Compito A del 6 Luglio 2011, Matematica (Appl. Ec.) A-E e F-O.
Riservato agli studenti di questi gruppi di lettere o che sono in possesso del foglio del cambio di corso

Avete due ore e mezzo a disposizione. Spiegate con molta cura le vostra risposte. **Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):**

$$\boxed{1-\square,\ 2-\square,\ 3-\square,\ 4-\square,\ 5-\square,\ 6-\square}$$

Esercizio 1. Studiare $f:\mathcal{D}(f)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2+4-\frac{5}{x^3}$$

dove $\mathcal{D}(f)$ indica il dominio naturale di f. Determinare dominio, asintoti, intervalli di crescenza e decrescenza, eventuali massimi e minimi relativi e assoluti.

1. Disegnare il grafico di f.
2. La funzione f è iniettiva?
3. Determinare l'immagine di f.
4. Studiare gli intervalli di concavità e convessità e determinare i punti di flesso.

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti senza utilizzare i criteri di de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1-2\,x)\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-1}\ .$$

Esercizio 3. Enunciare il Teorema degli Zeri.
Utilizzare tale teorema per dimostrare che l'equazione

$$x^3+\frac{1}{2}\,x^2-\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{8}=0$$

ha almeno una soluzione $c\in(-1,1)$.

- Determinare quante soluzioni ha detta equazione nell'intervallo $(-1,1)$.
- Determinare il valore approssimato di una di esse con un errore inferiore a $\frac{1}{9}$.

Esercizio 4. Per quali valori della costante reale a la funzione

$$f(x)=\frac{1-\cos(x)}{2\,\cos(x)-a}$$

risulta definita per $x\in\mathbb{R}$?

Esercizio 5. Stabilire se è sempre vero che

$$(a\vee\neg\,b)\Rightarrow c\quad\text{implica}\quad(\neg\,a\vee c)\ \wedge\ (b\vee c)$$

.

Esercizio 6.

- Dare la definizione di derivata di una funzione f in un punto x.
- Sulla base della definizione, dimostrare che la funzione $f(x)=3x^2-4$ ha derivata $f'(x)=6x$.

TUTTI I LOGARITMI SONO IN BASE e

Compito B del 6 Luglio 2011, Matematica (Appl. Ec.) A-E e F-O.
Riservato agli studenti di questi gruppi di lettere o che sono in possesso del foglio del cambio di corso

Avete due ore e mezzo a disposizione. Spiegate con molta cura le vostra risposte. **Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):**

$$\boxed{1-\square,\ 2-\square,\ 3-\square,\ 4-\square,\ 5-\square,\ 6-\square}$$

Esercizio 1. Studiare $f:\mathcal{D}(f)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=x^2\left(\log|x|-1\right)$$

dove $\mathcal{D}(f)$ indica il dominio naturale di f. Determinare dominio, asintoti, intervalli di crescenza e decrescenza, eventuali massimi e minimi relativi e assoluti.

1. Disegnare il grafico di f.
2. La funzione f è iniettiva?
3. Determinare l'immagine di f.
4. Studiare gli intervalli di concavità e convessità e determinare i punti di flesso.

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti senza utilizzare i criteri di de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(e^{3x}-1\right)\log(1+5x^2)}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x}}\,.$$

Esercizio 3. Enunciare il Teorema degli Zeri.
Utilizzare tale teorema per dimostrare che l'equazione

$$\frac{1}{3}\,x^3-\frac{3}{2}\,x^2+2\,x-\frac{4}{5}=0$$

ha almeno una soluzione $c\in(0,3)$.

- Determinare quante soluzioni ha detta funzione nell'intervallo $(0,3)$.
- Determinare il valore approssimato di una di esse con un errore inferiore a $\frac{1}{7}$.

Esercizio 4. Per quali valori della costante reale a la funzione

$$f(x)=\frac{\sqrt{2a-\sin x}}{1+\sin^2 x}$$

risulta definita per $x\in\mathbb{R}$?

Esercizio 5. Stabilire se è sempre vero che

$$(a\vee\neg\,c)\Rightarrow b\quad\text{implica}\quad(\neg\,a\vee c)\ \wedge\ (b\vee c)$$

.

Esercizio 6.

- Dare la definizione di derivata di una funzione f in un punto x.
- Sulla base della definizione, dimostrare che la funzione $f(x)=3-2x^2$ ha derivata $f'(x)=-4x$.

TUTTI I LOGARITMI SONO IN BASE e

Compito A del 7 Settembre 2010, Matematica (Appl. Ec.) A-E F-O.
Riservato agli studenti di questi gruppi di lettere o che sono in possesso del foglio del cambio di corso

Avete due ore e mezzo a disposizione. Il numero accanto ad ogni esercizio indica il punteggio ottenibile in caso di risposta corretta. Spiegate con molta cura le vostra risposte. **Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi):**

$$\boxed{1-\square,\ 2-\square,\ 3-\square,\ 4-\square,\ 5-\square,\ 6-\square}$$

Esercizio 1. (4) Dopo aver formalizzato le due proposizioni:

- se conoscete la strada e non avete dimenticato di fare il pieno allora arriverete a destinazione
- se conoscete la strada allora o avete dimenticato di fare il pieno o arriverete a destinazione,

Stabilire se sono logicamente equivalenti.
(NOTA: la congiunzione o NON è usata in modo disgiuntivo)

Esercizio 2. (6) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\left(2\,x^3\right)\ \sqrt{3\,\mathrm{e}^{x^2}-3}}{x^4} \quad , \quad \lim_{x\to -\infty} |x-3| - \sqrt{|x^2-1|}$$

Esercizio 3. (6) Dopo aver enunciato il teorema degli zeri lo si applichi per dimostrare che la funzione

$$f(x) = \sqrt{x} + x^2 - 3, \quad x \in [1,2]$$

ammette almeno un punto $c \in (1,2)$ in cui si annulla.

- Tale punto è unico ?
- Determinarne una sua approssimazione con un errore inferiore a $\frac{1}{7}$.

Esercizio 4. (6) Studiare la funzione

$$f(x) = \left|\frac{1}{2}\,x^2 + \ln(x+3) - 3\,x\right|$$

inclusa concavità e convessità e disegnatene il grafico.

Esercizio 5. (6) Data la funzione $f(x) = (c-1)\ln(2\,x) - \dfrac{x^3}{e^{2x}} + c\,x\,e^{-x}$ determinare il valore della costante $c \in \mathbb{R}$ sapendo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Determinare quindi, per tale valore della costante c, il punto d'intersezione con l'asse delle ordinate e la tan- gente al grafico in tal punto.

Esercizio 6. (6) Sia $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, definita come $f\,(x) = 1 - e^{-x}$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e tale che $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x) > 0,\ D(g)(x) < 0, \quad D^2(g)(x) < 0, \quad \text{cioè} \quad g'(x) < 0 \quad g''(x) < 0.$$

Definiamo $h\,(x) = (g \circ f)\,(x)$

- si determini il dominio di h,
- si dica in quali sottointervalli del proprio dominio si può affermare che la funzione h è crescente o decrescente,
- si dica in quali sottointervalli del proprio dominio si può affermare che la funzione h è concava o convessa.

Compito B del 7 Settembre 2010, Matematica (Appl. Ec.) A-E F-O.
Riservato agli studenti di questi gruppi di lettere o che sono in possesso del foglio del cambio di corso

Avete due ore e mezzo a disposizione. Il numero accanto ad ogni esercizio indica il punteggio ottenibile in caso di risposta corretta. Spiegate con molta cura le vostra risposte. **Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi):**

$$\boxed{1-\square,\ 2-\square,\ 3-\square,\ 4-\square,\ 5-\square,\ 6-\square}$$

Esercizio 1. (4) Dopo aver formalizzato le due proposizioni:

- se conoscete la strada e avete dimenticato di fare il pieno allora non arriverete a destinazione
- se conoscete la strada allora o non avete dimenticato di fare il pieno o non arriverete a destinazione,

Stabilire se sono logicamente equivalenti.
(NOTA: la congiunzione o NON è usata in modo disgiuntivo)

Esercizio 2. (6) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\cos 3x)\ \sqrt{2\,\mathrm{e}^{2x^2}-2}}{x^3} \qquad , \qquad \lim_{x\to+\infty} |4-x| - \sqrt{|4-x^2|}$$

Esercizio 3. (6) Dopo aver enunciato il teorema degli zeri lo si applichi per dimostrare che la funzione

$$f(x) = \ln x + x^2 - 4, \quad x \in [1,2]$$

ammette almeno un punto $c \in (1,2)$ in cui si annulla.

- Tale punto è unico ?
- Determinarne una sua approssimazione con un errore inferiore a $\frac{1}{7}$.

Esercizio 4. (6) Studiare la funzione

$$f(x) = \left|\frac{1}{2}\,x^2 + \ln(3-x) + 3\,x\right|$$

inclusa concavità e convessità e disegnatene il grafico.

Esercizio 5. (6) Data la funzione $f(x) = (c-2)\ln(2-x) - x^3e^{2x} + c\,x\,e^x$ determinare il valore della costante $c \in \mathbb{R}$ sapendo che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

Determinare quindi, per tale valore della costante c, il punto d'intersezione con l'asse delle ordinate e la tangente al grafico in tal punto.

Esercizio 6. (6) Sia $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, definita come $f(x) = 1 - e^{-x}$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e tale che $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x) > 0,\ D(g)(x) < 0, \quad D^2(g)(x) < 0, \quad \text{cioè} \quad g'(x) < 0 \quad g''(x) < 0.$$

Definiamo $h(x) = (f \circ g)(x)$

- si determini il dominio di h,
- si dica in quali sottointervalli del proprio dominio si può affermare che la funzione h è crescente o decrescente,
- si dica in quali sottointervalli del proprio dominio si può affermare che la funzione h è concava o convessa.

Compito A del 08 Luglio 2010, Matematica (Appl. Ec.) A-E e F-O. Riservato agli studenti di questi gruppi di lettere o che sono in possesso del foglio del cambio di corso

Avete due ore e mezzo a disposizione. Il numero accanto ad ogni esercizio indica il punteggio ottenibile in caso di risposta corretta. Spiegate con molta cura le vostra risposte.
Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi):

$$\boxed{1 - \square,\ 2 - \square,\ 3 - \square,\ 4 - \square,\ 5 - \square,\ 6 - \square}$$

Esercizio 1. (4) Stabilire se le seguenti proposizioni sono logicamente equivalenti

$$\neg a \wedge (c \to b)), \quad \neg(a \vee (\neg b \wedge c))$$

(si ricorda che il connettivo $\to$ è stato anche indicato con $\Longrightarrow$).

Esercizio 2. (6) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}-1}{3\,x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{2\,x^3}{\sin(2\,x)\ln(1+3\,x^2)}$$

Esercizio 3. (6) Dopo aver enunciato il teorema degli zeri lo si applichi per dimostrare che la funzione

$$f(x) = e^{-x} + x^2 - 2, \quad x \in [1,2]$$

ammette almeno un punto $c \in (1,2)$ in cui si annulla.

- Tale punto è unico ?
- Determinarne una sua approssimazione con un errore inferiore a $\frac{1}{7}$.
- Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico in tale punto c.

Esercizio 4. (6) Studiare la funzione

$$f(x) = \left|\frac{2\,x-3}{6\,x^2+x+3}\right|.$$

Disegnare il grafico senza calcolare la derivata seconda . Possiamo affermare che ci sono dei flessi?

Esercizio 5. (6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f(x) = \begin{cases} a^4 - a^2\,(x-1)^2 & \text{se } x < 0 \\ 2 + 2\,\dfrac{\ln\left(1-\sin^2(ax)\right)}{x^2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

dove $a \in \mathbb{R}$. Stabilire se esistono valori di a tali che f risulti continua in $x = 0$ e , se esistono, determinarli.

Esercizio 6. (6) Sia $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$, definita come $f(x) = 1 + x^2$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e tale che $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x) > 0,\ D(g)(x) < 0, \quad D^2(g)(x) > 0, \quad \text{cioè} \quad g'(x) < 0 \quad g''(x) > 0.$$

Definiamo $h(x) = f(g(x)) + e^{-x}$

- si determini il dominio di h,
- si dica in quali sottointervalli del proprio dominio si può affermare che la funzione h è crescente o decrescente,
- si dica in quali sottointervalli del proprio dominio si può affermare che la funzione h è concava o convessa.

Compito B del 08 Luglio 2010, Matematica (Appl. Ec.) A-E e F-O. Riservato agli studenti di questi gruppi di lettere o che sono in possesso del foglio del cambio di corso

Avete due ore e mezzo a disposizione. Il numero accanto ad ogni esercizio indica il punteggio ottenibile in caso di risposta corretta. Spiegate con molta cura le vostra risposte.
Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi):

$$\boxed{1-\square,\ 2-\square,\ 3-\square,\ 4-\square,\ 5-\square,\ 6-\square}$$

Esercizio 1. (4) Stabilire se le seguenti proposizioni sono logicamente equivalenti

$$a \wedge (b \to c)), \quad a \wedge (\neg b \vee c)$$

(si ricorda che il connettivo $\to$ è stato anche indicato con $\Longrightarrow$).

Esercizio 2. (6) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2\,x^3 - x^2 + 1} - 1}{3\sin^2 x} \qquad , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2\,e^{x^2} - 2}{3 - 3\cos(2x)}.$$

Esercizio 3. (6) Dopo aver enunciato il teorema dei valori intermedi lo si applichi per dimostrare che la funzione

$$f(x) = e^{-x} + x^2 - 2, \quad x \in [1, 2]$$

ammette almeno un punto $c \in (1, 2)$ in cui la derivata è uguale a 2 .

- Tale punto è unico ?
- Determinarne una sua approssimazione con un errore inferiore a $\frac{1}{6}$.

Esercizio 4. (6) Studiare la funzione

$$f(x) = \left|\frac{e^x}{x^2 - 3}\right|$$

e disegnarne il grafico.

Esercizio 5. (6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f(x) = \begin{cases} a^4 - a^2\,(x-1)^2 & \text{se } x < 0 \\ 1 + 2\,\dfrac{\ln(\cos(ax))}{x^2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

dove $a \in \mathbb{R}$. Stabilire se esistono valori di a tali che f risulti continua in $x = 0$ e , se esistono, determinarli.

Esercizio 6. (6) Sia $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$, definita come $f(x) = e^{-x}$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e tale che $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x) > 0,\ D(g)(x) > 0, \quad D^2(g)(x) < 0, \quad \text{cioè} \quad g'(x) > 0 \quad g''(x) < 0.$$

Definiamo $h(x) = f(g(x)) + \frac{1}{x}$

- si determini il dominio di h,
- si dica in quali sottointervalli del proprio dominio si può affermare che la funzione h è crescente o decrescente,
- si dica in quali sottointervalli del proprio dominio si può affermare che la funzione h è concava o convessa.

Compito A del 12 Febbraio 2010, Matematica (Appl. Ec.) A-E, F-O

Avete due ore e mezzo a disposizione. Il numero accanto ad ogni esercizio indica il punteggio ottenibile in caso di risposta corretta. Spiegate con molta cura le vostra risposte.
Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi!!):

$1 - \square,\ 2 - \square,\ 3 - \square,\ 4 - \square,\ 5 - \square,\ 6 - \square$

Esercizio 1.(6) Stabilire se la seguente proposizione è una tautologia

$$(\alpha \land \beta) \to ((\alpha \land \neg\beta) \to \alpha) \quad ,$$

(si ricorda che il connettivo "$\to$" è stato anche indicato con "$\Longrightarrow$").

Esercizio 2.(6) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(x - sin(x))\sqrt{e^{(2x^2)} - 1}}{x^4} \qquad , \qquad \lim_{x \to -\infty} |3 - x| - \sqrt{|1 - x^2|}.$$

Esercizio 3.(6) Dopo aver enunciato il teorema di Rolle lo si applichi per dimostrare che la funzione

$$f(x) = 2x^4 - 5\,x^2 + 3\,x, \quad x \in [0, 1]$$

ammette almeno un punto $c \in (0, 1)$ in cui si annulla la derivata.
Tale punto è unico ?
E' un punto di massimo ?
E' un punto di minimo?
Determinarne una sua approssimazione con un errore inferiore a $\frac{1}{10}$.

Esercizio 4.(6) Studiare la funzione

$$f(x) = \left|1 - e^{\frac{1}{x}}\right|$$

inclusa concavità e convessità e disegnatene il grafico.

Esercizio 5.(6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f(x) = \begin{cases} k^4 - k^2 (x-1)^2 & \text{se } xleq0 \\ 4 + \dfrac{\log(1 + 2\,k^2 x)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

dove $k \in \mathbb{R}$. Stabilire se esistono valori di k tali che f risulti continua in $x = 0$ e , se esistono, determinarli.

Esercizio 6. (6) Siano date le funzioni $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definita come $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e tale che $\forall x \in \mathbb{R}$

$$D(g)(x) > 0, \text{ cioè } g'(x) > 0 \quad D^2(g)(x) > 0, \text{ cioè } g''(x) > 0.$$

Definiamo $h(x) = (g \circ f)(x)$

- si dica per quale sottoinsieme del proprio dominio la funzione h è crescente o decrescente;,
- si dica per quale sottoinsieme del proprio dominio la funzione h è concava o convessa.

Compito A del 12 Febbraio 2010, Matematica (Appl. Ec.) A-E, F-O

Avete due ore e mezzo a disposizione. Il numero accanto ad ogni esercizio indica il punteggio ottenibile in caso di risposta corretta. Spiegate con molta cura le vostra risposte.
Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi!!):

$$\boxed{1-\square,\ 2-\square,\ 3-\square,\ 4-\square,\ 5-\square,\ 6-\square}$$

Esercizio 1.(6) Stabilire se la seguente proposizione è una tautologia

$$(\alpha \wedge \beta) \to ((\alpha \wedge \neg\beta) \to \alpha) \quad ,$$

(si ricorda che il connettivo "$\to$" è stato anche indicato con "$\Longrightarrow$").

Esercizio 2.(6) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(x - sin(x))\sqrt{e^{(2x^2)} - 1}}{x^4} \qquad , \qquad \lim_{x\to -\infty} |3-x| - \sqrt{|1-x^2|}.$$

Esercizio 3.(6) Dopo aver enunciato il teorema di Rolle lo si applichi per dimostrare che la funzione

$$f(x) = 2x^4 - 5\,x^2 + 3\,x, \quad x \in [0,1]$$

ammette almeno un punto $c \in (0,1)$ in cui si annulla la derivata.
Tale punto è unico ?
E' un punto di massimo ?
E' un punto di minimo?
Determinarne una sua approssimazione con un errore inferiore a $\frac{1}{10}$.

Esercizio 4.(6) Studiare la funzione

$$f(x) = \left|1 - e^{\frac{1}{x}}\right|$$

inclusa concavità e convessità e disegnatene il grafico.

Esercizio 5.(6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f(x) = \begin{cases} k^4 - k^2 (x-1)^2 & \text{se } xleq0 \\ 4 + \dfrac{\log(1 + 2\,k^2 x)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

dove $k \in \mathbb{R}$. Stabilire se esistono valori di k tali che f risulti continua in $x = 0$ e , se esistono, determinarli.

Esercizio 6. (6) Siano date le funzioni $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definita come $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e tale che $\forall x \in \mathbb{R}$

$$D(g)(x) > 0, \text{ cioè } g'(x) > 0 \quad D^2(g)(x) > 0, \text{ cioè } g''(x) > 0.$$

Definiamo $h(x) = (g \circ f)(x)$

- si dica per quale sottoinsieme del proprio dominio la funzione h è crescente o decrescente;,
- si dica per quale sottoinsieme del proprio dominio la funzione h è concava o convessa.

Compito A del 13 Settembre 2011, Matematica (Appl. Ec.) A-E e F-O.
Riservato agli studenti di questi gruppi di lettere o che sono in possesso del foglio del cambio di corso

Avete due ore e mezzo a disposizione. Spiegate con molta cura le vostra risposte. **Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):**

$$\boxed{1-\square,\ 2-\square,\ 3-\square,\ 4-\square,\ 5-\square,\ 6-\square}$$

Esercizio 1. Studiare $f:\mathcal{D}(f)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\left|\frac{x^2-8}{(x+3)^2}\right|$$

dove $\mathcal{D}(f)$ indica il dominio naturale di f. Determinare dominio, asintoti, intervalli di crescenza e decrescenza, eventuali massimi e minimi relativi e assoluti.

1. Disegnare il grafico di f
2. La funzione f è iniettiva?
3. Determinare l'immagine di f.
4. Studiare concavità e convessità, flessi,

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{-2x}-1\right)\left(1-\sqrt[3]{1+x}\right)}{1-\cos x}$$

e, senza utilizzare i criteri di de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-1}\ .$$

Esercizio 3. Enunciare il Teorema degli Zeri.
Trovare un intervallo in cui l'equazione

$$\cos(2x)+3x-2=0$$

soddisfa le ipotesi del Teorema e ha quindi almeno una soluzione c.

- Possiamo affermare che tale soluzione è unica?
- Determinare il valore approssimato di una soluzione con un errore inferiore a $\frac{1}{9}$.

Esercizio 4. Per quali valori del parametro reale a la funzione

$$f(x)=\frac{1-\sin(x)}{2x^2-a}$$

risulta definita per $x\in\mathbb{R}$?
Esercizio 5. Stabilire se le proposizioni

$$(a\wedge\neg b)\Rightarrow c \quad \text{e} \quad (\neg a\vee c)\vee(b\wedge c)$$

sono equivalenti.

Esercizio 6. Siano

$$f(x)=3+\frac{1}{1+x^2},\quad g(x)=\exp(2x+1)$$

determinare la funzione inversa g^{-1} e sia

$$F(x)=f(g^{-1}(x))$$

dopo avere scritto l'espressione esplicita di F calcolarne la derivata. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di F nel punto $(e,F(e))$.

Compito B del 13 Settembre 2011, Matematica (Appl. Ec.) A-E e F-O.
Riservato agli studenti di questi gruppi di lettere o che sono in possesso del foglio del cambio di corso

Avete due ore e mezzo a disposizione. Spiegate con molta cura le vostra risposte. **Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):**

$$\boxed{1-\square,\ 2-\square,\ 3-\square,\ 4-\square,\ 5-\square,\ 6-\square}$$

Esercizio 1. Studiare $f:\mathcal{D}(f)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{\left|\,x^2-4\right|}{(x+1)^3}$$

dove $\mathcal{D}(f)$ indica il dominio naturale di f. Determinare dominio, asintoti, intervalli di crescenza e decrescenza, eventuali massimi e minimi relativi e assoluti.

1. Disegnare il grafico di f
2. La funzione f è iniettiva?
3. Determinare l'immagine di f.
4. Studiare concavità e convessità, flessi,

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^-} x\log\left(1-\sqrt{1+x}\right)$$

e, senza utilizzare i criteri di de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-6\,x^2+12\,x-8}{x^2-4}\ .$$

Esercizio 3. Enunciare il Teorema degli Zeri.
Trovare un intervallo in cui l'equazione

$$\sin(2\,x)+x-1=0$$

soddisfa le ipotesi del Teorema e ha quindi almeno una soluzione c.

- Possiamo affermare che tale soluzione è unica?
- Determinare il valore approssimato di una soluzione con un errore inferiore a $\dfrac{1}{9}$.

Esercizio 4. Per quali valori del parametro reale a la funzione

$$f(x)=\frac{1-2\sin^2(x)}{3\,x^2-a}$$

risulta definita per $x\in\mathbb{R}$?
Esercizio 5. Stabilire se le proposizioni

$$(b\wedge\neg\, c)\Rightarrow a \quad \text{e} \quad (\neg\, b\vee a)\vee(c\wedge a)$$

sono equivalenti.

Esercizio 6. Siano

$$f(x)=\frac{1}{1+2\,x} \quad \text{e} \quad g(x)=\exp(2\,x)$$

determinare la funzione inversa f^{-1} e detta

$$F(x)=g(f^{-1}(x))$$

dopo avere scritto l'espressione esplicita di F calcolarne la derivata. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di F nel punto $(1,F(1))$.

Compito A del 15 Giugno 2010, Matematica (Appl. Ec.) A-E, F-O

Avete due ore e mezzo a disposizione. Il numero accanto ad ogni esercizio indica il punteggio ottenibile in caso di risposta corretta. Spiegate con molta cura le vostra risposte.
Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi!!):

$$\boxed{1 - \square,\ 2 - \square,\ 3 - \square,\ 4 - \square,\ 5 - \square,\ 6 - \square}$$

Esercizio 1. (4) Stabilire se le seguenti proposizioni sono logicamente equivalenti

$$(\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \vee \neg\beta)\,, \quad \neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

(si ricorda che il connettivo $\rightarrow$ è stato anche indicato con $\Longrightarrow$).

Esercizio 2. (7) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2^x - 1}}{x^{3/2} - \sqrt{x}} \quad , \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{|x^3 - x + 1| - |-3 + x + x^3|}{x}$$

Esercizio 3. (7) Dopo aver enunciato il teorema degli zeri lo si applichi per dimostrare che la funzione

$$f(x) = \log(x) + x^2 - 2, \quad x \in [1, 2]$$

ammette almeno un punto $c \in (1, 2)$ in cui si annulla.

- Tale punto è unico ?
- Determinarne una sua approssimazione con un errore inferiore a $\frac{1}{7}$.

Esercizio 4. (6) Studiare la funzione

$$f(x) = \left| \frac{x^2 - 9}{(x-4)^2} \right|$$

inclusa concavità e convessità e disegnatene il grafico.

Esercizio 5. (6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^4 - \alpha^2 (x-1)^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 4 + \dfrac{1 - \cos(2\,\alpha\, x)}{x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Stabilire se esistono valori di α tali che f risulti continua in $x = 0$ e , se esistono, determinarli.

Esercizio 6. (6) Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definita come $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e tale che $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x) > 0,\ D(g)(x) < 0, \quad D^2(g)(x) < 0, \quad \text{cioè} \quad g'(x) < 0 \quad g''(x) < 0.$$

Definiamo $h(x) = (g \circ f)(x)$

- si determini il dominio di h,
- si dica in quali sottointervalli del proprio dominio si può affermare che la funzione h è crescente o decrescente,
- si dica in quali sottointervalli del proprio dominio si può affermare che la funzione h è concava o convessa.

Compito B del 15 Giugno 2010, Matematica (Appl. Ec.) A-E, F-O

Avete due ore e mezzo a disposizione. Il numero accanto ad ogni esercizio indica il punteggio ottenibile in caso di risposta corretta. Spiegate con molta cura le vostra risposte.
Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi!!):

$1-\square,\ 2-\square,\ 3-\square,\ 4-\square,\ 5-\square,\ 6-\square$

Esercizio 1. (4) Stabilire se le seguenti proposizioni sono logicamente equivalenti

$$(\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \vee \neg\beta)\,, \quad \neg\alpha \to (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

(si ricorda che il connettivo $\to$ è stato anche indicato con $\Longrightarrow$).

Esercizio 2. (7) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{3^x - 1}}{x^{3/4} - \sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{|x^3 - x + 1| - |-3 + x - x^3|}{x}$$

Esercizio 3. (7) Dopo aver enunciato il teorema degli zeri lo si applichi per dimostrare che la funzione

$$f(x) = \log(2x) + x^2 - 2, \quad x \in [1,2]$$

ammette almeno un punto $c \in (1,2)$ in cui si annulla.

- Tale punto è unico ?
- Determinarne una sua approssimazione con un errore inferiore a $\frac{1}{7}$.

Esercizio 4. (6) Studiare la funzione

$$f(x) = \left| \frac{x^2 - 4}{(x-3)^2} \right|$$

inclusa concavità e convessità e disegnatene il grafico.

Esercizio 5. (6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 - \alpha\,(x-1)^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 4 + \dfrac{1 - e^{2\alpha x}}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Stabilire se esistono valori di α tali che f risulti continua in $x = 0$ e , se esistono, determinarli.

Esercizio 6. (6) Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definita come $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e tale che $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x) > 0,\ D(g)(x) < 0, \quad D^2(g)(x) < 0, \quad \text{cioè} \quad g'(x) < 0 \quad g''(x) < 0.$$

Definiamo $h(x) = (f \circ g)(x)$

- si determini il dominio di h,
- si dica in quali sottointervalli del proprio dominio si può affermare che la funzione h è crescente o decrescente,
- si dica in quali sottointervalli del proprio dominio si può affermare che la funzione h è concava o convessa.

Compito A del 15 Dicembre 2010, Matematica (Appl. Ec.) A-E e F-O.
Riservato agli studenti di questi gruppi di lettere o che sono in possesso del foglio del cambio di corso

Avete due ore e mezzo a disposizione. Spiegate con molta cura le vostra risposte. **Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi):**

$$\boxed{1-\square,\ 2-\square,\ 3-\square,\ 4-\square,\ 5-\square,\ 6-\square}$$

Esercizio 1. Stabilire se la proposizione

$$[\neg(a \vee b) \to \neg c] \to [c \to (a \vee b)]$$

è una tautologia.
Esercizio 2. Si scriva cosa vuol dire, in base alla definizione, che

$$\lim_{x\to 0^+} -\log(x) = +\infty$$

Esercizio 3. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{(1+2\,x)^2}-1\right)\sin\left(2x^2\right)}{3\,x^3} \qquad ,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\ln(1-x)} - \frac{1}{1-\mathrm{e}^{2x}}.$$

Esercizio 4. Enunciare il Teorema dei valori intermedi.
Verificare che lo si può applicare per dimostrare che l'equazione

$$e^x + x^2 - 1 = 2$$

ha almeno una soluzione $c \in (0,2)$.

- Tale soluzione è unica ?
- Determinarne una sua approssimazione con un errore inferiore a $\frac{1}{7}$.

Esercizio 5. Studiare $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}(f) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2\,x-3}}{2\,|x|}$$

($\mathcal{D}(f)$ indica il dominio naturale di f)

1. Disegnare il grafico di f (senza concavità e convessità)
2. La funzione f è iniettiva?
3. Determinare l'immagine di f

Esercizio 5. Sapendo che la funzione f soddisfa le seguenti diseguaglianze :

$$0 \le f(x) \le x \quad \text{per } x \ge 0$$

$$e^x - 1 \le f(x) \le 0 \quad \text{per } x \le 0$$

verificare che la funzione è continua in zero.

Esercizio 6. Siano

$$f(x) = \log(x), \quad g(x) = \sin(x), \quad h(x) = x^2$$

e sia

$$F(x) = f(2 - g(h(x+1))).$$

Dopo aver scritto l'espressione esplicita di F calcolarne la derivata. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di F nel punto $(-1, F(-1))$.

Compito B del 15 Dicembre 2010, Matematica (Appl. Ec.) A-E e F-O.
Riservato agli studenti di questi gruppi di lettere o che sono in possesso del foglio del cambio di corso

Avete due ore e mezzo a disposizione. Spiegate con molta cura le vostra risposte. Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi):

$$\boxed{1 - \square,\ 2 - \square,\ 3 - \square,\ 4 - \square,\ 5 - \square,\ 6 - \square}$$

Esercizio 1. Stabilire se la proposizione

$$[(a \wedge b) \to \neg c] \to [c \to (a \wedge b)]$$

è una tautologia

Esercizio 2. Si scriva cosa vuol dire, in base alla definizione, che

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan(x) = +\infty$$

Esercizio 3. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt[4]{(1+5\,x)^3} - 1\right)(1 - \cos(3x))}{3\,x^3} \qquad ,$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln(1-2x)} + \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$$

Esercizio 4. Enunciare il Teorema dei valori intermedi.
Verificare che lo si può applicare per dimostrare che l'equazione

$$e^x + \log(1 + 2x^2) - 1 = 2$$

ha almeno una soluzione $c \in (0, 2)$.

- Tale soluzione è unica ?
- Determinarne una sua approssimazione con un errore inferiore a $\frac{1}{7}$.

Esercizio 5. Studiare $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}(f) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{2x^2 + |x| + 1}{|x| - 1}$$

($\mathcal{D}(f)$ indica il dominio naturale di f)

1. Disegnare il grafico di f (senza concavità e convessità)
2. La funzione f è iniettiva?
3. Determinare l'immagine di f.

Esercizio 5. Sapendo che la funzione f soddisfa le seguenti diseguaglianze:

$$0 \le f(x) \le e^x - 1 \quad \text{per } x \ge 0$$

$$x \le f(x) \le 0 \quad \text{per } x \le 0$$

verificare che la funzione è continua in zero.

Esercizio 6. Siano

$$f(x) = x^2,\ g(x) = \log(x),\ h(x) = \sin(x)$$

e sia

$$F(x) = f(2 - g(h(x + \frac{\pi}{2}))).$$

Dopo aver scritto l'espressione esplicita di F, calcolarne la derivata. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di F nel punto $(0, F(0))$.

Compito A del 22 Febbraio 2011, Matematica (Appl. Ec.) A-E e F-O.
Riservato agli studenti di questi gruppi di lettere o che sono in possesso del foglio del cambio di corso

Avete due ore e mezzo a disposizione. Spiegate con molta cura le vostra risposte. **Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi):**

$$\boxed{1 - \square,\ 2 - \square,\ 3 - \square,\ 4 - \square,\ 5 - \square,\ 6 - \square}$$

Esercizio 1. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + \sqrt{1-x}}{2x^k}$$

Esercizio 2. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$.
Proposizione 1. Se f è continua in x_0 allora f è derivabile in x_0.
Proposizione 2. Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.
Discure la verità o falsità delle suddette proposizioni. Motivare le risposte mediante una dimostrazione oppure un controesempio.

Esercizio 3. Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti disuguaglianze

$$e^x > 1 + x \qquad , \qquad e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} .$$

Motivare le risposte.

Esercizio 4. Studiare $f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x^2 - 1}$$

($\mathcal{D}(f)$ indica il dominio naturale di f)

1. Determinare il dominio e l'immagine di f.
2. Determinare gli eventuali massimi e minimi (locali e globali) nell'intervallo $(1, 3]$.

Esercizio 5. Due numeri reali a, b sono tali che

$$a > 0 \quad , \quad b > 0 \quad e \quad a + b = 1$$

Determinare gli estremi superiore e inferiore che può assumere il loro prodotto ab. Stabilire se tali sup e inf sono massimo e minimo.
Esercizio 6. Sia $f(x) = \sin(x^2 + 3)$ e sia

$$F(x) = f(f(x))$$

dopo avere scritto l'espressione esplicita di F calcolarne la derivata.

Compito A del 10 Giugno 2011, Matematica (Appl. Ec.) A-E e F-O.
Riservato agli studenti di questi gruppi di lettere o che sono in possesso del foglio del cambio di corso

Avete due ore e mezzo a disposizione. Spiegate con molta cura le vostra risposte. **Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):**

$$1-\square,\ 2-\square,\ 3-\square,\ 4-\square,\ 5-\square,\ 6-\square$$

Esercizio 1. Studiare $f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **soltanto** per $x \geq 0$

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{|x^2-1|}}{x^2}$$

determinandone dominio, asintoti, intervalli di crescenza e decrescenza, eventuali massimi e minimi relativi e assoluti

1. Disegnare il grafico di f (senza concavità e convessità)
2. La funzione f è iniettiva?
3. Determinare l'immagine di f
4. Cosa si può dire del grafico di f per $x < 0$?

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{3\,x}-1\right)(1-\cos(2\,x))}{x^3}$$

,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\ln(1+2\,x)} - \frac{1}{1-\sqrt{1-x}}$$

Esercizio 3. Si scriva cosa vuol dire, in base alla definizione, che

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Esercizio 4. Enunciare il Teorema degli Zeri.
Verificarne le ipotesi per dimostrare che l'equazione

$$\ln(x) + x^2 - 3 = 0,$$

ha almeno una soluzione $c \in (1, 2)$.

- Possiamo affermare che tale soluzione è unica?
- Determinare il valore approssimato di una soluzione c con un errore inferiore a $\frac{1}{9}$

Esercizio 5. Stabilire se la proposizione

$$[(a \wedge b) \Rightarrow \neg\, c] \Rightarrow [c \Rightarrow\ (a \vee b)]$$

è una tautologia.

Esercizio 6. Siano

$$f(x) = 3 + \sin(x), \quad g(x) = \ln(2\,x+1)$$

e sia

$$F(x) = f(g(x))$$

dopo avere scritto l'espressione esplicita di F calcolarne la derivata. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di F nel punto $(0, F(0))$.

Compito B del 10 Giugno 2011, Matematica (Appl. Ec.) A-E e F-O.
Riservato agli studenti di questi gruppi di lettere o che sono in possesso del foglio del cambio di corso

Avete due ore e mezzo a disposizione. Spiegate con molta cura le vostra risposte. **Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):**

$$\boxed{1 - \square,\ 2 - \square,\ 3 - \square,\ 4 - \square,\ 5 - \square,\ 6 - \square}$$

Esercizio 1. Studiare $f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **soltanto** per $x \geq 0$

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sqrt{|x^2 - 2|}}$$

dove $\mathcal{D}(f)$ indica il dominio naturale di f. Determinare dominio, asintoti, intervalli di crescenza e decrescenza, eventuali massimi e minimi relativi e assoluti.

1. Disegnare il grafico di f (senza concavità e convessità).
2. La funzione f è iniettiva?
3. Determinare l'immagine di f.
4. Cosa si può dire del grafico di f per $x < 0$?

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(e^{2x} - 1\right)\left(\sin^2(3x)\right)}{x^3}$$

,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x} - x - x^2} - \frac{\sin x}{x^2 - x^3 - x^4}$$

Esercizio 3. Si scriva cosa significa, in base alla definizione, che

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x - 1} = +\infty$$

Esercizio 4. Enunciare il Teorema degli Zeri.
Verificarne le ipotesi per dimostrare che l'equazione

$$\ln(2 - x) + x^2 - 2x = 0$$

ha almeno una soluzione $c \in (0, 1)$.

- Possiamo affermare che tale soluzione è unica?
- Determinare il valore approssimato di una soluzione con un errore inferiore a $\dfrac{1}{9}$.

Esercizio 5. Stabilire se la proposizione

$$[c \Rightarrow (a \vee b)] \Rightarrow [(a \wedge b) \Rightarrow \neg c]$$

è una tautologia.

Esercizio 6. Siano

$$f(x) = 3 + log(x), \quad g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)$$

e sia

$$F(x) = f(g(x))$$

dopo avere scritto l'espressione esplicita di F calcolarne la derivata. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di F nel punto $(1, F(1))$.