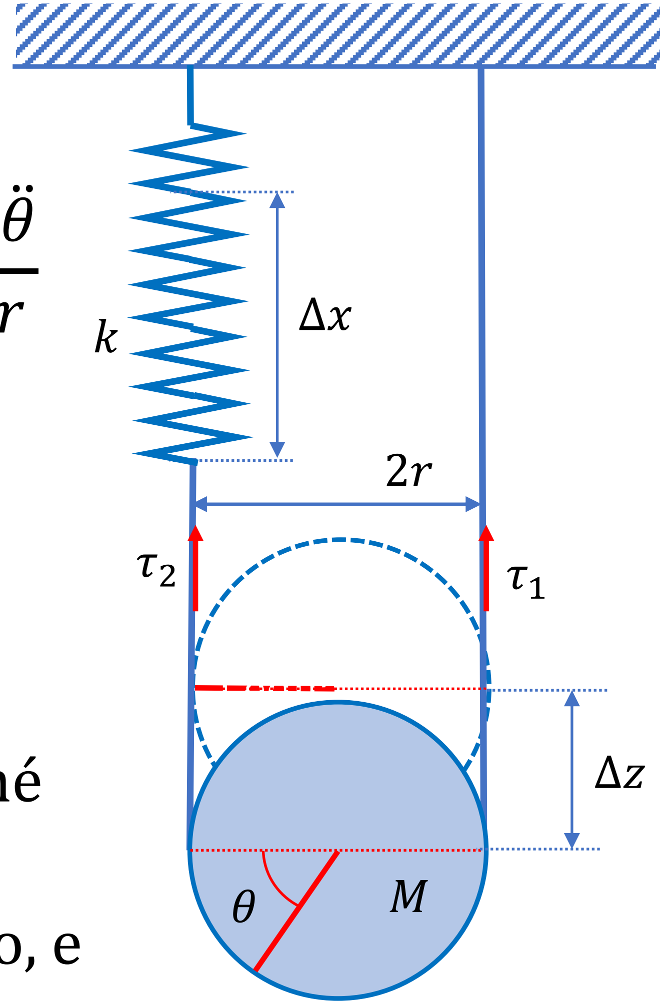
e sostituendo si ha

$$\tau_2 = \frac{Mg}{2}(1 - \cos(\omega t)).$$

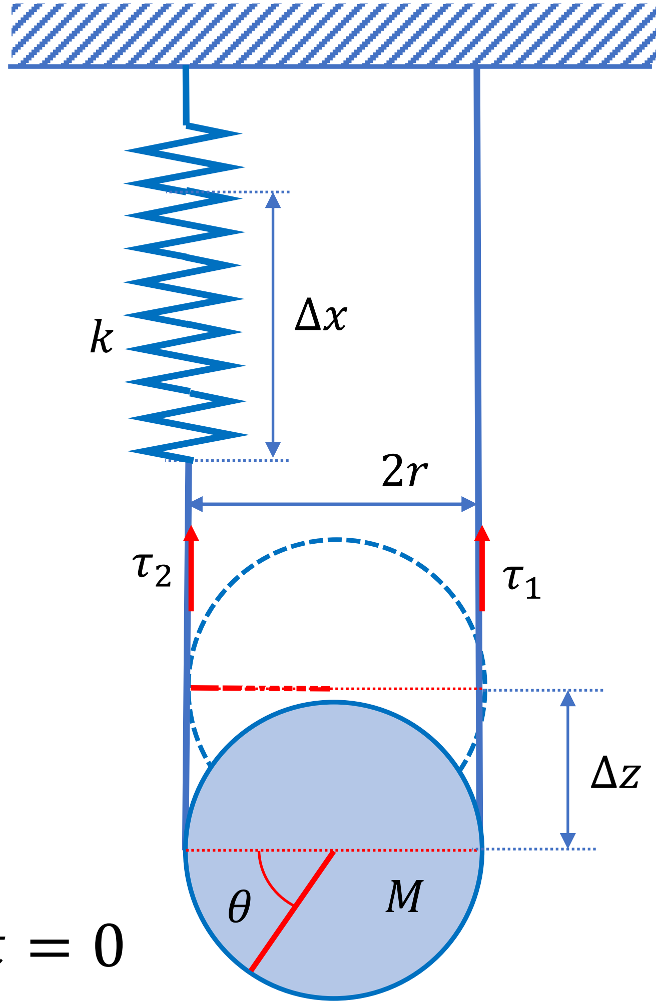
con $\omega^2 = 8k/3M$.

Verifichiamo: per $t = 0$ $\tau_2 = 0$, giusto perché è la posizione con la molla a riposo.

Nella posizione di equilibrio il coseno è zero, e $\tau_2 = \frac{M\,g}{2}$, di nuovo giusto perché in quella posizione le due corde si dividono il peso della carrucola, dato che in quell'istante l'accelerazione del disco è nulla.



Soluzione esercizio 2



Dalla prima cardinale

$$\tau_1 + \tau_2 - Mg = M\ddot{z}$$

dove z è la coordinata verticale della carrucola, $\ddot{z} = -r\ddot{\theta}$.

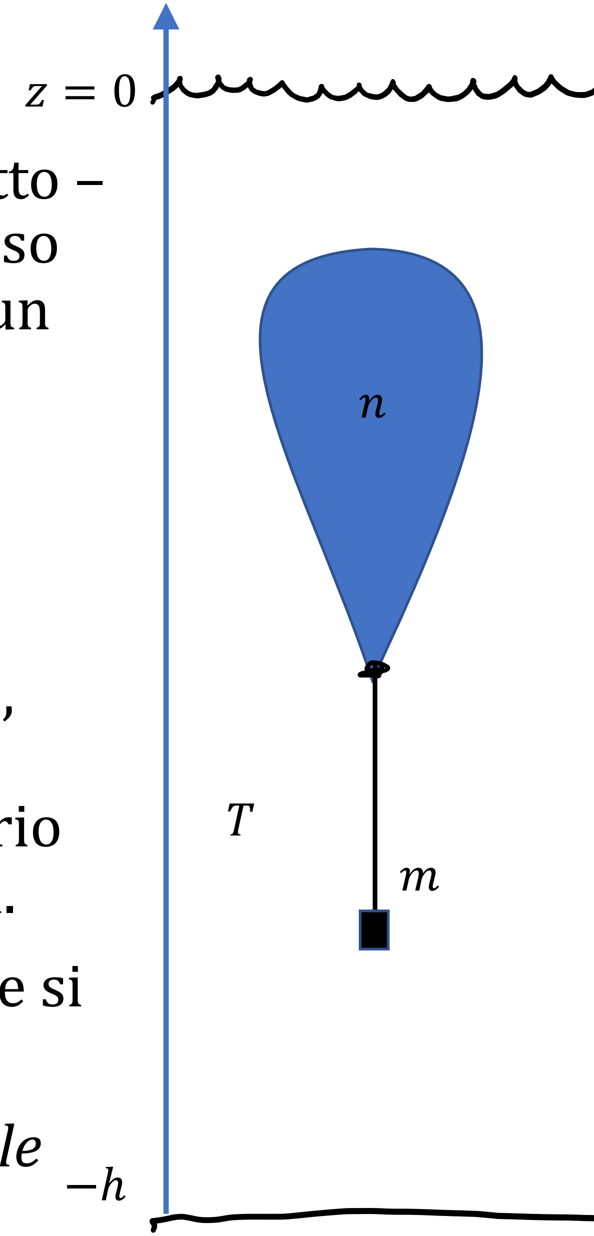
Quindi

$$\tau_1 = Mg + M\ddot{z} - \tau_2$$
$$= Mg - Mr\ddot{\theta} - \frac{Mg}{2}(1 - \cos(\omega t))$$
$$= \frac{Mg}{2} - \frac{Mg}{6}\cos(\omega t).$$

Controlliamo: nella posizione di equilibrio $\tau_1 = \tau_2 = \frac{Mg}{2}$, come avevamo già visto. Per $t = 0$ $\tau_1 = \frac{Mg}{3}$, cosa che si può ottenere direttamente pensando a uno yo-yo che inizia a cadere (dato che $\tau_2 = 0$): dalla prima cardinale $\tau_1 - Mg = M\ddot{z} = -Mr\ddot{\theta}$, dalla seconda con polo nel centro di massa $\tau_1 r = \frac{Mr^2}{2}\ddot{\theta}$. Eliminando $Mr\ddot{\theta}$ abbiamo subito $\tau_1 = \frac{Mg}{3}$.

Esercizio 3 (12 pt)

In un pallone di spessore trascurabile (un sacchetto – il pallone non è in tensione) appesantito da un peso m, vengono immesse n moli di aria (assimilate a un gas perfetto), e il tutto viene immerso in un lago profondo h a temperatura T.



1) Determinare l valore minimo di m perché il pallone affondi
2) Supponendo che la massa totale del sacchetto, del peso e del gas sia sufficiente a farla affondare, determinare le posizioni di equilibrio del pallone, e dire quali sono stabili e instabili.
3) Calcolare la variazione di entropia se il pallone si buca nella posizione di cui sopra.

Traccia: una posizione di equilibrio ($f = 0$) è stabile se un piccolo spostamento riporta il sistema "indietro", corrispondente a un minimo dell'energia potenziale. I massimi/minimi possono stare dentro il dominio o ai bordi…

Soluzione esercizio 3

Sul pallone che fluttua nell'acqua (quindi non alla superficie né al fondo) agisce la forza peso $-mg$ e la spinta di Archimede $\varrho g V$.

Il volume è essenzialmente quello del gas, per cui si ottiene dalla legge dei gas perfetti $PV = nRT$. La pressione è data dalla legge di Stevino $P(z) = P_0 - \varrho g z$ (qui z è negativa), dove P_0 è la pressione atmosferica.

Perché affondi dobbiamo avere a $z = 0$ che la forza peso sia maggiore della spinta di Archimede, per cui

$$mg > \frac{\varrho g n R T}{P_0}.$$

Per una quota z abbiamo all'equilibrio

$$F = -mg + \frac{\varrho g n R T}{P_0 - \varrho g z} = 0,$$

da cui la posizione di equilibrio $\bar{\bar{\bar{z}}}$ è

$$\bar{\bar{\bar{z}}} = \frac{P_0}{\varrho} - \frac{nRT}{m}.$$

Soluzione esercizio 3

Questa posizione è instabile, perché se $z > \bar{\bar{\bar{z}}}$ la pressione diminuisce, il volume del pallone aumenta e così fa la spinta di Archimede, quindi il pallone tende a galleggiare sempre di più, viceversa se il pallone affonda più di $\bar{\bar{\bar{z}}}$.

Quindi esistono tre posizioni di equilibrio: $z = 0$, $\mathrm{z} = \bar{\bar{\bar{z}}}$ e $z = -h$, di cui la prima e l'ultima stabili e quella intermedia instabile.

Si può anche ottenere la soluzione per via analitica. L'energia potenziale si può ottenere integrando la forza

$$U(z) = -\int_0^z F(z)dz =$$

$$\int_0^z mg - \frac{\varrho g n R T}{P_0 - \varrho g z} dz =$$

$$mgz + nRT \ln\left(\frac{P_0 - \varrho g z}{P_0}\right)$$

che ha un massimo in $\bar{\bar{\bar{z}}}$ (lo si vede studiando il segno della derivata, ovvero di $-F$)

Soluzione esercizio 3

Se il pallone si buca il gas fuoriesce ad una pressione $P_0 - \varrho g z$ e quando raggiunge la superficie è a una pressione P_0. Possiamo usare una trasformazione isoterma e otteniamo

$$\Delta S = nR \ln \frac{P_0 - \varrho g z}{\mathrm{P}_0}$$