COMPITO di COMPLEMENTI DI MATEMATICA FINANZIARIA, 22/6/2016
Cecilia Mancini

Esercizio 1
Si vuole costituire una pensione integrativa. Si ritiene di lavorare ancora n anni, si versa da oggi ($t = 0$) fino a tutta la durata dell'anno n un importo R mensile posticipato, per ottenere, posticipatamente, a partire dall'inizio dell'anno $n + 1$, un importo mensile P_1 per i successivi m_1 anni, ed un importo mensile posticipato P_2 dall'inizio dell'anno $n+m_1+1$ alla fine dell'anno $n+m_1+m_2$. Si adotti il regime della capitalizzazione composta al tasso annuo i.
1) Disegnare lo scadenzario delle entrate e delle uscite.
2) Quale valore di R rende l'operazione equa?
3) A quanto ammonta R se $n = 35, m_1 = 10, P_1 = 1'000$ Euro$, m_2 = 20, P_2 = 1'500$ Euro$, i = 3\%$ annuo?

Esercizio 2
1) Si descriva il funzionamento della capitalizzazione mista e si mostri come la capitalizzazione composta possa essere ottenuta come limite di quella mista.
2) Sia dato un tasso annuale di interesse i, e sia $d = iv = i/(1+i)$. Si disegnino su uno stesso piano cartesiano i grafici dell'evolversi del valore montante di 1 Eu, esigibile alla data t=0, all'aumentare del tempo $t \in [0, 1/d]$, secondo i 4 regimi di capitalizzaione visti a lezione: semplice al tasso i, sconto commerciale al tasso di sconto d, mista con capitalizzazione degli interessi ogni 3 mesi ma con regime semplice al tasso i entro ogni trimestre, composta al tasso i.

Esercizio 3 Siano $S_0^1 = 3, S_T^1 = \begin{cases} 2, & p = 0.5 \\ 5, & p = 0.5; \end{cases}$ $S_0^{(2)} = 4, S_T^{(2)} = \begin{cases} 3, & p = 0.5 \\ 8, & p = 0.5, \end{cases}$
e sia la distribuzione congiunta di $(S_T^{(1)}, S_T^{(2)})$ data da $\begin{cases} (2,3), & p = 0.5 \\ (5,8), & p = 0.5. \end{cases}$

1) Si visualizzino sul piano $\sigma - \bar{r}$ i punti che rappresentano i rendimenti dei titoli 1 e 2, e l'insieme (con la corretta forma) dei portafogli con essi ottenibili, evidenziando la frontiera efficiente.

2) Si dica se i 2 titoli sono efficienti e si determini il portafoglio di minima varianza ottenibile senza vendite allo scoperto. È possibile, utilizzando i titoli 1 e 2, creare un portafoglio con varianza del rendimento nulla? in caso positivo determinarlo.

3) Determinare la composizione del portafoglio che massimizza, senza vendite allo scoperto, la quantità $\bar{r} - \frac{3}{2}\sigma^2$, e raffigurare il portafoglio sul grafico precedente.

4) Si determini e raffiguri il portafooglio avente rendimento atteso 10%.

SOLUZIONI

EX Pensione integrativa

2) $Ra_{12n|i_{12}} = P_1\ a_{12m_1|i_{12}}(1+i)^{-n} + P_2\ a_{12m_2|i_{12}}(1+i)^{m_1+n}$

3) $i_{12} = 1.03^{1/12} - 1 = 0.002466270$,
$a_{12n|i_{12}} = \frac{1-(1+i12)^(-12n)}{i12} = 261.3731003$,
$a_{12m_1|i_{12}} = (1 - 1.03^{-m_1})/i_{12} = 103.7624045$,
$a_{12m_2|i_{12}} = (1 - 1.03^{-m_2})/i_{12} = 180.9713762$,
$R = \frac{1000a_{12m_1|i_{12}}(1+i)^{-n}+1500a_{12m_1|i_{12}}(1+i)^{m_1+n}}{a_{12n|i_{12}}} \approx 415.72$ Euro.

EX frontiera efficiente

1) $r_1 = \begin{cases} -\frac{1}{3} & p = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & p = \frac{1}{2}, \end{cases}$ $r_2 = \begin{cases} -\frac{1}{4} & p = \frac{1}{2} \\ 1 & p = \frac{1}{2}, \end{cases}$ $(r_1, r_2) = \begin{cases} (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}) & p = \frac{1}{2} \\ (\frac{2}{3}, 1) & p = \frac{1}{2}, \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{r}_1 = 1/6 = 0.1666666667; \bar{r}_2 = 3/8 = 0.3750000000$,
$\sigma_1 = \sqrt{E[(r_1 - \bar{r}_1)^2]} = 0.5; \sigma_2 = \sqrt{E[(r_2 - \bar{r}_2)^2]} = 5/8 = 0.625;$
$\rho = \frac{E[r_1 r_2] - \bar{r}_1 \bar{r}_2}{\sigma_1 \sigma_2} = 1$
I due titoli sono perfettamente correlati, allora l'insieme dei portafogli costruibili con essi senza vendite allo scoperto è il segmento per $P_1 = (\sigma_1, \bar{r}_1)$ e $P_2 = (\sigma_2, \bar{r}_2)$, mentre l'insieme di tutti i portafogli costruibili con essi è una semiretta per P_1 e P_2.

2) I titoli sono entrambi efficienti: non ci sono portafogli preferibili ad essi.
Il portafoglio di minima varianza ottenibile con i due titoli senza vendite allo scoperto è quello rappresentato da P_1.
Sì, il portafoglio con varanza nulla è ottenibile con vendite allo scoperto, ed è precisamente il portafoglio avente rendimento $\alpha r_1 + (1-\alpha) r_2$, con α ottenuto risolvendo $\sigma = 0$, cioè $\sqrt{\alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\alpha(1-\alpha)} = |\alpha\sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_2| = \alpha(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2 = 0$. Risulta $\alpha = 5$, corrispondente ad una vendita allo scoperto di $S^{(2)}$. Il rendimento atteso di un tale portafoglio è comunque $\bar{r} = 5\bar{r}_1 - 4\bar{r}_2 = -\frac{2}{3}$.

3) $\max_{\alpha\in[0,1]} \bar{r} - \frac{3}{2}\sigma^2 = \max_{\alpha\in[0,1]} \frac{\alpha}{6} + \frac{3}{8}(1-\alpha) - \frac{3}{2}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{5}{8}(1-\alpha)\right)^2$
$= \max_{\alpha\in[0,1]}\ -\frac{3}{128}\alpha^2 + \frac{5}{192}\alpha - \frac{27}{128}$: il vertice della parabola si trova in $\alpha = -\frac{11}{54} < 0$, perciò per $\alpha \geq -\frac{11}{54}$ la parabola è decrescente, e allora il massimo su $\alpha \in [0,1]$ si trova in $\alpha = 0$, ossia il $\max_{\alpha\in[0,1]} \bar{r} - \frac{3}{2}\sigma^2$ è raggiunto dal titolo $S^{(2)}$.

4) Il portafoglio avente rendimento atteso $\alpha\bar{r}_1 + (1-\alpha)\bar{r}_2$ pari a 0.1 viene determinato dalla $\frac{1}{6}\alpha + \frac{3}{8}(1-\alpha) = 0.1$, da cui $\alpha = 1.32$, che impone di vendere allo scoperto il titolo $S^{(2)}$. Questo portafoglio ha deviazione standard pari a $1.32\sigma_1 - 0.32\sigma_2 = 0.46$.