

Esercizio 1

- 1) Per quali tipi di operazioni finanziarie sicuramente esiste il TIR?
- 2) Si dimostri che $\{-S, R_1, \dots, R_n\}/\{0, 1, \dots, n\}$ ammette un unico TIR qualunque siano gli importi $S > 0, R_k > 0, k = 1..n$.
- 3) Approssimare il TIR di $\{10'000, -1000, -1000, \dots, -1000\}/\{0, 1, \dots, 12\}$, dove l'unità di misura dei tempi è il mese. Utilizzando il metodo di Newton, in modo che il tasso $12 \cdot i$ sia preciso alla seconda cifra decimale.

Esercizio 2

Si vuole stipulare un contratto di mutuo quinquennale di importo S con rate mensili posticipate immediate. Si concorda con il prestatore del denaro di ammortizzare il debito con variante tedesca dell'ammortamento italiano, al tasso annuo i .

- 1) Si scrivano le espressioni delle rate R_k , delle quote I_k, C_k dell'ammortamento italiano.

Si spieghi la regola della variante tedesca e si scriva in quale relazione sono R_k, I_k, C_k con le rispettive quantità R'_k, I'_k, C'_k dell'ammortamento con variante tedesca.

Si esprima la rata R'_k in termini di D'_k e D'_{k-1} .

Si dica se le rate R'_k si susseguono secondo una qualche progressione.

- 2) Sapendo che $S=100'000$ Eu ed $i=5\%$, si scrivano le prime 5 e le ultime 2 righe del piano di ammortamento, approssimando ogni numero alla seconda cifra dopo la virgola.

Esercizio 3

- 1) Si descriva il funzionamento del BTP Italia: possibili scadenze, prezzo di emissione, funzionamento delle cedole, eventuale certezza all'emissione delle cedole, rendimento minimo garantito, indice a cui è agganciato il titolo, quantità che vengono rivalutate, periodicità di rivalutazione, ammontare pagato dal titolo ad ogni scadenza, modalità di rimborso del nominale, in quali termini viene data la quotazione, calcolo del rateo interessi, possibilità di acquisto diretto o meno.

- 2) Nell'ipotesi che il valore π_t dell'indice aumenti sempre nel tempo, in quale senso il potere di acquisto del nominale viene protetto?

Qual è stato il tasso minimo garantito alla prima emissione del titolo il 26/3/2012?

In cosa differisce la rivalutazione della cedola nel BTP Italia e nel BTP euro-i?

SOLUZIONI

EX TIR

1) Per le operazioni semplici, nelle quali nel flusso di importi si ha 1 sola variazione di segno, e per le operazioni pure, nelle quali il flusso dei *saldi* ha 1 sola variazione di segno.

2) Il TIR dell'operazione $\{-S, R_1, \dots, R_n\}/\{0, 1, \dots, n\}$, è, quando esiste ed è unica, la soluzione i (espressa nell'unità di misura in cui vengono espressi gli istanti di pagamento delle R_k) all'equazione $S = \sum_{k=1}^n R_k(i+1)^{-k}$, ossia a $f(i) := \sum_{k=1}^n R_k(i+1)^{-k} - S = 0$. f è una funzione definita su $(-1, +\infty)$, dove è continua e derivabile, perché polinomio in $(1+i)$. Visto il segno delle R_k e di S , abbiamo che $\lim_{i \rightarrow -1} f(i) = +\infty$, quindi per i vicini a -1 la funzione assume valori positivi, mentre $\lim_{i \rightarrow +\infty} f(i) = -S < 0$, quindi per valori molto grandi di i f assume valori negativi. Allora, essendo f continua, necessariamente il suo grafico attraversa l'asse delle ascisse (teorema dei valori intermedi), ossia esiste di sicuro una soluzione a $f(i) = 0$. Poiché $f'(i) = -\sum_{k=1}^n k R_k(i+1)^{-k-1} < 0$, f è strettamente decrescente sul suo dominio, quindi il suo grafico può attraversare l'asse delle ascisse una sola volta, ossia la soluzione a $f(i) = 0$ è unica.

A lezione è stata fatta la stessa dimostrazione nel caso in cui le R_k siano costanti.

3) Il TIR è la soluzione i_{12} di $10000 = 1000 \frac{1-v_{i_{12}}^{12}}{i_{12}}$, ossia la soluzione x a $10 - \frac{1-(1+x)^{-12}}{x} = 0$. Posto $f(x) = 10 - \frac{1-(1+x)^{-12}}{x}$, il metodo di Newton è applicabile perché:

* f è continua su $D = (-1, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 10$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$ allora esistono $a, b \in \mathbb{R}$ su cui f discorde

* $f(x) = 10 - \sum_{k=1}^{12} (1+i)^{-k}$, quindi è derivabile con derivata continua su tutto D

* $f''(x) = -\sum_{k=1}^{12} k(k+1)(1+i)^{-k-2} < 0$, quindi f è strett concava su D .

Come punto di partenza dell'algoritmo di Newton considero il valore x_1 ottenuto come segue: l'ammontare globale degli interessi pagati nell'operazione di prestito è $12000 - 10000 = 2000$, molto approssimativamente penso che dentro ciascuna rata mediamente pago $2000/12 = 166,7$ Eu di interessi, che corrispondono al $166,7/10000 \approx 1,7\%$ del capitale prestato. Scelgo quindi $x_1 = 0.017$ mensile. L'algoritmo si ferma quando per $12x_k$ e $12x_{k+1}$ coincidono le cifre decimali fino alla seconda.

$$f'(x) = -\frac{12(1+x)^{-13}}{x} + \frac{1-(1+x)^{-12}}{x^2}$$

$x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) = 0.02858216687$; $12 * x_1 = 0.204$, $12 * x_2 = 0.3429860024$ allora vado avanti

$x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2) = 0.02922670011$; $12 * x_2 = 0.3429860024$, $12 * x_3 = 0.3507204013$, coincidono le cifre solo fino alla prima decimale, allora vado avanti

$x_4 = x_3 - f(x_3)/f'(x_3) = 0.02922854028$; $12 * x_3 = 0.3507204013$, $12 * x_4 = 0.3507424834$,

quindi il tasso annuale è $\hat{x} \approx 35\%$.

EX AMM.TO TEDESCO

1) Le rate sono $n = 12 \times 5 = 60$ allora $R_k = S/60$; $I_k = D_{k-1}i_{12}$; $R_k = C_k + I_k$, e, poiché $D_{k-1} = S - \sum_{j=1}^{k-1} C_j$, risulta $R_k = \frac{S}{n} + i_{12}S - \frac{i_{12}S}{n}(k-1)$.

La variante tedesca del piano di ammortamento consiste nel pagamento anticipato del valore scontato della quota interesse I_k di ciascuna rata, fermo restando invece il meccanismo di pagamento delle quote capitale.

Ribattezzando i_{12} in i , vale perciò che $R'_0 = I_1 v$, dove $v = (1 + i)^{-1}$; $C'_k = C_k$, $I'_k = I_{k+1} v$; $R'_k = C'_k + I'_k$.

Poiché $C'_k = D'_{k-1} - D'_k$ e $I'_k = I_{k+1} v = D_k i v = D'_k i v$, si ha che $R'_k = C'_k + I'_k = D'_{k-1} - D'_k + D'_k i v = D'_{k-1} + (d - 1) D'_k = D'_{k-1} - v D'_k$, dove $d = \frac{i}{1+i}$.

Continuando lo sviluppo di $R'_k = D'_{k-1} - v D'_k$ si ottiene $R'_k = S - \sum_{j=1}^{k-1} C_j - v(S - \sum_{j=1}^k C_j) = Sd + \frac{S}{n} - \frac{S}{n} d(k-1)$, quindi le rate dalla 1 alla n dell'ammortamento italiano con variante tedesca si susseguono in progressione aritmetica, con primo termine $R'_1 = S(d + \frac{v}{n})$ e ragione $-d\frac{S}{n}$. La rata $R'_0 = S i v = Sd$ invece non segue la stessa progressione. Per confronto, tutte le rate dell'ammortamento italiano si susseguono in progressione aritmetica, con primo termine $R_1 = S(i + \frac{1}{n})$ e ragione $-i\frac{S}{n}$.

2) Eseguendo i calcoli $C' = 100'000/60$, $I'_0 = Sd_{12}$; per $k=1..n$, $D'_k = D'_{k-1} - C'$, $I'_k = D_k d_{12}$, $R'_k = C' + I'_k$; e $D'_{59} = C'$, $I'_{59} = D'_{59} d_{12}$, $R'_{59} = C' + I'_{59}$ si ottiene

t_k	R'_k	C'_k	I'_k	D'_k
0			405,76	100'000
1	2'065,66	1'666,67	399,00	98'333,33
2	2'058,90	1'666,67	392,23	96'666,67
3	2'052,14	1'666,67	385,47	95'000,00
4	2'045,38	1'666,67	378,71	93'333,33
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
59	1'673,43	1'666,67	6,76	1'666,67
60	1'666,67	1'666,67	0	0

EX BTP ITALIA

1) Possibili scadenze: 4,6,8 anni

prezzo di emissione: alla pari

funzionamento delle cedole, eventuale certezza all'emissione delle cedole: semestrali, posticipate, non note all'emissione

rendimento minimo garantito: tasso annuale x reale

indice a cui è agganciato il titolo: il titolo è indicizzato al livello generale dei prezzi al consumo, indice FOI ex tabacco

quantità che vengono rivalutate: cedole, nominale

periodicità di rivalutazione: ogni 6 mesi viene pagata la cedola di competenza rivalutata e viene rivalutato il nominale

ammontare pagato dal titolo ad ogni scadenza:

$$R_k = \frac{x}{2} \times N \times \max\left\{\frac{\pi_k}{\pi_{k-1}}, 1\right\} + N \times \max\left\{\frac{\pi_k}{\pi_{k-1}} - 1, 0\right\},$$

dove π_k è l'indice di riferimento per la data t_k . Poiché l'indice FOI ex tabacco è pubblicato solo una volta al mese, viene definito artificialmente l'indice di riferimento per ogni giorno dell'anno come segue: se t_k è il giorno d del mese m dell'anno si ha

$$\pi_{d,m} := \pi_{m-3} + \frac{d-1}{\text{num. di gg del mese } m} \times (\pi_{m-2} - \pi_{m-3})$$

modalità di rimborso del nominale: in unica soluzione a scadenza

in quali termini viene data la quotazione: reali; il prezzo effettivo di vendita

(prezzo nominale di vendita) in t è $\text{quotaz}_t \times \frac{\pi_t}{\pi_{t-6\text{mesi}}}$
 calcolo del rateo interessi: se acquisto il titolo in $t \in (t_{k-1}, t_k)$, dove i t_k sono
 istanti successivi di stacco cedola, allora:

$$\text{rateo} = \frac{x}{2} \times N \times \frac{\pi_t}{\pi_{t-6\text{mesi}}} \times \frac{t - t_{k-1}}{6\text{mesi}} + N \times \frac{\text{quotaz}_t}{100} \times \left(\frac{\pi_t}{\pi_{t-6\text{mesi}}} - 1 \right)$$

possibilità di acquisto diretto: sì, senza intermediari, e commissione 0.

2) Con N Euro alla data t_0 compro $\frac{N}{\pi_{t_0}}$ unità di bene. Se acquisto un BTP Italia e i prezzi π_{t_k} aumentano con k , ad ogni t_k la porzione di nominale che ricevo è $N(\frac{\pi_k}{\pi_{k-1}} - 1)$, poi ricevo N a scadenza. A ciascun t_k posso dunque comprare $N(\frac{1}{\pi_{k-1}} - \frac{1}{\pi_k})$ unità di bene, e alla scadenza t_n posso comprarne $\frac{N}{\pi_n}$. La somma di tutte queste quantità è

$$N \times \left(\frac{1}{\pi_0} - \frac{1}{\pi_1} + \frac{1}{\pi_1} - \frac{1}{\pi_2} + \dots + \frac{1}{\pi_{n-1}} - \frac{1}{\pi_n} + \frac{1}{\pi_n} \right) = \frac{N}{\pi_0},$$

che coincide esattamente con la quantità che avrei potuto comprare alla data t_0 se non avessi investito N nel titolo.

Questo punto era stato dato come esercizio per casa, senza soluzione, dopo la lezione sul BTP Italia.

Il tasso minimo garantito alla prima emissione del titolo, il 26/3/2012, è stato il 2.45%.

Anche questa domanda era stata data come esercizio per casa, senza soluzione.

La rivalutazione della cedola nel BTP euro-i è data da $\frac{x}{2} \times N \times \frac{\pi_k}{\pi_0}$, quindi differisce dalla rivalutazione della cedola nel BTP Italia per il fatto che alla data t_k il prezzo preso a riferimento è sempre π_0 (anziché π_{k-1}); inoltre, nel BTP Italia la cedola non può mai avere valore inferiore a $\frac{x}{2} \times N$, invece nel BTP Euro-i in caso di deflazione tra t_0 e t_k la cedola pagata in t_k è inferiore a $\frac{x}{2} \times N$.