CAPITOLO XI

FUNZIONI

1. Se è: $f(x) = x^4 - 4x^2 + 6x - 1$, provare che risulta: $f(3) = 62$, $f(0) = -1$, $f(-2) = -13$.

2. Se è: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, dimostrare che risulta: $f(2) + 2f(0) = f(1)$.

3. Se è: $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$, provare che risulta: $f(3) = \dfrac{1}{5}\sqrt{15}$, $f(0) = 0$, $f(-1) = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}$.

Determinare l'insieme di esistenza delle seguenti funzioni:

4. $y = \dfrac{x+5}{x^2-5x+4}$. $[x \neq 1 \;\; e \;\; x \neq 4]$

5. $y = \dfrac{3x+8}{x^2-2x+7}$. [*Esiste per ogni valore della x*]

6. $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{3-x}$. $[2 \leq x \leq 3]$

7. $y = \sqrt{x^2-5x+4}$. $[x \leq 1 \;\; e \;\; x \geq 4]$

8. $y = \sqrt[4]{\dfrac{x+2}{7-x}}$. $[-2 \leq x < 7]$

9. $y = \sqrt{x^3-4x^2+3x}$. $[0 \leq x \leq 1 \;\; e \;\; x \geq 3]$

10. $y = \sqrt{\dfrac{x-4}{x+3}}$. $[x < -3 \;\; e \;\; x \geq 4]$

11. $y = \sqrt{-2x^2+3x+5}$. $\left[-1 \leq x \leq \dfrac{5}{2}\right]$

12. $y = \log_{10}(x^2-5x)$. $[x < 0 \;\; e \;\; x > 5]$

13. $y = \log_{10}(x^3-x^2-30x)$. $[-5 < x < 0 \;\; e \;\; x > 6]$

14. $y = \log_{10}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right)$. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x \leq 1\right]$

15. $y = \log_{10}\log_{10}(x+3)$. $[x > -2]$

16. $y = x - \sqrt{x^2-1}$. $[x \leq -1 \;\; e \;\; x \geq 1]$

17. $y = \sqrt{\log_{10}(x^2-8x+8)}$. $[x \leq 1 \;\; e \;\; x \geq 7]$

18. $y = \sqrt{\dfrac{x^2-x}{x^2-5x+6}}$. $[x \leq 0,\; 1 \leq x < 2,\; x > 3]$

19. $y = \dfrac{\sqrt{-x^2+6x-5}}{\log_{10}(x^2-5x+6)}$.
$\left[1 \leq x < \dfrac{5-\sqrt{5}}{2},\; \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} < x < 2,\; 3 < x < \dfrac{5+\sqrt{5}}{2},\; \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} < x \leq 5\right]$

20. $y = \log_{10}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-2}}$. $[x < -\sqrt{2},\; \sqrt{2} < x < 2,\; x > 4]$

21. $y = \log_{10}(3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3)$. $[x < 0 \;\; e \;\; x > 1]$

22. $y = \dfrac{x}{\operatorname{tg} x}$. $\left[x \neq k\pi \;\; e \;\; x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, \text{ con } k \text{ numero intero qualsiasi}\right]$

23. $y = x + \log\cos x$. $\left[k \cdot 2\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\; \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi < x \leq 2\pi + k \cdot 2\pi\right]$

24. $y = \dfrac{x}{\log \operatorname{sen} x}$. $\left[2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\; \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi\right]$

25. $y = \dfrac{\sqrt{x^2-5} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{-x^2-3x}}$. $\left[-3 < x < -\sqrt{5}\right]$

26. $y = \sqrt{3 + 2\cos x - \cos^2 x}$. [*Per ogni valore della x*]

Determinare l'insieme di esistenza delle seguenti funzioni:

27. $y = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x-2}$.

28. $y = \dfrac{3-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

29. $y = \sqrt{x^2-25} - \sqrt{49-x^2}$.

30. $y = \log_{10}\dfrac{x^2-4}{x(x+1)}$.

31. $y = \log_{10} \dfrac{9 - x^2}{x(x-2)}$.

32. $y = \sqrt{\log_{10}(x^2 - 1)}$.

33. $y = \sqrt{\log_{10}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2x}\right)}$.

34. $y = \dfrac{\log_{10}(x^2 - 4x + 3)}{\sqrt{-x^2 + 4x + 5}}$.

35. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{25 - x^2}}$.

36. $y = x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

37. $y = \sqrt[3]{\log_{10}(x^2 - x - 2)}$.

38. $y = \sqrt[5]{\dfrac{x + \log_{10}(x+1)}{x^2 - 4}}$.

Disegnando su carta millimetrata, tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

39. $y = x^3$, dando alla x i valori: -2; $-\dfrac{3}{2}$; -1; $-\dfrac{1}{2}$; 0; $\dfrac{1}{2}$; 1; $\dfrac{3}{2}$; 2.

40. $y = x^2 - 3x$, dando alla x i valori: 0; ± 1; ± 2; ± 3; ± 4; ± 5.

41. $y = \dfrac{1}{x}$, dando alla x i valori: ± 1; ± 2; ± 3; $\pm\dfrac{1}{2}$; $\pm\dfrac{1}{3}$.

42. $y = \sqrt{x}$, dando alla x i valori: 0; 1; 2; 3; 4; 5.

43. $y = \sqrt{1 - x^2}$, dando alla x i valori: ± 1; $\pm 0{,}8$; $\pm 0{,}6$; 0.

44. $y = \sqrt{x^2 - 1}$, dando alla x i valori: ± 1; ± 2; ± 3; ± 4; ± 5.

45. $y = |x|(1 - |x|)$, dando alla x i valori: 0; $\pm\dfrac{1}{2}$; ± 1; $\pm\dfrac{3}{2}$; ± 2.

46. $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$, dando alla x i valori: 0; 1; 2; 3; 4.

Disegnare i diagrammi delle seguenti funzioni, definite nell'insieme indicato a fianco di ciascuna:

47. $y = (x-1)^3$, $\qquad -3 \le x \le 5$.

48. $y = \log_2 x$, $\qquad \dfrac{1}{64} \le x \le 16$.

49. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $\qquad \dfrac{1}{16} \le x \le 32$.

50. $y = 2^x$, $\qquad -4 \le x \le 4$.

51. $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-x}$, $\qquad -4 \le x \le 4$.

52. $y = \begin{cases} -x & \textit{per} \quad x < -1 \\ 0 & \textit{per} \quad -1 \le x \le 1 \\ x & \textit{per} \quad x > 1 . \end{cases}$

53. $y = \begin{cases} -1 & \textit{per} \quad x < -1 \\ x & \textit{per} \quad -1 \le x \le 1 \\ 1 & \textit{per} \quad x > 1 . \end{cases}$

54. $y = \begin{cases} -(x+1) & \textit{per} \quad -4 \le x < -1 \\ -x^2 + 1 & \textit{per} \quad -1 \le x \le 1 \\ x - 1 & \textit{per} \quad 1 < x \le 4 . \end{cases}$

55. $y = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \textit{per} \quad -6 \le x < -2 \\ -x^2 + 4 & \textit{per} \quad -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 6x + 8 & \textit{per} \quad 2 < x \le 6 . \end{cases}$

56. $y = \begin{cases} -x^2 - 4x & \textit{per} \quad -6 \le x \le -2 \\ 2|x| & \textit{per} \quad -2 < x < 2 \\ -x^2 + 4x & \textit{per} \quad 2 \le x \le 6 . \end{cases}$

57. $y = \begin{cases} x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} & \textit{per} \quad x \ne 0 \\ 1 & \textit{per} \quad x = 0 . \end{cases}$

58. $y = \begin{cases} \dfrac{|x-1| \cdot |x-2|}{(x-1)(x-2)} & \textit{per} \quad x \ne 1 \;\; e \;\; x \ne 2 \\ 0 & \textit{per} \quad x = 1 \;\; e \;\; x = 2 . \end{cases}$

59. $y = \sqrt{x \cdot [x] + 1}$ $\quad$ *per* $\; -1 \le x \le 2$,
dove $[x]$ è la funzione definita nel n. 6, esempio 3°, Cap. XI.

60. $y = (-1)^{[x]} \cdot x$.