ESERCIZIARIO
corso MATEMATICA - Applicazioni Economiche
October 7, 2013

NOTAZIONI

• Nella teoria delle funzioni con $f \equiv K$ si indica la funzione costante a livello K, ossia $f(x) = K$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

• $[x]$ denota la funzione *parte intera* di x.

• Massimo (o minino) *assoluto* = massimo (minimo) globale; massimo (o minimo) *relativo* = massimo (o minimo) locale.

ISTRUZIONI

Giustificare SEMPRE le risposte.

EQUAZIONI, DISEQUAZIONI ALGEBRICHE, SEMPLICI DISUGUAGLIANZE

Esercizio 1 *Sia $a > 0$. Dimostrare che*

$$|x| < a, \tag{1}$$

se e solo se

$$-a < x < a. \tag{2}$$

Esercizio 2 *Risolvere la disequazione*

$$x^6 - 4x^3 + 3 \geq 0.$$

Esercizio 3 *Risolvere la disequazione*

$$\frac{7x-2}{8x-3} > 0.$$

Esercizio 4 *Risolvere le disequazioni*

$$\frac{6x-1}{3x-1} - \frac{1}{3x+1} > 0,$$

$$\frac{x^2-3x+2}{(x-1)^2+1} \geq 0.$$

Esercizio 5 *Risolvere la disequazione*

$$|x-1| < |x-2|\,.$$

Esercizio 6 *Risolvere la disequazione*

$$\frac{x+1}{x\,|x|+2} > 0.$$

Esercizio 7 *Risolvere la disequazione*

$$\sqrt{2x^2-4x} \leq x-1.$$

Esercizio 8 *Risolvere la disequazione*

$$\sqrt{x^2-2x-3} > x-2.$$

Esercizio 9 *Risolvere la disequazione*

$$|x-1|-3 > \sqrt{(x-1)\,(x-3)}.$$

Esercizio 10 *Trovare le soluzioni dell'equazione*

$$\max\left\{x, x^2-1\right\} = 5x-7.$$

Esercizio 11 *Si determini l'insieme delle soluzioni dell'equazione* $x^2 = 2|x|+3$.

Esercizio 12 *Risolvere l'equazione* $x^2+|x| = 6$.

Esercizio 13 *Si dica per quali valori di* x *è soddisfatta la disuguaglianza*

$$|x(x+2)| - 2|x+2| \geq 0.$$

Esercizio 14 *Si determini l'insieme delle soluzioni della disequazione*

$$|x(x-2)| - |x-2| \leq 0.$$

Esercizio 15 *Si determini l'insieme delle soluzioni della disequazione*

$$(x-2)^2 \leq 2|x-2|+3.$$

Esercizio 16 *Si determini l'insieme delle soluzioni della disequazione*

$$(x+2)^2 \geq 6-|x+2|.$$

PROPRIETÀ DEI NUMERI REALI

Esercizio 17 *Usando le proprietà algebriche di cui godono le operazioni tra numeri reali (vedere libro di testo), dimostrare che per ogni numero reale* $a \quad a \cdot 0 = 0$.

Esercizio 18 *Usando le proprietà algebriche di cui godono le operazioni tra numeri reali ed il risultato dell'esercizio precedente, dimostrare che se* a *e* b *sono due numeri reali tali che* $a \cdot b = 0$, *allora* $a = 0$ *oppure* $b = 0$.

Esercizio 19 *Se* a *è un numero reale diverso da 0 allora* $0 < a^2$.

Esercizio 20 *Se* a *è un numero reale allora* $a^3 > 0$ *se e solo se* $a > 0$.

Esercizio 21 *Dire quale dei seguenti insiemi è limitato superiormente o inferiormente.*
a) $[0,1[$,
b) $]-\infty,4[\,\cup\,]7,10]$,
c) $]4,+\infty[$,
d) $]-\infty,1[\,\cup\,[4,+\infty[$,
e) $]1,2]\cup\,]3,4]\cup\,]7,10[$,
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 2x - 1\}$,
g) $\left\{x = n - \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

Esercizio 22 *Sia* $A =]0,1[$. *Trovare l'estremo superiore* L *e l'estremo inferiore* ℓ *e verificare sia la caratterizzazione*

$$\begin{cases} 1)\ x \le L \ \forall x \in A; \\ 2)\ \forall\, \varepsilon > 0 \text{ esiste } x \in A \text{ tale che } x > L - \varepsilon \end{cases}$$

che la caratterizzazione

$$\begin{cases} 1)\ x \ge \ell \ \forall x \in A; \\ 2)\ \forall\, \varepsilon > 0 \text{ esiste } x \in A \text{ tale che } x < L + \varepsilon. \end{cases}$$

Esercizio 23 *Siano* A *e* B *due sottoinsiemi di* $\mathbb{R}$. *Dimostrare che se* $A \subset B$ *allora*

$$\inf B \le \inf A \le \sup A \le \sup B.$$

Esercizio 24 *Trovare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme*

$$A = \left\{\frac{1}{n^3} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Esercizio 25 *Riferendosi all'esercizio precedente, verificare che* 0 *soddisfa la caratterizzazione di estremo inferiore riportata nel testo dell' esercizio 22.*

Esercizio 26 *Trovare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di*

$$A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Esercizio 27 *Dimostrare che se A è limitato superiormente e $\sup A \notin A$ allora $\sup A$ è un punto di accumulazione di A.*

Esercizio 28 *Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera*

$$a)\ \sqrt{18}\cdot\sqrt{2} \text{ è un numero negativo,} \qquad b)\ \sqrt{18}\cdot\sqrt{2} \text{ è un numero naturale}$$
$$c)\ \sqrt{18}\cdot\sqrt{2} \text{ è un numero irrazionale,} \qquad d) \text{ nessuna delle altre affermazioni è vera}$$

Esercizio 29 *Sia*

$$A = \left\{ \frac{n+1}{n^2},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si determini l'insieme dei punti interni dell'insieme A.

Esercizio 30 *Si dica quali delle seguenti affermazioni è vera*

$$a)\ 7\sqrt{3} \text{ è un numero negativo,} \qquad b)\ 7\sqrt{3} \text{ è un numero naturale}$$
$$c)\ 7\sqrt{3} \text{ è un numero irrazionale,} \qquad d) \text{ nessuna delle altre affermazioni è vera}$$

Esercizio 31 *Per quale dei seguenti insiemi $x_0 = 3$ è punto interno?*

$$a)\ \mathbb{N}; \qquad b)\ [0,3]; \qquad c)\ [-2,4); \qquad d)\ (3,6)$$

Esercizio 32 *Per quale dei seguenti insiemi $x_0 = 1$ è punto interno?*

$$a)\ \mathbb{Z}; \qquad b)\ [1,5]; \qquad c)\ [0,1); \qquad d)\ (-1,9]$$

Esercizio 33 *Si determinino l'estremo inferiore e l'estremo superiore dell'insieme*

$$A = (-2,0) \cup \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Esercizio 34 *Si determinino l'estremo inferiore e l'estremo superiore dell'insieme*

$$A = (0,3) \cup \{\cos(\pi n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Esercizio 35 *Quale dei seguenti insiemi coincide con l'insieme dei suoi punti interni?*

$$a)\ (0,1)\cup\{3\}; \qquad b)\ \mathbb{N}; \qquad c)\ (-\infty,4)\cup(\pi,+\infty); \qquad d)\ [-2,1]-\{0\}$$

Esercizio 36 *Si individuino l'estremo superiore e il massimo dell'insieme $A = (-1,3] \cap [-2,2)$.*

Esercizio 37 *Per quale dei seguenti insiemi π è un punto interno?*

$$a)\ [-1,3]; \qquad b)\ (5,9]; \qquad c)\ [0,10); \qquad d)\ \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}.$$

Esercizio 38 *Si individuino l'estremo inferiore e il minimo dell'insieme $A = (2,5] \cap [1,4)$.*

Esercizio 39 *Per quale dei seguenti insiemi e è un punto interno?*

$$a)\ [-2,1]; \qquad b)\ (3,10]; \qquad c)\ [1,5); \qquad d)\ \{0,1,e,e^2\}.$$

Esercizio 40 *Si dica quale dei seguenti numeri è razionale*

$$a)\ 4\sqrt{5}+2\sqrt{20};\qquad b)\ 4\sqrt{5}-2\sqrt{20};\qquad c)\ 3\sqrt{3}-6\sqrt{12};\qquad d)\ 3\sqrt{3}+6\sqrt{12}.$$

Esercizio 41 *Si dica quale dei seguenti numeri è irrazionale*

$$a)\ 2\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{18};\qquad b)\ \frac{2}{3}\sqrt{2}-2\sqrt{18};\qquad c)\ \frac{4}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}};\qquad d)\ 2\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}.$$

SUCCESSIONI: monotonia, iniettvità, immagine, limitatezza e limiti

Questa parte di esercizi presuppone la conoscenza dei soli Capitoli 1, 2 e 3 del libro di testo del corso. Si ricordi che $0 \notin \mathbb{N}$.

Esercizio 42 *Mostrare che la successione* $a_n = \frac{n^2+1}{2n}$ *é strettamente crescente.*

Esercizio 43 *Mostrare che* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{2n+5} = \frac{3}{2}$.

Esercizio 44 *Mostrare che* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n^2+n} = 0$.

Esercizio 45 *Mostrare che la successione*

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ \frac{5m+2}{3m+5} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

è iniettiva.

Esercizio 46 *Mostrare che la successione* $a_n = n^3 + 3n + 2$ *è strettamente crescente.*

Esercizio 47 *Si consideri la successione*

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \frac{3n}{n^2+1} & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Mostrare che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Esercizio 48 *Calcolare l'immagine della successione* $a_n = (-1)^n \left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Esercizio 49 *Basandosi sulla definizione di limite, mostrare che* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

Esercizio 50 *Mostrare che la successione* $a_n = (-1)^n n^2$ *è illimitata.*

Esercizio 51 *Mostrare che la successione* $a_n = 5n^2 - 17n + 7$ *è iniettiva e non è monotona.*

PROPRIETÀ (monotonia, invertibilità, limitatezza, sup/inf, max/min, simmetrie) E USO DELLE FUNZIONI

Esercizio 52 Siano date 3 funzioni reali f, g, h definite su $\mathbb{R}$ e di cui si sa che: f è positiva e superiormente limitata, $\inf_{x\in\mathbb{R}} g(x) = 3$, h è limitata. Stabilire se ciascuna delle seguenti funzioni è superiormente limitata, GIUSTIFICANDO SEMPRE, ossia dando una dimostrazione in caso positivo ed esibendo un controesempio in caso negativo:

$$\frac{f(x)}{h(x)};\ \frac{f(x)}{g(x)};\ f(x) + h(x);\ f(g(x));\ g(x) \cdot h(x).$$

Esercizio 53 1) Si scriva la definizione di funzione monontona sul suo dominio.
2) Siano date 3 funzioni reali f, g, h definite su $\mathbb{R}$ e strettamente crescenti, con $g(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, e sia $c > 0$. Basandosi sulla definizione di funzione monotona su un insieme, stabilire quali delle seguenti sono monotone sul loro dominio, GIUSTIFICANDO SEMPRE:

$$h(g(x)),\ f(x) + cg(x),\ h(f(x) + cg(x)),\ f(x - 2),\ f(x) \cdot \ln(h(x)),\ g(x) \cdot \ln(h(x)),$$
$$f^2(x),\ \frac{f(x)}{h(x)},\ \sin(f(x) + cg(x)),\ \tan(f(x) \cdot g(x)).$$

3) Disegnaro il grafico di $\tan(x - 2)$ e dire, GIUSTIFICANDO, se è crescente su $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Esercizio 54 Scrivere, SEMPRE GIUSTIFICANDO, un intervallo in cui le seguenti funzioni sono monotone:

$$f_1(x) = \tan(x^2 - 2x + 1), f_2(x) = \tan(\ln(x)), f_3(x) = \left[x^3\right], f_4(x) = 2\ln x, f_5(x) = \ln(x^2),$$
$$f_6(x) = \ln(x^3), f_7(x) = x\ln(x),$$

dove $[z]$ è la funzione *parte intera* di z.

Esercizio 55 a) Si dia la definizione di funzione iniettiva.
b) Si determini la funzione inversa di $f(x) = \frac{1}{2+\ln x}$.
c) Si determini la controimmagine di $[5, 10]$ tramite la funzione $f(x) = 3x^2 + 1$.
d) Si dica quale tra le seguenti funzioni è superiormente limitata:

$$f_1(x) = \frac{1}{x-2};\quad f_2(x) = 3x^2\sin x,\quad f_3(x) = \ln(x) \cdot I_{(0,2)}(x),\quad f_3^{-1}(e^x),\quad f_4(x) = x + \cos x,$$

dove $I_{(0,2)}$ è la funzione indicatrice dell'insieme $(0, 2)$:

$$I_{(0,2)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0, 2) \\ 0 & \text{se } x \in (0, 2)^c. \end{cases}$$

Esercizio 56 Sia

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ kx + q & \text{se } x < 0 : \end{cases}$$

stabilire per quali valori dei parametri k, q la funzione risulta monotona su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 57 Sia Π il profitto ricavato vendendo una quantità q di merce che si è prodotta. Sia p il prezzo unitario a cui si riesce a vendere la merce. Come noto, per realizzare la produzione si devono sostenere sia costi fissi C_F che costi variabili $C_v(q)$.
1) Scrivere per esteso l'ammontare Π del profitto quando la funzione C_v sia lineare $C_v(q) = aq$, con a costante data.
2) Come noto, la quantità di merce che si riesce a vendere dipende dal prezzo che si impone. Assumendo che sia $q(p) = -bp + d$, dove $b > 0, d$ sono costanti reali, scrivere come risulta il profitto al variare di p.
3) Specificare la funzione profitto, trovata sopra, al caso in cui $C_F = 200$ Euro, $C_v(q) = 20q$, e la funzione domanda sia $q(p) = 300 - \frac{p}{2}$. Disegnarne un grafico (immediato, ossia ottenuto a partire dai grafici delle funzioni elementari e trasformandoli).
4) Quale prezzo p si deve imporre alla merce per realizzare un profitto di 1000 Euro? Spiegare il significato economico del risultato.
5) Qual è il massimo profitto che si può ottenere con questa linea di produzione?

Esercizio 58 1) Si disegni il grafico (immediato) di

$$f(x) = \left|1 - \frac{1}{x}\right|.$$

2) Guardando il grafico si dica se la funzione è iniettiva sul suo dominio, ed in caso negativo si determini un intervallo massimale A su cui lo è.
3) Si calcoli la controimmagine $f^{-1}(y)$ del generico y e si stabilisca così l'immagine di f.
4) Si disegni il grafico dell'inversa di f ristretta ad A.

Esercizio 59 Si disegni il grafico (immediato) di

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ |\sin(x)| & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{se } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1) Si determini $f^{-1}(1)$.
2) Si intuisca il valore di $\inf_{[-\frac{\pi}{2},0)} f$ e si dimostri la correttezza dell'intuizione, a partire dalla caratterizzazione di estremo inferiore data sul libro di testo.

Esercizio 60 1) Si dia la definizione di estremo superiore $\sup_A f$ di una funzione f su un insieme A.
2) Sia $C = \sup_A f$. Qual è una condizione necessaria e sufficiente affinché C sia il $\max_A f$?

3) Usando le definizioni di $\max_A f$ e di $\sup_A f$, dimostrare che la condizione data al punto 2) sia effettivamente necessaria e sufficiente affinché $C = \max_A f$.

Esercizio 61 Siano

$$f(n) = \frac{2n+1}{3n}, \; g(n) = \frac{2n+n^2}{3n}, \; h(n) = 3 + (-1)^n, \; \ell(n) = (-2)^n \frac{1}{n^2}.$$

Di ciascuna successione stabilire:
1) se sia limitata superiormente e inferiormente, esibendo una limitazione in caso positivo, dimostrando la illimitatezza in caso negativo;
2) se monotona;
3) estremi superiore e inferiore;
4) eventuali valori massimo e minimo.

Esercizio 62 Sia $f(x) = 2x^2 + bx - 3$. Determinare $\max_{[1,2]} f$ al variare del parametro reale b.

Esercizio 63 Siano $f(x) = 3 + \sin(x), g(x) = \ln(2x+1)$.
1) Fare un grafico (immediato) di g e dedurre che la funzione è iniettiva.
2) Calcolare l'inversa g^{-1} di g e la funzione composta $F(x) = f(g^{-1}(x))$.
3) Dire, GIUSTIFICANDO, se F iniettiva.

Esercizio 64 1) A partire dalla definizione di funzione crescente strettamente, dimostrare che: se f è strettamente crescente allora anche f^{-1} lo è.
2) A partire dalla definizione di grafico di una funzione, dalla relazione tra punti del piano cartesiano che sono simmetrici rispetto alla bisettrice del I e III quadrante e dalle proprietà della funzione inversa, dimostrare che se f è invertibile allora il grafico di f^{-1} è il simmetrico del graf f rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

Esercizio 65 Disegnare un grafico (quasi immediato) della funzione

$$f(x) = x + |x^2 + 4x - 3|$$

e determinarne massimi e minimi locali e globali nell'intervallo $[-4, 1]$.

Esercizio 66 Si consideri $f(x) = \frac{3x+6}{x-2}$:
1) determinare il dominio,
2) verificare che f sia invertibile, scrivere l'espressione esplicita dell'inversa e determinare l'immagine di f,
3) trovare dominio e immagine dell'inversa.

Esercizio 67 Si tracci un grafico (immediato) della seguente funzione definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} & \text{se } x < -1 \\ -x+1 & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ \ln x & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Si determinino poi:
1) $f^{-1}(-1)$
2) $f^{-1}(\frac{1}{2})$
3) $\max_{[0,2]} f, \min_{[-1,1]} f$.

Esercizio 68 La compagnia telefonica SIM ci offre due tariffe alternative. La tariffa FAST non prevede scatti alla risposta ed impone il pagamento di 20 cent di Euro al minuto di conversazione, conteggiando 1/3 cent ogni secondo di conversazione, all'inizio del secondo. La tariffa GO prevede uno scatto alla risposta di 12 cent ed il pagamento di 10 cent per ogni minuto di conversazione, conteggiato ad ogni inizio minuto.
1) Scrivere l'espressione esplicita del costo di una chiamata in funzione della sua durata, in secondi, in base a ciascuna tariffa, chiamando F(t), G(t) le due funzioni trovate. Disegnare sullo stesso piano cartesiano il grafico delle due funzioni F(t) e G(t).
2) Calcolare $F^{-1}(20)$, $F^{-1}(20,5)$, $F^{-1}(30)$, $F^{-1}(32)$, $G^{-1}(30)$, $G^{-1}(32)$, dando l'intepretazione economica dei risultati trovati.
3) Sono le funzioni F e G limitate superiormente? Interpretare economicamente la risposta.
4) Se il credito disponibile sul nostro telefono è di 0.41 Euro, qual è la massima durata della prossima telefonata con ciascuna delle due tariffe?
5) Stabilire quale sia la tariffa è più conveniente a seconda della durata di una telefonata.

Esercizio 69 1) Può una funzione con insieme di definizione $\mathbb{R}$ essere sia pari che iniettiva?
2) Può una funzione dispari NON essere iniettiva sul suo dominio?
In ciascun caso si risponda SEMPRE GIUSTIFICANDO.

Esercizio 70 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}{2x}.$$

Dopo aver determinato $D(f)$:
1) si calcoli $f^{-1}(-\frac{11}{20})$ e si deduca se f può essere iniettiva sul suo dominio;
2) si calcoli $f^{-1}(y)$ per un generico y fissato. Controllando bene il segno delle controimmagini, si deduca qual è l'immagine di f e su quali intervalli f è iniettiva.

Esercizio 71 Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa GIUSTIFICANDO SEMPRE.
a) f monotona crescente strettamente su $D(f) \Rightarrow |f|$ è monotona.
b) $|f|$ è monotona su $A \subseteq D(f) \Rightarrow f$ è monotona.
c) Esiste una funzione non nulla continua f che non è monotona ma per cui $|f|$ è monotona.

Esercizio 72 Si disegni il grafico immediato di ciascuna delle seguenti funzioni, e lo si usi per determinare tutti i punti di massimo e minimo delle funzioni sul loro dominio, precisando se i corrispondenti valori estremi siano locali o globali:

$$f(x) = \left|\frac{1}{2} + \sin(x-1)\right|, \quad g(x) = |\ln(x+1) - 2|.$$

Esercizio 73 La relazione

$$S = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

lega l'ammontare R ed il numero n delle rate, il capitale S ed il tasso di interesse i se si stipula un mutuo *alla francese* per farsi prestare dalla banca un capitale S, si stabilisce di pagare rate annualmente e che gli interessi da corrispondere sono calcolati al tasso annuale i.
Siano $S = 100'000$ Euro ed $i = 4\%$. Determinare la minima durata n che consente di dover pagare una rata non superiore a 10'000 Euro. In quali passaggi si sfrutta la monotonia di funzioni elementari?

Esercizio 74 Tra tutti i rettangoli con perimetro pari a 8 m, determinare quello di area massima.

Esercizio 75 Si consideri sul piano caresiano il triangolo isoscele avente vertici nei punti di coordinate $(-1,0), A = (1,0), B = (0,1)$. Si considerino i rettangoli inscritti in tale triangolo ed aventi vertici $(-x,0), (x,0), P_1, P_2$ con P_1 sul lato AB del triangolo e P_2 sull'altro lato, dove $x \geq 0$.
1) Determinare l'equazione della retta contenente A e B e quindi l'espressione dell'ordinata y di P_1 in termini di x.
2) Scrivere l'area del rettangolo in termini di x.
3) Determinare il rettangolo così inscritto di area massima.

Esercizio 76 *Per la funzione* $f(x) = \sqrt{x} - 1$, *si determini la controimmagine dell'insieme* $[-4,3]$.

Esercizio 77 *Quale delle seguenti funzioni è pari?*

a) $f(x) = \sin(x)$; *b)* $f(x) = 2^x$; *c)* $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$; *d)* $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x}$

Esercizio 78 *Quale delle seguenti funzioni è dispari?*

a) $f(x) = \cos(x)$; *b)* $f(x) = 3^x$; *c)* $f(x) = x + |x|$; *d)* $f(x) = 2\tan(x)$

Esercizio 79 *Si determinino l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione*

$$f(x) = 1 + \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Esercizio 80 *Si dica quali delle seguenti funzioni sono dispari.*

$$f_1(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{x^2}}; \qquad f_2(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{x^2}};$$

$$f_3(x) = \sin^2(x) + \cos(x); \qquad f_4(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Esercizio 81 *Si dica quali delle seguenti funzioni sono pari.*

$$f_1(x) = \tan(x^2); \qquad f_2(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{x^2}};$$

$$f_3(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{x^2}}; \qquad f_4(x) = \cos^2(x) + \sin(x).$$

Esercizio 82 *Data* $f(x) = x^2 - 4x + 7$, *si determini l'immagine di* $[1, 5)$ *attraverso* f.

Esercizio 83 *Data* $f(x) = -x^2 + 4x + 2$, *si determini l'immagine di* $[1, 5)$ *attraverso* f.

Esercizio 84 *Sia* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e sia*

$$f(x) = x^2 + 4x + \alpha.$$

Si determini $\alpha \in \mathbb{R}$ *in modo che* $f(\mathbb{R}) = [-1, +\infty)$.

Esercizio 85 *Si determini per quali* $\alpha \in \mathbb{R}$ *la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & se\ x \leq 1 \\ -(x-2)^2 + \alpha & se\ x > 1 \end{cases}$$

è iniettiva.

Esercizio 86 *Sia* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e sia*

$$f(x) = -x^2 + 6x + \alpha.$$

Si determini $\alpha \in \mathbb{R}$ *in modo che* $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 1]$.

Esercizio 87 *Determinare per quali* $\alpha \in \mathbb{R}$ *la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & se\ x \leq 0 \\ (x-2)^2 + \alpha & se\ x > 0 \end{cases}$$

è iniettiva.

LIMITI

Esercizio 88 *Verificare se esistono o meno i limiti:*

$$i)\ \lim_{x \to 0} sgn(x);$$

$$ii)\ \lim_{x \to 0-} sgn(x);$$

$$iii)\ \lim_{x \to +\infty} \sin x;$$

$$iv)\ \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x};$$

$$v)\ \lim_{x \to 0+} \sin \frac{1}{x};$$

$$vi)\ \lim_{x \to 0} e^{1/\sin x}.$$

Esercizio 89 *Calcolare i limiti:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \frac{x}{2}}{x};$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \frac{2x}{3}}{x};$$

Esercizio 90 *Dimostrare che le funzioni*

$$f(x) = \sin x - \frac{x}{2}, \; g(x) = e^x - 1 - \frac{2x}{3}$$

sono positive in intervalli $(0, \delta)$*, quando* $\delta > 0$ *sono sufficientemente piccoli.*

Esercizio 91 *Ricordando le proprietà aritmetiche dei limiti ed i limiti notevoli, calcolare:*

$$i) \; \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x};$$
$$ii) \; \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1};$$
$$iii) \; \lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x};$$
$$iv) \; \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x^2 - x^3}{x}$$
$$v) \; \lim_{x\to 0+} (\cos x) e^{-\frac{1}{\sin x}}.$$

Esercizio 92 *Ricordando il Teorema del confronto calcolare i limiti:*

$$i) \; \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x};$$
$$ii) \; \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x - \frac{x}{2}}{x}$$

Esercizio 93 *Calcolare i limiti delle radici dell'equazione* $ax^2 + bx + c = 0$*, quando* $a \to 0$*, mentre* b *e* c *sono fissati.*

Calcolare i seguenti limiti.

Esercizio 94

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1 + (x-1)^3}$$

Esercizio 95

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1 + (x-1)^3}$$

Esercizio 96

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+|x-1|^3}$$

Esercizio 97

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{[1-\cos(3x^2-2x)][1-\sqrt{1-3x}]}{x^3}.$$

Esercizio 98

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x}-|x|$$

Esercizio 99

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

Esercizio 100

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x-x^2}{|\sqrt{x}-1|}$$

Esercizio 101

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{|-x^2+1|-|x^2-4x|}{3x+\sqrt{x}}$$

Esercizio 102

$$\lim_{x\to -\infty} \ln\left(\frac{1}{1+\sqrt{|x|}}\right)$$

Esercizio 103

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$$

Esercizio 104

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(x-1)(2x-3)}{|x^3-1|-|3x-x^3|}$$

Esercizio 105

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x-3}{e^{x+1}}$$

Esercizio 106

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x-3}{e^{x+1}}$$

Esercizio 107

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{|-x^3-x+2|-|3x+x^3|}{x-2\sqrt{x}}$$

Esercizio 108

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$$

Esercizio 109

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{|1+x-x^2|}-\sqrt{|3-x|}$$

Esercizio 110

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+x-x^3}-\sqrt{3-x}$$

Esercizio 111

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln\left[(1-2x)(1-\sqrt{1-x^2})\right]}{x^2}$$

Esercizio 112

$$\lim_{x\to1} \frac{e^x}{x-1}$$

Esercizio 113

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3-x+1}$$

Esercizio 114

$$\lim_{x\to0} \frac{5x^2\sin 3x}{x(1-\cos 2x)}$$

Esercizio 115

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}}$$

Esercizio 116 *Si calcoli*

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\log(3x)}{\log(x)}\right)^{\log(x)}.$$

Esercizio 117 *Si calcoli*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{3}{n}\right)-2\sin(\frac{1}{n})}{1-e^{\frac{2}{n}}}.$$

Esercizio 118 *Per quale delle seguenti funzioni si ha* $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$*?*

a) $f(x)=\sin(x)$*;* *b)* $f(x)=\cos(x)$*;* *c)* $f(x)=xe^x$*;* *d)* $f(x)=(\tan(x))(\sin(x))$

Esercizio 119 *Si calcoli*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log(x)}{\log(3x)}\right)^{-\log(x)}.$$

Esercizio 120 *Si calcoli*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{\frac{2}{n}}}{2\sin(\frac{1}{n})-\log\left(1+\frac{3}{n}\right)}.$$

Esercizio 121 *Per quale delle seguenti funzioni si ha* $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$*?*

a) $f(x)=\tan(x)$*;* *b)* $f(x)=e^x$*;* *c)* $f(x)=x\cos(x)$*;* *d)* $f(x)=\sqrt[3]{x}\sin(x)$

Esercizio 122 *Si calcoli*
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} + 7x^3 + \log(x)}{2x - 5x^4}$$

Esercizio 123 *Si calcoli*
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x) + 9x^5 + \sqrt{x}}{e^{\frac{1}{x}} + 6x^3}$$

Esercizio 124 *Si calcoli*
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-x}}{2x}$$

Esercizio 125 *Si calcoli*
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{4n-1} - \sqrt[3]{n}.$$

Esercizio 126 *Si calcoli*
$$\lim_{x\to 0} \frac{9x}{\sqrt{1+5x} - \sqrt{1+x}}$$

Esercizio 127 *Si calcoli*
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+4} - \sqrt[3]{2n}.$$

Esercizio 128 *Si calcoli*
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 + \sin^2(x)}$$

Esercizio 129 *Si determinino tutti i punti in cui la funzione* $f(x) = \frac{x(x+1)}{x^3-x^2}$ *presenta un asintoto verticale.*

Esercizio 130 *Si calcoli*
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2\tan^2(x)}{x^2 + 1 - \cos(x)}$$

Esercizio 131 *Si determinino tutti i punti in cui la funzione* $f(x) = \frac{x-1}{x^3-x}$ *presenta un asintoto verticale.*

Esercizio 132 *Si calcoli*
$$\lim_{x\to 0} \frac{x + e^{2x} - 1}{\log(1-x)}$$

Esercizio 133 *Si consideri la successione*
$$a_n = \begin{cases} 1 + \frac{\log(n^3)}{n}, & \text{se } n \text{ è dispari} \\ n^2 e^{-n}, & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Si stabilisca se esiste $\lim_{n\to\infty} a_n$ *e in caso affermativo si calcoli tale limite.*

Esercizio 134 *Si calcoli*
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-2x) + x}{e^{4x} - 1}$$

Esercizio 135 *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0}\,(1+\sin(x))^{\frac{2}{x}}$$

Esercizio 136 *Si calcoli*

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{x}{2}}$$

Esercizio 137 *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(x))}{\sin^2(x)}$$

Esercizio 138 *Si calcoli*

$$\lim_{n\to +\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$$

Esercizio 139 *Si calcoli*

$$\lim_{x\to +\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\log(x)$$

Esercizio 140 *Si calcoli*

$$\lim_{n\to +\infty}\sqrt{n}(n-\sqrt{n^2+6n})$$

Esercizio 141 *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0}\sin(x)\log(x)\exp\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Esercizio 142 *Si calcoli*

$$\lim_{x\to +\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\log(x)e^{\sin(x)}$$

Esercizio 143 *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x^2)}{1-\cos(x)}.$$

Esercizio 144 *Si calcoli*

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{\sqrt{n}}.$$

Esercizio 145 *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan\left(\sqrt{1-\cos(x)}\right)}{\sin(x)}.$$

Esercizio 146 *Si calcoli*

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^{n}.$$

FUNZIONI CONTINUE

Esercizio 147 *Per ciascuna delle seguenti funzioni (ognuna definita su $\mathbb{R}$) si individuino, se esistono, i punti di discontinuità:*

$$f_1(x) = \begin{cases} 3\cos(x) - 7^{\sin(x)} & \textit{se } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} & \textit{se } x > 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+14x-16}{2x^2-7x+5} & \textit{se } x < 1 \\ 2 & \textit{se } x = 1 \\ -4 + 5\cos(\frac{\pi}{2}x) - 2\sin(\frac{\pi}{2}x) & \textit{se } x > 1 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \log(1-x) + 8^x + 3 & \textit{se } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+8x}-1}{x+x^2} & \textit{se } x \in (0,3) \\ \frac{2\sqrt{x-2}}{12+x-x^2} & \textit{se } x \in [3,4) \cup (4,+\infty) \\ 7 & \textit{se } x = 4 \end{cases}$$

Esercizio 148 *Per ciascuna delle seguenti funzioni (ognuna definita su $\mathbb{R}$) si individuino, se esistono, i valori del parametro a, o dei parametri a e b, che rendono la funzione continua in $\mathbb{R}$:*

- *(a)* $f(x) = \begin{cases} 2 - ax + 3^x & \textit{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} & \textit{se } x > 1 \end{cases}$
- *(b)* $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \textit{se } x \leq 0 \\ \log(1+x) - a^2 & \textit{se } x > 0 \end{cases}$
- *(c)* $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \textit{se } x \leq 0 \\ e^{ax} - 1 & \textit{se } x > 0 \end{cases}$
- *(d)* $f(x) = \begin{cases} -2x + b & \textit{se } x \leq 1 \\ x^2 + ax + 1 & \textit{se } x \in (1,2) \\ x^3 - b & \textit{se } x \geq 2 \end{cases}$
- *(e)* $f(x) = \begin{cases} 2e^x - a & \textit{se } x \leq 0 \\ a^2 + \log(1+x) & \textit{se } x > 0 \end{cases}$
- *(f)* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} + 2a & \textit{se } x < 0 \\ a^2x - 1 & \textit{se } x \in [0,1] \\ x^2 - 1 & \textit{se } x > 1 \end{cases}$

- *(g)* $f(x) = \begin{cases} e^x + ax & \text{se } x \le 0 \\ x^2 - 6x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

- *(h)* $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 5 & \text{se } x < 0 \\ a + \cos x + 4\log(1+x) & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$

Esercizio 149 *Per ciascuna delle seguenti funzioni si determini $Im(f)$.*

- *(a)* $f : (0, 4] \to \mathbb{R}$ *tale che* $f(x) = \log_2 x + 5^x + 3x$;
- *(b)* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *tale che* $f(x) = -4x^3 + (\frac{1}{2})^x$;
- *(c)* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tale che* $f(x) = \log_3(x^2 - 2x + 8)$;
- *(d)* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tale che* $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 4x + 48}$.

Esercizio 150 *(a) Sapendo che f è continua nel punto $x_0 = 5$ e $f(5) = 2$, è possibile dedurre il segno di $f(4.9)$ o il segno di $f(5.01)$?*

(b) Per la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log x & \text{se } x \le 3 \\ x + 1 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

si determini il dominio e si dica se sono soddisfatte le ipotesi del teorema della permanenza del segno nei seguenti punti:

$$x_0 = -1,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4$$

Esercizio 151 *Quale delle seguenti funzioni non è continua in 0? Giustificare.*

a) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ *per* $x \neq 0$ *e* $f(0) = 1$; *b)* $f(x) = \dfrac{2x}{e^x - 1}$ *per* $x \neq 0$ *e* $f(0) = \dfrac{1}{2}$;
c) $f(x) = 0$ *per* $x \le 0$ *e* $f(x) = x^2$ *per* $x > 0$.

Esercizio 152 *Quale delle seguenti funzioni non è continua in 0?*

a) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ *per* $x \neq 0$ *e* $f(0) = 1$; *b)* $f(x) = \dfrac{2x}{\sin(x)}$ *per* $x \neq 0$ *e* $f(0) = 2$;
c) $f(x) = 0$ *per* $x \le 0$ *e* $f(x) = 1 + \sin x$ *per* $x > 0$.

Esercizio 153 *Quale delle seguenti funzioni è continua in 1?*

a) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{|x-1|}$ *per* $x \neq 1$ *ed* $f(1) = 1$; *b)* $f(x) = \dfrac{e^x - e}{x - 1}$ *per* $x \neq 1$ *ed* $f(1) = e$;
c) $f(x) = \dfrac{\log(|x-1|)}{|x-1|}$ *per* $x \neq 1$ *ed* $f(1) = 1$; *d)* $f(x) = 1$ *per* $x \le 1$ *ed* $f(x) = x^2 + 1$ *per* $x > 1$

Esercizio 154 *Quale delle seguenti funzioni è continua in 1?*

a) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{\cos(\pi x)}$ *per* $x \neq 1$ *ed* $f(1) = 0$; *b)* $f(x) = \dfrac{|e^x - e|}{x - 1}$ *per* $x \neq 1$ *ed* $f(1) = e$;
c) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{\log(|x-1|)}$ *per* $x \neq 1$ *ed* $f(1) = 1$; *d)* $f(x) = 0$ *per* $x \ge 1$ *ed* $f(x) = x$ *per* $x < 1$

BISEZIONE e TEOREMI degli ZERI e di ROLLE

Esercizio 155 *Per l'equazione* $\frac{1}{8}x^3 + 2x = 3$ *si utilizzi il teorema di esistenza degli zeri al fine di stabilire l'esistenza di una soluzione nell'intervallo* $(0, 2)$*; si provi inoltre che tale intervallo contiene un'unica soluzione dell'equazione. Si impieghi l'algoritmo di bisezione per trovare un valore di* x *che differisce meno di* $\frac{1}{16}$ *dalla soluzione in* $(0, 2)$.

Per ciascuna della seguenti equazioni si dica se è possibile utilizzare il teorema di esistenza degli zeri al fine di stabilire l'esistenza di una soluzione nell'intervallo indicato a fianco dell'equazione. Nei casi in cui questo non è possibile, è possibile stabilire in un altro modo l'esistenza di una soluzione nell'intervallo? In quali casi è possibile stabilire l'esistenza di un'unica soluzione nell'intervallo?

- *(a)* $2x^3 - 13x^2 + 26x = 15$*;* $(0, 4)$.
- *(b)* $-x^3 + 3 = \log_2 x$*;* $(1, 2)$.
- *(c)* $6\sqrt{x} = 2^x - 3$*;* $(1, 3)$.
- *(d)* $f(x) = 0$, *con* $f(x) = \begin{cases} 5 - x^4 - x^5 & \text{se } x < 1 \\ 6 + 2x^4 - 5x^3 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ *;* $(0, 2)$.
- *(e)* $x^3 = 1 - x^4$*;* $(-2, 1)$.
- *(f)* $f(x) = 0$, *con* $f(x) = \begin{cases} -4 + \sin(\pi x) + x & \text{se } x < 2 \\ \frac{1}{2}x^3 - 3 + \frac{1}{x} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$ *;* $(0, 3)$.

Esercizio 156 *Dopo aver enunciato il teorema degli zeri (o teorema di Bolzano) lo si applichi per dimostrare che l'equazione*

$$x^5 + 2\,x - 1 = 0$$

ammette una soluzione nell'intervallo $(0, 1)$. *Si dimostri che tale soluzione è unica e se ne determini una sua approssimazione a meno di* $\frac{1}{10}$.

Esercizio 157 *Dopo aver enunciato il teorema di Rolle lo si applichi per dimostrare che la funzione*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f := x \mapsto x^4 + 6\,x^2 - 7\,x$$

ammette almeno un massimo o minimo globale nell'intervallo $(0, 1)$.
Utilizzando il Teorema di Fermat si dimostri che tale minimo è unico e se ne determini una sua approssimazione a meno di $\frac{1}{10}$.

Esercizio 158 *Dopo aver enunciato il teorema di Rolle lo si applichi per dimostrare che la funzione*

$$f := x \mapsto x^4 - 6\,x^2 + 5\,x, \quad x \in [0, 1]$$

ammette almeno un punto $c \in (0, 1)$ *in cui si annulla la derivata.*

- *Tale punto è unico ?*

- *Nel caso in cui sia unico dire se si tratta di un punto di massimo o di minimo?*
- *Determinarne una sua approssimazione con un errore inferiore a* $\frac{1}{10}$.

Esercizio 159 *Dopo aver enunciato il teorema degli zeri (o di Bolzano) lo si applichi per dimostrare che l'equazione*

$$4x^3 + 6x - 4 = 0$$

ammette un'unica soluzione nell'intervallo $[0,1]$ *e se ne calcoli il valore approssimato con un errore inferiore a* $\frac{1}{7}$.

Esercizio 160 *(Utilizzare una calcolatrice scientifica) Determinare quante soluzioni ha l'equazione*

$$e^x = 3\,x$$

ed approssimarne una, facendo uso del metodo di bisezione, con un errore inferiore ad 1/7.

Esercizio 161 *Studiare l'equazione*

$$\sqrt{x} + \log(x) = 2$$

per determinare quante soluzioni può avere.

Dopo avere individuato un possibile intervallo che contenga una soluzione, calcolarla in modo approssimato facendo uso del metodo di bisezione, con un errore inferiore ad 1/7.

DERIVATE

Esercizio 162 *Si calcoli la derivata della funzione*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & se \quad x \le 0 \\ x & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Esercizio 163 *Se possibile, si calcoli la derivata della funzione*

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \max\left\{\sqrt{x} - 1, 1 - x\right\}$$

Esercizio 164 *Si dimostri che la seguente funzione è derivabile e che la sua derivata non è continua.*

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 \sin\frac{1}{x} & se & x \neq 0 \\ 0 & se & x = 0 \end{array} \right\}.$$

Esercizio 165 *Se possibile, si calcoli la derivata della funzione*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \begin{cases} -1 & se \quad x < 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ +1 & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Esercizio 166 *Assumendo che f, g e h siano derivabili, si calcolino le derivate di*

a. $\ln^n x$;

b. $f(g(x) \cdot h(x)) + g(f(x) \cdot h(x))$.

Esercizio 167 *Si dica se la funzione*

$$f : [0, e] \to \mathbb{R}, \qquad f : x \longmapsto \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 & se \quad x < 1 \\ \\ \log x & se \quad x \geq 1 \end{cases}$$

soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle.

Esercizio 168 *Si calcoli*

$$L \equiv \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$

Esercizio 169 *Si calcoli*

$$L \equiv \lim_{x \to 0^+} x^x$$

Esercizio 170 *Si calcolino i seguenti limiti:*

i. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)+1-\cos x}{x^2}$;

ii. $\lim_{x \to 0} \frac{2\cos x + e^{x^2} - 3}{x^2 + x}$;

iii. $\lim_{x \to 2} \frac{\log\left(x^2 - 4x + 5\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)}$;

iv. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$.

Esercizio 171 *Si calcolino eventuali punti di massimo e minimo locale della funzione*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f : x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 2$$

Esercizio 172 *Si studi la seguente funzione e se ne tracci un grafico, tralasciando lo studio della derivata seconda*

$$f(x) = \frac{e^x}{|x^2 - 1|}.$$

Esercizio 173 *Si determino eventuali punti di massimo locale e globale e punti di minimo locale e globale di f.*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} |\sin x| & se \qquad x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \\ \\ x & se \qquad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Esercizio 174 *Dati $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, usando la definizione di derivata, si verifichi che la seguente funzione non è derivabile:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad\qquad f(x) = |ax - b|$$

Esercizio 175 *Si determini il valore di* $k \in \mathbb{R}$ *in modo che il grafico di*

$$f_k(x) = \frac{k^2 x - k}{2k + x}$$

a. passi per il punto di coordinate $(1, -2)$, *e*
b. abbia derivata in $x = 1$ *uguale al coefficiente angolare della retta di equazione* $y = -3x + 1$.

Esercizio 176 *Siano date le funzioni*

$$f : (2, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x+1}{x-2},$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \textit{ derivabile e tale che}$$

$$\textit{1. } \forall y \in \mathbb{R}, \quad g'(y) > 0, \ \textit{ 2. } \forall y \in \mathbb{R}, \quad g''(y) > 0, \ \textit{ e 3. } \lim_{y \to +\infty} g(y) = +\infty,$$

e

$$h : (2, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = (g \circ f)(x).$$

a. si dica per quale sottoinsieme del proprio dominio la funzione h *è crescente o decrescente;*
b. si dica per quale sottoinsieme del proprio dominio la funzione h *è concava o convessa;*
c. si dica se la funzione h *ammetta massimo globale.*

Esercizio 177 *Si studi la seguente funzione e se ne tracci un grafico*

$$f(x) = \frac{e^x}{|x^2 - 1|}$$

Si tralasci lo studio della derivata seconda.

Esercizio 178 *Si studi la seguente funzione e se ne tracci un grafico*

$$f(x) = \frac{-e^x}{x^2 - 1}$$

Esercizio 179 *Sia data una funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivabile almeno due volte e tale che* $f(e) = 1$, $f'(e) = 1$ *e* $f''(e) = 0$. *Si scrivano il* polinomio *di Taylor in* $x_0 = 1$ *e la proprietà del resto, per la funzione* $g(x) = f\left(x^2 e^x\right)$.

Esercizio 180 *Studiare la funzione*

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x - 1}$$

determinando anche concavità e convessità.

Esercizio 181 *Siano date le funzioni* $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivabili e crescenti, con* $g(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. *Siano* $a, b \in (0, +\infty)$. *Si dica se le funzioni* $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *descritte di seguito sono crescenti:*

a.
$$\phi_1(x) = h(af(x) + bg(x)),$$

b.
$$\phi_2(x) = h(af(x) + bg(x)) + \ln g(x),$$

c.
$$\phi_3(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Esercizio 182 *Si disegni il grafico di*

$$f(x) = e^{-x} \sin x.$$

Si tralasci lo studio della derivata seconda.

Esercizio 183 *Si determini un numero razionale che approssimi* $\sqrt[5]{e} - 1$ *a meno di un errore pari a* 10^{-3}.

Esercizio 184 *Si determini il numero di soluzioni reali dell'equazione*

$$\log(|x^2 + 2x|) + \alpha = 0,$$

al variare del parametro α.

Esercizio 185 *Si determini il numero di soluzioni reali dell'equazione*

$$\log(|x^2 - 2x|) - \alpha = 0,$$

al variare del parametro α.

Esercizio 186 *Si calcoli l'estremo inferiore della funzione*

$$f(x) = \max\left\{x^2 - e^x, x|x| - 2\right\}.$$

Esercizio 187 *Si calcoli l'estremo superiore della funzione*

$$f(x) = \min\left\{e^x - x^2, 3 - x|x|\right\}.$$

Esercizio 188 *Si determinino, se esistono, i punti di minimo della funzione*

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x\cos(x) - \sin(x).$$

Esercizio 189 *Si determinino, se esistono, i punti di massimo della funzione*

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x\cos(x) - \sin(x).$$

Esercizio 190 *In quale dei seguenti intervalli la funzione* $f(x) = \frac{1}{x} + \log(x)$ *è monotona decrescente?*

$$a)\ (0,1); \qquad b)\ \left(\frac{1}{2}, 2\right); \qquad c)\ (1,e); \qquad d)\ (3,+\infty)$$

Esercizio 191 *Si scriva il Polinomio di Taylor di primo grado relativo alla funzione* $f(x) = \log(e^x + x)$ *in* 0.

Esercizio 192 *Sia* $f(x) = \sin(e^x)$ *definita in tutti i punti di* $\mathbb{R}$ *in cui tale espressione ha senso. Si determinino, se esistono, i punti in cui la* f *presenta un minimo relativo.*

Esercizio 193 *Si scriva il Polinomio di Taylor di primo grado relativo alla funzione* $f(x) = e^x + \log(1+x) - 1$ *in* 0.

Esercizio 194 *Sia* $f(x) = \cos(\log(x))$ *definita in tutti i punti di* $\mathbb{R}$ *in cui tale espressione ha senso. Si determinino, se esistono, i punti in cui la* f *presenta un massimo relativo.*

Esercizio 195 *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *con* $A \subseteq \mathbb{R}$. *Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

a) Se $f(x) > 0$ *per ogni* $x \in A$ *e* f *è crescente, allora la funzione* g *definita come* $g(x) = 1/f(x)$ *è decrescente.*

b) Se $f(x) > 0$ *per ogni* $x \in A$ *e* f *è crescente, allora la funzione* g *definita come* $g(x) = 1/f(x)$ *è crescente.*

c) Se $f(x) < 0$ *per ogni* $x \in A$ *e* f *è crescente, allora la funzione* g *definita come* $g(x) = 1/f(x)$ *è crescente.*

d) Se $f(x) < 0$ *per ogni* $x \in A$ *e* f *è crescente, allora la funzione* g *definita come* $g(x) = 1/f(x)$ *è decrescente.*

Esercizio 196 *In quale dei seguenti intervalli la funzione* $f(x) = x - \cos(x)$ *è concava?*

$$a)\ (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}); \qquad b)\ (0, \frac{\pi}{2}); \qquad c)\ (\frac{\pi}{2}, \pi); \qquad d)\ (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$$

Esercizio 197 *In quale dei seguenti intervalli la funzione* $f(x) = e^{2x} - 3x$ *è monotona crescente?*

$$a)\ (0, \log\frac{3}{2}); \qquad b)\ (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \qquad c)\ (0,1); \qquad d)\ (\frac{1}{2}, 2)$$

Esercizio 198 *Si scriva il Polinomio di Taylor di secondo grado relativo alla funzione* $f(x) = \exp(\log(x) - x + 1)$ *in* 1.

Esercizio 199 *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *con* $A \subseteq \mathbb{R}$. *Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera.*

a) Se $f(x) > 0$ *per ogni* $x \in A$ *e* f *è crescente, allora la funzione* g *definita come* $g(x) = \log f(x)$ *è decrescente.*

b) Se $f(x) > 0$ *per ogni* $x \in A$ *e* f *è crescente, allora la funzione* g *definita come* $g(x) = \log f(x)$ *è crescente.*

c) Se $f(x) > 0$ per ogni $x \in A$ e f è crescente, allora la funzione g definita come $g(x) = \log(1/f(x))$ è crescente.

d) Se $f(x) > 0$ per ogni $x \in A$ e f è crescente, allora la funzione g definita come $g(x) = \log(1/f(x))$ è decrescente.

Esercizio 200 *In quale dei seguenti intervalli la funzione $f(x) = \sin(x) + x$ è convessa?*

a) $(-\pi, \pi)$; *b)* $(0, \frac{\pi}{2})$; *c)* $(0, \pi)$; *d)* $(\pi, 2\pi)$

Esercizio 201 *In quale dei seguenti intervalli la funzione $f(x) = 2x - e^{x+1}$ è monotona crescente?*

a) $(-1, 1)$; *b)* $(-\frac{1}{2}, 0)$; *c)* $(-1, 0)$; *d)* $(-2, -\frac{1}{2})$

Esercizio 202 *Si scriva il Polinomio di Taylor di secondo grado relativo alla funzione $f(x) = \exp\left(1 - x^2 + \log(x)\right)$ in 1.*

Esercizio 203 *Si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = e^x - \log(1 + x)$ nel punto in cui esso interseca l'asse delle y.*

Esercizio 204 *Data la funzione $f(x) = 3x^5 - 15x^4 + 20x^3 + 11x - 2$ si determinino, se esistono, le ascisse di tutti i suoi punti di flesso.*

Esercizio 205 *Si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \cos(x) + \log(1 - x)$ nel punto in cui esso interseca l'asse delle y.*

Esercizio 206 *Data la funzione $f(x) = 3x^5 - 20x^4 + 30x^3 + 9x - 17$ si determinino, se esistono, le ascisse di tutti i suoi punti di flesso.*

Esercizio 207 *Si scriva il Polinomio di Taylor di primo grado relativo alla funzione $f(x) = e^{-x} + \log\left(1 + 2x^2\right)$ in 0.*

Esercizio 208 *Sia $f(x) = \log\left(x^2 - 3\right)$ definita in tutti i punti di $\mathbb{R}$ in cui tale espressione ha senso. Si determinino, se esistono, i punti in cui la f presenta un flesso.*

Esercizio 209 *Si scriva il Polinomio di Taylor di primo grado relativo alla funzione $f(x) = e^{2x} + \log\left(1 + x^2\right) + 1$ in 0.*

Esercizio 210 *Sia $f(x) = \log\left(x^2 + 3\right)$ definita in tutti i punti di $\mathbb{R}$ in cui tale espressione ha senso. Si determinino, se esistono, i punti in cui la f presenta un flesso.*

Esercizio 211 *Si determini l'equazione della retta tangente, nel punto di ascissa π, al grafico della funzione $f(x) = 2\sin(x) + \log(x + \sin(x))$.*

Esercizio 212 *In quale dei seguenti intervalli la funzione $f(x) = e^{3x} + e^{-3x}$ è monotona decrescente?*

a) $(-\infty, +\infty)$; *b)* $(-\infty, 0)$; *c)* $(0, +\infty)$; *d)* $\mathbb{R}$

Esercizio 213 *Si determinino l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione*

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2} + 1\right).$$

Esercizio 214 *Si determini l'equazione della retta tangente, nel punto di ascissa* $\frac{\pi}{2}$*, al grafico della funzione* $f(x) = \cos(x) + \log(x + \cos(x))$.

Esercizio 215 *In quale dei seguenti intervalli la funzione* $f(x) = e^{2x} - e^{-2x}$ *è monotona decrescente?*

a) $(-\infty, +\infty)$*;* *b)* $(-\infty, 0)$*;* *c)* $(0, +\infty)$*;* *d)* $\mathbb{R}$.

Esercizio 216 *Si determini l'equazione della retta tangente, nel punto di ascissa* $x_0 = 0$*, al grafico della funzione* $f(x) = \cos(1 - e^x) + \sin(1 - e^x)$.

Esercizio 217 *In quale dei seguenti intervalli la funzione* $f(x) = \sin(3x)$ *è concava?*

a) $(0, \frac{\pi}{2})$*;* *b)* $(-\frac{\pi}{2}, 0)$*;* *c)* $(0, \frac{\pi}{3})$*;* *d)* $(-\frac{\pi}{3}, 0)$

Esercizio 218 *Si determini l'equazione della retta tangente, nel punto di ascissa* e*, al grafico della funzione* $f(x) = \sin(x - e) + \log(x)$.

Esercizio 219 *In quale dei seguenti intervalli la funzione* $f(x) = \tan(2x)$ *è convessa?*

a) $(0, \frac{\pi}{2})$*;* *b)* $(-\frac{\pi}{2}, 0)$*;* *c)* $(0, \frac{\pi}{4})$*;* *d)* $(-\frac{\pi}{4}, 0)$

Esercizio 220 *Si determini l'equazione della retta tangente, nel punto di ascissa* $-\frac{\pi}{4}$*, al grafico della funzione* $f(x) = e^{\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} - \tan(x)$.

Esercizio 221 *In quale dei seguenti intervalli la funzione* $f(x) = \log\left(x^2 + 1\right)$ *è concava?*

a) $(0, +\infty)$*;* *b)* $(1, +\infty)$*;* *c)* $(-\infty, 0)$*;* *d)* $(-\infty, 1)$

Esercizio 222 *Si determini l'equazione della retta tangente, nel punto di ascissa* $\frac{\pi}{4}$*, al grafico della funzione* $f(x) = \tan(x) - e^{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

Esercizio 223 *In quale dei seguenti intervalli la funzione* $f(x) = \log\left(2 + 2x^2\right)$ *è convessa?*

a) $(0, +\infty)$*;* *b)* $(1, +\infty)$*;* *c)* $(-1, 0)$*;* *d)* $(-\infty, 0)$

Esercizio 224 *Si determini l'equazione della retta tangente, nel punto di ascissa* $\pi/4$*, al grafico della funzione* $f(x) = (x - \pi/4) - \tan(x)$

Esercizio 225 *Quali sono i punti di flesso della funzione* $f(x) = e^{3-2x^2}$*?*

Esercizio 226 *Si determini l'equazione della retta tangente, nel punto di ascissa* $\pi/2$*, al grafico della funzione* $f(x) = (x - \pi/2)\sin(x)$.

Esercizio 227 *Quali sono i punti di flesso della funzione* $f(x) = e^{2-x^2}$*?*