

CAPITOLO XII

Costruire il grafico delle seguenti curve rappresentate in equazioni polari:

1. $\rho = \operatorname{tg} \vartheta$.
2. $\rho = 1 - 2 \operatorname{sen} \vartheta$.
3. $\rho^2 = \operatorname{sen} \vartheta$.
4. $\rho = 1 - \cos 2\vartheta$.
5. $\rho^2 = \operatorname{sen} 2\vartheta$.
6. $\rho = \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2}$.
7. $\rho = \cos \frac{\vartheta}{2}$.
8. $\rho = \cos 3\vartheta$.
9. $\rho = \operatorname{sen} 3\vartheta$.

Trasformare le seguenti equazioni, date in coordinate cartesiane, in coordinate polari:

10. $xy = 7$.
11. $x^2 + y^2 - 8ax - 8ay = 0$.
12. $x^4 + x^2y^2 - a^2y^2 = 0$.
13. $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)$.

Costruire il grafico delle seguenti curve rappresentate in equazioni parametriche:

14. $x = t^2, y = t + 1$.
15. $x = \frac{4}{t^2}, y = \frac{4}{t}$.
16. $x = \frac{2}{1+t^2}, y = \frac{2}{t(1+t^2)}$.

CAPITOLI XIII-XIV

LIMITI

Servendosi della definizione di limite, dimostrare che si ha:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$.
2. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 1) = 10$.
3. $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} = 3$.
4. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = 2$.

5. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x+6} = 2$.
6. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 5) = 4$.
7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = 5$.
8. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} = 7$.
9. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = -5$.
10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = 2$.
11. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 2$.
12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 1} = -5$.
13. $\lim_{x \rightarrow 2} \log_{10} x = \log_{10} 2$.
14. $\lim_{x \rightarrow 2} 10^x = 100$.
15. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 1} = -2$.

Servendosi della definizione di limite, dimostrare che si ha:

16. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5}{x - 3} = \infty$.
17. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} - 2} = \infty$.
18. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x - 1)^2} = +\infty$.
19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 5}{x^2} = -\infty$.
20. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{(x + 1)^2} = -\infty$.
21. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 + x^{20}}{(x - 3)^2} = +\infty$.
22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.
23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{1 + x} = 2$.
24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{5x^2 + 3} = \frac{2}{5}$.
25. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{1 - x}{x^2}} = 0$.
26. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{4}{x}} = 1$.
27. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{x} = +\infty$.
28. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{2 - x} = +\infty$.
29. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{10}(x^2 - 3) = +\infty$.
30. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 4) = +\infty$.

Servendosi dei teoremi enunciati sui limiti e ricordando la continuità delle funzioni elementari, dimostrare che si ha:

$$31. \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x + 5) = 9.$$

$$32. \lim_{x \rightarrow 4} (2x + \sqrt{x} - 1) = 9.$$

$$33. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+5}{2x-3} = -\frac{5}{3}.$$

$$34. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{5x} = 0.$$

$$35. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}}{2x} = \frac{3}{4}.$$

$$36. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2x}{\cos x} = 1.$$

$$37. \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+6} - \sqrt{1+x}) = 1.$$

$$38. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x}{\sqrt{x+4}} = \frac{10}{3}.$$

$$39. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+3}{1+\cos x} = \frac{3}{2}.$$

$$40. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin x - 2}{x} = \frac{2}{\pi}.$$

$$41. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + 5}{x+1} = 5.$$

$$42. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \cdot \sin x - 2 \cos x}{x} = \frac{3}{2\pi}.$$

$$43. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (\arcsin x + 2x) = \frac{\pi}{6} + 1.$$

$$44. \lim_{x \rightarrow -1} (\arccos x + 2x) = \pi + \frac{1}{2}.$$

$$45. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} = \infty.$$

$$46. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin x + 1}{\cos x} = \infty.$$

$$47. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{3 + \cos x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = 0.$$

$$48. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x} = 0.$$

$$49. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (x + \operatorname{tg} x) = +\infty.$$

$$50. \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{\frac{x-4}{x+3}} = +\infty.$$

$$51. \lim_{x \rightarrow 2^+} \log_{10}(x^2 - 2x) = -\infty.$$

$$52. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x}{x} = \infty.$$

$$53. \lim_{x \rightarrow +\infty} 5^{\frac{1}{x}} = 1.$$

$$54. \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{10} \sin x = -\infty.$$

$$55. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \log x) = +\infty.$$

$$56. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{1+e^x} = -\infty.$$

$$57. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{\log x} = 0.$$

$$58. \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}(1+e^x) = \frac{\pi}{4}.$$

$$59. \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{\log x} = 0.$$

$$60. \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcsen} \frac{1}{2+e^x} = \frac{\pi}{6}.$$

$$61. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2-x} = 0.$$

$$62. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\operatorname{arctg} x} = \frac{2}{\pi}.$$

$$63. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^3}} = \frac{3}{2}.$$

$$64. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cotg x} = 0.$$

$$65. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \log x \right) = +\infty.$$

$$66. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\log x - \cotg x) = -\infty.$$

$$67. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x}}{\sin \frac{1}{x}} = \infty.$$

$$68. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(1-x)}{2^x} = +\infty.$$

$$69. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+x}} = 0.$$

$$70. \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x^3} + x \right) = -\infty.$$

$$71. \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + \cos x) = +\infty.$$

$$72. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0.$$

Calcolare il limite delle seguenti funzioni razionali fratte che si presentano sotto forma indeterminata $\frac{0}{0}$, dimostrando che si ha ⁽¹⁾:

$$73. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{5} \quad (\text{Si divida numeratore e denominatore per } x - 2).$$

$$74. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^2 - 1} = \frac{3}{2} \quad (\text{Si divida numeratore e denominatore per } x - 1).$$

$$75. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 5} = 0.$$

$$76. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x + 9} = \infty.$$

$$77. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^2 - x - 2} = 0.$$

$$78. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 10x + 25} = \infty.$$

$$79. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{3x^2 - x - 10} = \frac{7}{11}.$$

$$80. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^2 - x - 6} = 0.$$

$$81. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + 2x - 7}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \infty.$$

$$82. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} = \frac{3}{4}.$$

$$83. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x} = 3.$$

$$84. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = 4.$$

$$85. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 10x + 21} = \frac{1}{2}.$$

$$86. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 2x + 1} = \infty.$$

$$87. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 - x^2 - 4x + 3} = \frac{3}{5}.$$

$$88. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \frac{3}{4}.$$

$$89. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{3}{2}.$$

$$90. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x} = 0.$$

Calcolare il limite delle seguenti funzioni razionali fratte che si presentano sotto forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, dimostrando che si ha:

$$91. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 5}{2x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{2} \quad (\text{Si divida numeratore e denominatore per } x^2).$$

$$92. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{2x^3 - 3x^2 + 9} = 0 \quad (\text{Si divida numeratore e denominatore per } x^3).$$

⁽¹⁾ In questi esercizi si tenga presente che quando un polinomio si annulla per $x = a$, allora esso, per il teorema di Ruffini, è divisibile esattamente per $x - a$.

$$93. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x^3 + 9}{x^3 - 2x + 5} = \infty \quad (\text{Si divida numeratore e denominatore per } x^3).$$

$$94. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 5}{3 - 2x} = -\frac{7}{2}.$$

$$95. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 4x^2 + 9}{4x^3 + x - 2} = 2.$$

$$96. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 5}{x^7 - 2x^3 + 4} = 0.$$

$$97. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x + 2}{x^2 + 7x + 5} = \infty.$$

$$98. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 1}{x^3 + 2} = 0.$$

$$99. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 - 7x + 5}{-2x^3 + 4x^2 - 1} = -\frac{9}{2}.$$

$$100. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3 + \frac{x+1}{x-2}}{x + \frac{x^2}{x-2}} = \frac{3}{4}.$$

$$101. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + \frac{x+1}{x-3}}{2x + 1 + \frac{x^2}{x-3}} = \frac{4}{9}.$$

$$102. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 7x + 1}{2x + 5} = \infty.$$

$$103. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{5}{x} - 3}{\frac{4}{x^2} - \frac{2}{x} + 8} = \frac{1}{4}.$$

$$104. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}}{\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} + 9} = \infty.$$

$$105. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^2} + 5} = 0.$$

Servendosi dei teoremi enunciati sui limiti, del limite fondamentale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, e ricordando infine la continuità delle funzioni elementari, dimostrare che si ha:

$$106. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x}{x} = 2.$$

$$107. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad (\text{Si moltiplichi numeratore e denominatore per } 1 + \cos x).$$

$$108. \lim_{x \rightarrow 0^+} [\log \sin 2x - \log x] = \log 2.$$

$$109. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan x} = 2.$$

$$110. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{1 - \cot x} = -1.$$

$$111. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{1 - \cos x} = \infty \quad (\text{Si moltiplichi numeratore e denominatore per } 1 + \cos x).$$

$$112. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = 2.$$

$$113. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \operatorname{sen} x \cos x} = \frac{3}{2} \quad (\text{Si tenga presente l'esercizio precedente}).$$

$$114. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2}) = 0 \quad (\text{Si moltiplichi e si divida per } \sqrt{x+5} + \sqrt{x+2}).$$

$$115. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3}) = \frac{5}{2}.$$

$$116. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = +\infty \quad (\text{Si renda razionale il denominatore}).$$

$$117. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{5x-1}}{4 - x^2} = \frac{5}{24} \quad (\text{Si renda razionale il numeratore}).$$

$$118. \lim_{x \rightarrow \infty} [\log(x^2 - 1) - \log(x^2 - x + 1)] = 0.$$

$$119. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} [(1 - \operatorname{tg} x) \cdot \operatorname{tg} 2x] = 1.$$

$$121. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x}{\operatorname{sen} x - \cos x} = 2\sqrt{2}.$$

$$123. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 + 6x + 2}}{x} = -\sqrt{2} \quad (\text{Si renda razionale il numeratore}).$$

$$124. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2}.$$

$$126. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = 5.$$

$$128. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{tg} x} = 0.$$

$$130. \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$120. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1.$$

$$122. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^3 - 8}{x} = 12.$$

$$125. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x-1)^2} = \frac{1}{4}.$$

$$127. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 6x} = \frac{1}{2}.$$

$$129. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} = 2.$$

$$131. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\operatorname{sen}^2 x} = 0.$$

$$132. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \frac{1}{4}.$$

$$134. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) = \frac{3}{2}.$$

$$136. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{2 - x} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$138. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1} = \frac{1}{3}.$$

$$140. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1} = 6.$$

$$142. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{x-1} = -\frac{1}{2}.$$

$$144. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{2x \cos x} = 1.$$

$$146. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x (1 - \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = 1.$$

$$148. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{sen} x + 4x \cos x}{5 \operatorname{sen} x + 2x \cos x} = 1.$$

$$150. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos^3 x}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = 3.$$

$$133. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 1}) = 0.$$

$$135. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2}} = 2.$$

$$137. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{4}.$$

$$139. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{7x} = \frac{1}{7}.$$

$$141. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

$$143. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\operatorname{cotg} x} = 1.$$

$$145. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x - \cos x} = -\sqrt{2}.$$

$$147. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = 0.$$

$$149. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x} = \frac{3}{2}.$$