COMPITO di COMPLEMENTI DI MATEMATICA FINANZIARIA, 14/1/2016
Cecilia Mancini

Esercizio 1
1) Sotto quali ipotesi e perché il TIR di un BTP rappresenta il tasso di rendimento dell'investimento nel BTP?
2) Sotto le suddette ipotesi, in quale relazione sono il TIR di un BTP comprato all'emissione e tenuto fino a scadenza ed il tasso cedolare [= 2×(tasso con il quale si determina l'importo di ogni cedola)]? perché?
3) Stabilire quale dei due BTP seguenti,
* BTP 1St40 5% (scadenza 1 Settembre 2040, tasso cedolare = 5%) quotato 101.76 Eu (in riferimento ad un valore nominale pari a 100)
* BTP 1Fb37 4%, quotato 92.80 Eu,
è più conveniente comprare oggi 14/1/2016, sulla base del rendimento ex post annualizzato (in capitalizzazione composta) lordo di *ciascuno alla sua scadenza*, sapendo che via via che si incassano le cedole queste finiscono su un conto corrente remunerato al 2% annuale lordo.

Esercizio 2
Si vuole stipulare un contratto di mutuo decennale di 100'000 Eu con rate mensili posticipate immediate.
1) Se il TAN è del 5%, a quanto ammontano le rate?
2) Quale disuguaglianza intercorre tra TAN e TAEG? Spiegare con cura. Ci sono condizioni contrattuali per le quali TAN e TAEG concidono?
3) L'istruttoria per l'apertura del contratto costa 800 Eu e al pagamento di ogni rata sono dovuti alla banca 3 Euro per la polizza incendio e 2 Euro di spese di incasso. Determinare una approssimazione del TAEG facendo 3 passi con l'algoritmo di bisezione. Specificare l'errore approssimativamente compiuto sulla stima del tasso annuale.

Esercizio 3
Si considerino due azioni con rendimenti attesi $\bar{r}_1 = 5\%, \bar{r}_2 = 8\%$, deviazioni standard $\sigma_1 = 16\%, \sigma_2 = 20\%$ e correlazione $\rho = 0.5$. Siano ammesse le vendite allo scoperto.
1) Si disegni, nel piano (σ, r), l'insieme dei portafogli che si possono costruire a partire dai 2 titoli dati, evidenziando la frontiera efficiente. Sono i due titoli iniziali efficienti?
2) Determinare la composizione del portafoglio che massimizza la quantità $r - \frac{3}{2}\sigma^2$, e raffigurare il portafoglio sul grafico precedente.
3) È possibile, utilizzando i titoli 1 e 2, creare un portafoglio con varianza del rendimento nulla? Qual è la composizione del portafoglio di minima varianza?
4) Si determini il titolo efficiente avente rendimento atteso 7%. Qual è il massimo rendimento atteso ottenibile con un portafoglio efficiente?

SOLUZIONI

EX BTP

1) Tenere il titolo fino a scadenza e reinvestire le cedole allo stesso tasso TIR i. Posti $R_k = c$ cedola, per $k = 1..n-1$ e $R_n = N + c$, dalla relazione di equità $V_{ini} = \sum_{k=1}^{n} R_k(1+i)^{-k}$, e da $V_{fin} = \sum_{k=1^n} R_k(1+i)^{n-k} = V_{ini}u^n$ si ottiene che $\frac{V_{fin}-V_{ini}}{V_{ini}} = u^n - 1$, che è il tasso di rendimento ex post su base n semestri. Il tasso equivalente semestrale è pari a i.
2) Il TIR su base semestrale coincide (è maggiore, risp. minore) con la metà del tasso cedolare se il BTP è venduto alla pari (sotto la pari, risp. sopra la pari).
Infatti dalla relazione $V_{ini} = ca_{n|i} + N(1+i)^{-n} \gtreqless N$ segue $i \lesseqgtr \frac{c}{N}$.
3) Il BTP 1St 5% paga ancora $n = 50$ cedole di 2.5 Eu ciascuna, e la sua scadenza è 24 anni + 7,5 mesi, il rateo è $2.5 \cdot (30+31+30+31+14)/(30+31+30+31+31+29) = 1.868131868$, quindi $V_{ini} = 101.76 + rateo = 103.6281319$. Il tasso 2% semestralizzato è $i_2 = \sqrt{1.02} - 1 = 0.009950494$, perciò $V_{fin} = 2.5 \cdot s_{n|i_2} + 100 = 260,9482926$ ed il tasso annuale di rendimento ex post è $\left(\frac{V_{fin}}{V_{ini}}\right)^{\frac{12}{24*12+7.5}} - 1 = 0.038215199 \sim 3.82\%$.
Il BTP 1Fb 4% paga ancora $n = 43$ cedole di 2 Eu ciascuna, e la sua scadenza è 21 anni + 0,5 mesi, il rateo è $2 \cdot (31+30+31+30+31+14)/(31+30+31+30+31+31) = 1.815217391$, quindi $V_{ini} = 92.8 + rateo = 94.61521739Eu$. $V_{fin} = 2 \cdot s_{n|i_2} + 100 = 206.6777153$ ed il tasso annuale di rendimento ex post è $\left(\frac{V_{fin}}{V_{ini}}\right)^{\frac{12}{22*12+0.5}} - 1 = 0.037831148 \sim 3.78\%$.
Senza tener conto di commissioni e tasse, è dunque più conveniente acquistare il primo BTP.

EX TAN e TAEG

1) $TAN = 5\% \Rightarrow i_{12} = 0.00412 \Rightarrow R = \frac{S}{a_{120|i_{12}}} \approx 1060,66$.
2) Nel caso non ci siano spese accessorie, detto i_m il TIR dell'operazione, avrei $TAN = m \cdot i_m$ e $TAEG = (1+i_m)^m - 1$. Essendo $m = 12 > 0$ si ha che $mi_m < (1+i_m)^m - 1$, ossia $f_1(i_m) = mi_m + 1 < f_2(i_m) = (1+i_m)^m$, per ogni $i_m > 0$. Infatti f_1 ha per grafico una retta con pendenza m e passante per $(0,1)$, mentre f_2 ha per grafico una curva sempre per $(0,1)$ e con pendenza m in $(0,1)$, ma che per $m > 0$ è strettamente convessa, quindi si trova sempre sopra la sua tangente $y = f_1(i_m)$.
Quindi nel caso non ci siano spese accessorie abbiamo sempre $TAEG > TAN$. Se per di più il contratto prevede spese accessorie, allora per il TIR j dell'operazione netta vale $j > i_m$, perché l'operazione netta è più onerosa di quella senza spese accessorie. Ma allora a maggior ragione si ha $TAEG > TAN$, perché $TAEG = (1+j)^m - 1 > (1+i_m)^m - 1 > TAN$.
Perciò in una siuazione realistica non si può mai avere $TAN = TAEG$.
3) Poiché $TAEG > TAN$ e $i_{12} = 0.00412$, provo a valutare $f(x) = 99200 - (R+5)\frac{1-(1+x)^{-120}}{x}$ nel punto $b = 0.0045$: risulta $f(b) \approx 557 > 0$, cerco un altro tasso su cui $f < 0$, provo 0.0040: $f(0.0040) \approx -2203 < 0$, quindi pongo $a = 0.0040$ e procedo con la bisezione.
$x_1 = 0.00425, f(x_1) < 0 \rightarrow x_2 = 0.004375, f(x_2) < 0 \Rightarrow x_3 = 0.0044375, f(x_3) > 0 \Rightarrow$ la soluzione $x^\star$ a $f(x) = 0$ si trova in (x_2, x_3), come approssimazione di $x^\star$ do $\frac{x_2+x_3}{2} = 0.00440625$.
L'errore commesso è $|x_k - x^\star| < \frac{b-a}{2^{k+1}} \approx 3 \times 10^{-5}$, quindi sul tasso annuale approssimativo $12x^\star$ l'errore è $|12x_k - 12x^\star| < 12\frac{b-a}{2^{k+1}} \approx 3.8 \times 10^{-4}$, e $12x_4 \approx 0.053$.

EX TEORIA DEL PF

1) Siamo nel contesto in cui $\bar{r}_1 < \bar{r}_2$ e $\sigma_1 < \sigma_2$. Poiché $\rho < \sigma_1/\sigma_2 = 0.8$, l'insieme dei portafogli possibili è una iperbole per i due punti P_1, P_2 che rappresentano i due titoli, con vertice compreso tra i due punti.
La frontiera efficiente è il ramo superiore dell'iperbole, che parte dal vertice e sale all'aumentare di σ. P_1 risulta non efficiente perché è possibile costruire un portafoglio con stessa deviazione std e maggior rendimento atteso. Invece P_2 è efficiente.
2) $r - \frac{3}{2}\sigma^2 = (1-\alpha)\bar{r}_1 + \alpha\bar{r}_2 - \frac{3}{2}[(1-\alpha)^2\sigma_1^2 + \alpha^2\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2\alpha(1-\alpha))] = 0.0116 + 0.0588\alpha - 0.0504\alpha^2$. Il punto di massimo della funzione è l'ascissa del vertice della parabola $\hat{\alpha} = 0.58\bar{3}$, e corrisponde al portafoglio di media $r(\hat{\alpha}) = 0.0675$ e deviazione std $\sigma(\hat{\alpha}) = 0.1607$.
3) Il $\min_{\alpha\in\mathbb{R}} \sigma^2(\alpha) = \min_{\alpha\in\mathbb{R}} 0.0256 - 0.0192\alpha + 0.0336\alpha^2$ è raggiunto su $\hat{\hat{\alpha}} = 0.2857$ che corrisponde a $\sigma_{min} = \sqrt{\sigma(\hat{\hat{\alpha}})} = 0.02286 > 0$, quindi non è possibile costruire un portafoglio a varianza nulla.
4) $r(\alpha_1) = (1-\alpha_1)\bar{r}_1 + \alpha_1\bar{r}_2 = 0.07$ per $\alpha_1 = \frac{0.07-\bar{r}_1}{\bar{r}_2-\bar{r}_1} = 0.\bar{6}$, che corrisponde al portafoglio con $\sigma(\alpha_1) = 0.028$. Tale portafoglio è efficiente, perché ha rendimento atteso maggiore a quello del pf di min var, che è $r(\hat{\hat{\alpha}}) = 0.0675$.
Poiché le vendite allo scoperto sono consentite, non esiste un portafoglio con rendimento massimo assoluto, ma $\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} r(\alpha) = +\infty$.