Prove di Esame di
Matematica per le applicazioni economiche 1
Anno solare 2013

Esame di

Matematica per le applicazioni economiche 1

XX Gennaio 2013
Colonna A

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1. (7 punti)

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$. Si stabilisca quali delle due seguenti affermazioni sono vere (motivando la risposta).

a) Se $f(x) > 0$ per ogni $x \in A$ e f è crescente, allora la funzione $g : A \to \mathbb{R}$ definita come $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ è decrescente.

a) Se $f(x) < 0$ per ogni $x \in A$ e f è crescente, allora la funzione $g : A \to \mathbb{R}$ definita come $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ è crescente.

Esercizio 2. (6 punti)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f(x) = \begin{cases} k^4 - k^2 (x-1)^2, & \text{se } x \geq 0, \\ 3 + \frac{\sin(k^2 x)}{x}, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

dove $k \in \mathbb{R}$. Stabilire se esistono valori di k tali che f risulti continua in $x = 0$ e, qualora esistano, determinarli.

Esercizio 3. (6 punti)

Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} + 7x^3 + \log(x)}{2x - 5x^4} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-x}}{2x}$$

Esercizio 4. (7 punti)

a) Si diano le definizioni di funzione continua in un punto e di funzione continua in un insieme.

b) Si enunci e si dimostri il teorema dei valori intermedi.

Esercizio 5. (7 punti)

Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{-e^x}{x^2 - 1}$$

Esercizio 6. (7 punti)

Si consideri un'impresa con funzione di produzione

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(q) = \log(q + 1).$$

Ogni unità di prodotto dell'impresa viene venduta al prezzo costante $p = 2\alpha$, dove α è un dato numero positivo. Per produrre la quantità $q \geq 0$, l'impresa sostiene il costo $c(q) = \alpha \cdot q$.

a) Si calcoli il valore $q^* \geq 0$ che massimizza il profitto $\pi(q)$, definito come

$$\pi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad \pi(q) = p \cdot f(q) - c(q).$$

b) Si dica se il profitto ottenuto per $q = q^*$ è positivo oppure no.

c) Si dica qual è l'effetto di un aumento di α su q^*.

Esame di
Matematica per le applicazioni economiche 1
16 Gennaio 2013
Fila A

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**
Consegnate SEPARATAMENTE la parte relativa agli (Esercizi 1 - 2 - 3) e quella relativa agli (Esercizi 4 - 5 - 6).

Esercizio 1. (5 punti)
Si consideri la funzione $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5}{2x^2+1}$. Utilizzando la definizione di iniettività e di immagine di una funzione, si dimostri che la funzione f è iniettiva e si calcoli $\mathrm{Im}(f)$. Si determini in seguito la funzione inversa di f.

Esercizio 2. (5 punti)
Usando la appropriata definizione di limite, si verifichi che

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{2-x} = -\infty$$

Esercizio 3. (5 punti)
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax^2)}{x} & \text{se} \quad x \in (-\infty, 0) \\ ax + bx^2 & \text{se} \quad x \in [0, 1] \\ -2bx & \text{se} \quad x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$. Stabilire se esistono valori di a, b tali che f risulti continua e, qualora esistano, determinarli.

Esercizio 4. (10 punti)
i. Si enunci e si dimostri il Teorema di Lagrange.

ii. Si applichi il Teorema di Lagrange alla funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin(x)$$

nell'intervallo $[a, b]$;

iii. Si usi quanto ottenuto al punto ii., per dimostrare che, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, si ha che $|\sin(b) - \sin(a)| \leq b - a$.

Esercizio 5. (8 punti)
Si studi e si tracci il grafico di

$$f(x) = \frac{|x^3 - x^2|}{x^2 - 1}.$$

Si tralasci lo studio della derivata seconda.

Esercizio 6. (7 punti)
Si consideri un'impresa che produce un solo bene. Il ricavo totale ottenuto producendo una quantità $q \geq 0$ del bene è descritto dalla funzione

$$R : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad q \mapsto R(q).$$

Il costo necessario per produrre la quantità q del bene è descritto dalla funzione

$$C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad q \mapsto C(q).$$

L'impresa ha come obiettivo la massimizzazione del profitto, cioè della funzione

$$\pi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad \pi(q) = R(q) - C(q).$$

Si assuma che

$$R(q) = 7 \cdot q,$$
$$C(q) = q^2 + q + 1$$

e che la quantità massima che l'impresa può produrre sia 5.

i. Si scriva il problema di massimizzazione del profitto e si dica se ammette soluzione.

ii. Si calcoli $\pi(0)$ e $\pi(5)$e l'eventuale profitto massimo per $q \in (0, 5)$.

iii. Si dica qual è la soluzione del problema dell'impresa.

Esame di
Matematica per le applicazioni economiche 1
16 Gennaio 2013
Fila B

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte. Consegnate SEPARATAMENTE la parte relativa agli (Esercizi 1 - 2 - 3) e quella relativa agli (Esercizi 4 - 5 - 6).**

Esercizio 1. (5 punti)
Si consideri la funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$. Utilizzando la definizione di iniettività e di immagine di una funzione, si dimostri che la funzione f è iniettiva e si calcoli $\mathrm{Im}(f)$. Si determini in seguito la funzione inversa di f.

Esercizio 2. (5 punti)
Usando la appropriata definizione di limite, si verifichi che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$$

Esercizio 3. (5 punti)
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x + b & \text{se} \quad x \in (-\infty, 1) \\ \log_2\left(x^2 + x + 2\right) & \text{se} \quad x \in [1, 2] \\ \frac{5\ln(x-1)}{x-2} + 2a & \text{se} \quad x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$. Stabilire se esistono valori di a, b tali che f risulti continua e, qualora esistano, determinarli.

Esercizio 4. (10 punti)
i. Si enunci e si dimostri il Teorema di Lagrange.

ii. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che, per ogni $z \in \mathbb{R}$, $f'(z) \geq m > 0$. Per dato $x > 0$, si applichi il Teorema di Lagrange alla funzione f ristretta all'intervallo $[0, x]$.

iii. Si usi quanto ottenuto al punto ii., per dimostrare che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Esercizio 5. (8 punti)
Si studi e si tracci il grafico di

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 3}.$$

Si tralasci lo studio della derivata seconda.

Esercizio 6. (7 punti)
Si consideri un'impresa che produce un solo bene. Il ricavo totale ottenuto producendo una quantità $q \geq 0$ del bene è descritto dalla funzione

$$R : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad q \mapsto R(q).$$

Il costo necessario per produrre la quantità q del bene e' descritto dalla funzione

$$C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad q \mapsto C(q).$$

L'impresa ha come obiettivo la massimizzazione del profitto, cioè della funzione

$$\pi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad \pi(q) = R(q) - C(q).$$

Si assuma che

$$R(q) = 11q - q^2,$$
$$C(q) = 1 + q$$

e che la quantità massima che l'impresa puo' produrre sia 6.

1. Si scriva il problema di massimizzazione del profitto e si dica se ammette soluzione.
2. Si calcoli $\pi(0), \pi(6)$ e l'eventuale profitto massimo per $q \in (0, 6)$.
3. Si dica qual è la soluzione del problema dell'impresa.

Soluzioni FILA A

Soluzione Esercizio 1.

Per dimostrare l'iniettivitá si considerano $x, y \in [1, +\infty)$ e si mostra che $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Infatti

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow \frac{5}{2x^2+1} = \frac{5}{2y^2+1} \Leftrightarrow 10x^2+5 = 10y^2+5 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2-y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 0.$$

Poiché $(x+y) > 0$ deve necessariamente essere $x - y = 0$ ossia $x = y$.

Per calcolare l'immagine di f si devono determinare tutti e soli $y \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $f(x) = y$ ammette almeno una soluzione. Ricordiamo che la definizione di f implica $x \in [1, +\infty)$.

Osserviamo che, per ogni $x \in [1, +\infty)$, $f(x) > 0$. Ció implica che se $y \leq 0$ allora $y \notin Im(f)$. Possiamo allora assumere $y > 0$. Si ha che

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{5}{2x^2+1} = y \Leftrightarrow x^2 = \frac{5-y}{2y}.$$

Tale equazione non ha soluzioni se $y > 5$ e se $y = 5$ ha come unica soluzione $0 \notin [1, +\infty)$ dunque se $y \geq 5$ si ha che $y \notin Im(f)$. Assumiamo dunque $y \in (0, 5)$. L'equazione sopra considerata ha due soluzioni

$$-\sqrt{\frac{5-y}{2y}}, \quad \sqrt{\frac{5-y}{2y}}.$$

La prima sicuramente non appartiene a $[1, +\infty)$. La seconda appartiene a tale insieme se e solo se

$$\frac{5-y}{2y} \geq 1 \Leftrightarrow y \leq \frac{5}{3}.$$

Concludendo si ha che $Im(f) = (0, \frac{5}{3}]$.

Per il calcolo dell'inversa della funzione occorre soltanto osservare che per ogni elemento dell'immagine abbiamo che l'unica soluzione dell'equazione $f(x) = y$ é $\sqrt{\frac{5-y}{2y}}$. Pertanto si ha che

$$f^{-1} : (0, \frac{5}{3}] \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \sqrt{\frac{5-y}{2y}}$$

Soluzione Esercizio 2.

Dobbiamo mostrare che per ogni $M > 0$ esiste $\delta_M > 0$ tale che se $2 < x < 2 + \delta_M$ allora $f(x) < -M$. Considero dunque $M > 0$ e mostro che l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{1}{2-x} < -M$$

contiene un insieme della forma $(2, 2 + \delta_M)$ dove $\delta_M > 0$ é opportunamente scelto.

Si ha che

$$\frac{1}{2-x} < -M \Leftrightarrow \frac{Mx-2M-1}{x-2} < 0.$$

Lo studio del segno di $\frac{Mx-2M-1}{x-2}$ stabilisce che esso é negativo nell'insieme

$$\left(2, \frac{2M+1}{M}\right) = \left(2, 2 + \frac{1}{M}\right)$$

(osserviamo che, per ogni $M > 0$, si ha che $\frac{2M+1}{M} > 2$). Dunque definito $\delta_M = \frac{2M+1}{M} - 2 = \frac{1}{M}$ concludiamo la dimostrazione.

Soluzione Esercizio 3.

É immediato verificare che la funzione f é continua su $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Dobbiamo controllare dunque la continuitá nei punti 0 e 1. Osserviamo anzitutto che $f(0) = 0$ e $f(1) = a + b$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(ax^2)}{ax^2} ax = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = a + b$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -2b$$

Dunque f é continua su $\mathbb{R}$ se e solo se $a + b = -2b$ ossia $a + 3b = 0$.

Soluzione Esercizio 4.

i. Vedi libro di testo.

ii. Esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a),$$

e dunque nel nostro caso

$$|\sin(b) - \sin(a)| = |\cos(x_0)(b - a)| \leq |b - a|,$$

dove la disuguaglianza segue dal fatto che $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos x| \leq 1$.

Soluzione Esercizio 5.

$$f(x) = \frac{|x^3 - x^2|}{x^2 - 1}$$

<u>1. Dominio.</u>

$dom\ f = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$.

$$f(x) = \frac{|x^3 - x^2|}{x^2 - 1} = \frac{x^2 |x - 1|}{x^2 - 1} = \begin{cases} \frac{-x^2(x-1)}{x^2-1} = -\frac{x^2}{x+1} & \text{se} \quad x < 1 \text{ e } x \neq -1 \\ \frac{x^2(x-1)}{x^2-1} = \frac{x^2}{x+1} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Dunque studiamo $g(x) = \frac{x^2}{x+1}$e poi, con semplici modifiche, disegniamo il grafico di f. Piu' precisamente,

$$f(x) = \begin{cases} -g(x) & \text{se} \quad x < 1 \text{ e } x \neq -1 \\ g(x) & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Si osservi che $dom\ g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

<u>2. Segno.</u>

$g(x) > 0$ se e solo se $x > -1$.

<u>3. Punti di discontinuita'.</u>

$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{x+1} = " - \frac{1}{0^-} " = -\infty$;

$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x+1} = " - \frac{1}{0^+} " = +\infty$;

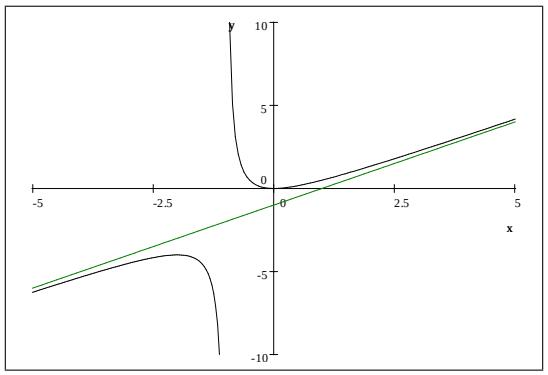
4. Comportamento a $\pm\infty$ e eventuali asintoti non verticali.

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} 2x = \pm\infty$.
$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 = 1$.
$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-x^2-x}{x+1}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-x}{x+1}\right) = -1$.
Dunque asintoto obliquo (per $x \to -\infty$): $y = x - 1$.
5. Derivata prima.

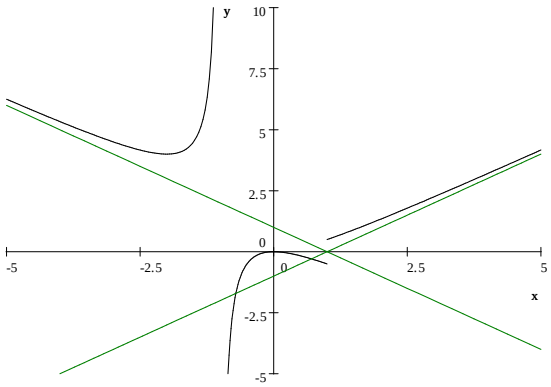
$$g'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

			-2		0	
g'		$+$		$-$		$+$
g		crescente		decrescente		crescente

-2 e' un punto di massimo locale, $g(-2) = 4$.
0 e' un punto di minimo locale, $g(0) = 0$.
$g(x) = \frac{x^2}{x+1}$



$f(x)$



Soluzione Esercizio 6.

1. L'impresa deve massimizzare

$$\pi(q) = R(q) - C(q) = -q^2 + 6q - 1$$

sotto il vincolo $q \in [0, 5]$. Poiche' π e' una funzione polinomio, essa e' continua. Poiche' $[0, 5]$ e' u n intervallo chiuso e limitato, la esistenza di massimo globale segue dal teorema di Weierstrass (o del valore estremo).

2. $\pi(0) = -1$; $\pi(5) = -25 + 30 - 1 = 4$. . $\pi'(q) = -2q + 6$ e $\pi''(q) = -2$. Dunque la funzione profitto e' strettamente concava e q^* e' un massimo per π su $(0, 5)$ se e solo se $\pi'(q^*) = 0$ ovvero $q^* = 3$.

3. Poiche' $\pi(3) = -9 + 18 - 1 = 10$, la soluzione del problema dell'impresa e' $q^* = 3$.

Soluzioni FILA B

Soluzione Esercizio 1.

Per dimostrare l'iniettivitá si considerano $x, y \in [0, +\infty)$ e si mostra che $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Infatti

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow \ln(x^2 + 2x + 3) = \ln(y^2 + 2y + 3) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = y^2 + 2y + 3 \Leftrightarrow (x - y)(x + y + 2) = 0.$$

Poiché $(x + y + 2) > 0$ deve necessariamente essere $x - y = 0$ ossia $x = y$.

Per calcolare l'immagine di f si deve determinare tutti e soli $y \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $f(x) = y$ ammette almeno una soluzione. Ricordiamo che la definizione di f implica $x \in [0, +\infty)$. Si ha che

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln(x^2 + 2x + 3) = y \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 - e^y = 0.$$

Tale equazione é di secondo grado e il suo discriminante é

$$\Delta(y) = 4e^y - 8.$$

Si ha che $\Delta(y) \geq 0$ se e solo se $y \geq \ln(2)$. Pertanto se $y < \ln(2)$ l'equazione non ha soluzioni; se $y = \ln(2)$ l'unica soluzione dell'equazione é $-1 \notin [0, +\infty)$. Dunque se $y \leq \ln(2)$ si ha che $y \notin Im(f)$.

Assumiamo dunque $y > \ln(2)$. L'equazione sopra considerata ha due soluzioni

$$\frac{-2 - \sqrt{4e^y - 8}}{2}, \quad \frac{-2 + \sqrt{4e^y - 8}}{2}.$$

La prima sicuramente non appartiene a $[0, +\infty)$. La seconda appartiene a tale insieme se e solo se

$$\frac{-2 + \sqrt{4e^y - 8}}{2} \geq 0 \Leftrightarrow y \geq \ln(3).$$

Concludendo si ha che $Im(f) = [\ln(3), +\infty)$.

Per il calcolo dell'inversa della funzione occorre soltanto osservare che per ogni elemento dell'immagine abbiamo che l'unica soluzione dell'equazione $f(x) = y$ é $\frac{-2+\sqrt{4e^y-8}}{2} = -1 + \sqrt{e^y - 2}$. Pertanto si ha che

$$f^{-1} : [\ln(3), +\infty) \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto -1 + \sqrt{e^y - 2}$$

Soluzione Esercizio 2.

Dobbiamo mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon > 0$ tale che se $x > x_\varepsilon$ allora $|f(x)| < \varepsilon$. Considero dunque $\varepsilon > 0$ e mostro che l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\left| \frac{\cos(x)}{x} \right| < \varepsilon$$

contiene un insieme della forma $(x_\varepsilon, +\infty)$ dove x_ε é opportunamente scelto.

Osserviamo che, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\left| \frac{\cos(x)}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right|.$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni di

$$\left| \frac{\cos(x)}{x} \right| < \varepsilon$$

include l'insieme delle soluzioni di

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$$

Concludiamo dunque se dimostriamo che l'insieme delle soluzioni di

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$$

un insieme della forma $(x_\varepsilon, +\infty)$ dove x_ε é opportunamente scelto. Ma tale disuguaglianza ha come soluzione $(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \cup (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$. Dunque definito $x_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$ concludiamo la dimostrazione

Soluzione Esercizio 3.

É immediato verificare che la funzione f é continua su $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Dobbiamo controllare dunque la continuitá nei punti 1 e 2. Osserviamo anzitutto che $f(1) = 2$ e $f(2) = 3$. Inoltre

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = a + b + 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 5 \frac{\ln(1 + (x-2))}{x-2} + 2a = 5 + 2a$$

Dunque f é continua su $\mathbb{R}$ se e solo se $a + b + 1 = 2$ e $5 + 2a = 3$. La seconda equazione stabilisce che $a = -1$ e dalla prima deduciamo che $b = 2$.

Soluzione Esercizio 4.

i. Vedi libro di testo.

ii. Esiste $x_0 \in (0, x)$ tale che

$$f(x) - f(0) = f'(x_0)\, x,$$

e dunque

$$f(x) = f(0) + f'(x_0)\, x \geq f(0) + mx.$$

Poiche'

$$\lim_{x \to +\infty} (f(0) + mx) = +\infty,$$

il risultato voluto segue dal teorema del confronto.

Soluzione Esercizio 5.

<u>1. Dominio.</u>

$x^2 - 4x + 3 = 0$, $x = 2 \pm \sqrt{4-3} = 1, 3$.
$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$.
$dom\ f = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$.
2. Segno e funzioni pari o dispari.

			-2		1		2		3		
$x^2 - 4$		$+$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$x^2 - 4x + 3$		$+$		$+$		$-$		$-$		$+$	
f		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	

3. Punti di discontinuita'.

$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-4}{(x-1)(x-3)} = "\frac{-3}{0^-\cdot(-2)}" = -\infty;$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-4}{(x-1)(x-3)} = "\frac{-3}{0^+\cdot(-2)}" = +\infty;$
$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-4}{(x-1)(x-3)} = "\frac{5}{2\cdot 0^-}" = -\infty$

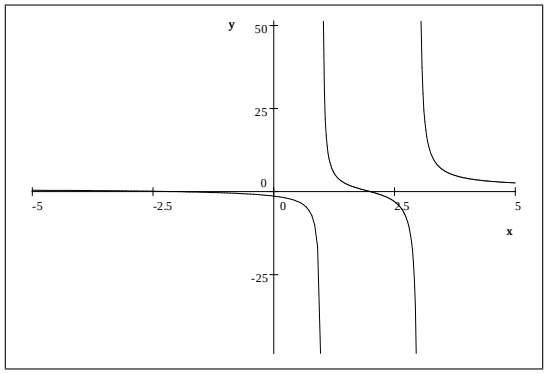
$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-4}{(x-1)(x-3)} = "\frac{5}{2\cdot 0^+}" = +\infty;.$
4. Comportamento a $\pm\infty$ e eventuali asintoti non verticali.

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{x^2-4x+3} = 1.$
5. Derivata prima.

$$f'(x) = \frac{2x\left(x^2-4x+3\right)-(2x-4)\left(x^2-4\right)}{\left(x^2-4x+3\right)^2} =$$

$$= \frac{2x^3-8x^2+6x-2x^3+8x+4x^2-16}{\left(x^2-4x+3\right)^2} = \frac{14x-4x^2-16}{\left(x^2-4x+3\right)^2} < 0$$

dove la disuguaglianza segue dal fatto che il discriminante della equazione $14x-4x^2-16=0$ e' negativo. Dunque, la funzione e' decrescente su $(-\infty,1)$, e' decrescente su $(1,3)$ e e' decrescente su $(1,+\infty)$,



Soluzione Esercizio 6.

1. L'impresa deve massimizzare

$$\pi(q) = R(q) - C(q) = 11q - q^2 - 1 - q = -q^2 + 10q - 1.$$

sotto il vincolo $q \in [0,6]$. Poiche' π e' una funzione polinomio, essa e' continua. Poiche' $[0,6]$ e' u n intervallo chiuso e limitato, la esistenza di massimo globale segue dal teorema di Weierstrass (o del valore estremo).

2. $\pi(0) = -1$; $\pi(6) = -36 + 60 - 1 = 23$. $\pi'(q) = -2q + 10$ e $\pi''(q) = -2$. Dunque la funzione profitto e' strettamente concava e q^* e' un massimo per π su $(0,6)$ se e solo se $\pi'(q^*) = 0$ ovvero $q^* = 5$.

3. Poiche' $\pi(5) = -25 + 50 - 1 = 24$, la soluzione del problema dell'impresa e' $q^* = 5$.

Esame di
Matematica per le applicazioni economiche 1
19 Febbraio 2013
Fila A

-Pena l'annullamento della prova, è vietato l'uso di calcolatrici, telefoni cellulari, smartphone o ogni altro strumento che sia in grado di connettersi con l'esterno. Lo studente può portare con sé, al posto assegnato, soltanto il materiale per scrivere, cancellare. Tutto il resto, cappotti e giacche incluse, deve essere lasciato agli appositi attaccapanni al momento dell'ingresso in aula.

-È possibile ritirarsi o consegnare soltanto dopo che sia trascorsa almeno un'ora dall'inizio della prova.

-Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato il compito per la correzione o essersi ritirato.

-Verranno verbalizzati tutti i risultati d'esame sia positivi che negativi.

-La prova ha la durata di due ore e mezzo. Spiegate con molta cura le vostre risposte. Consegnate SEPARATAMENTE la parte relativa agli (Esercizi 1 -2 - 3) e quella relativa agli (Esercizi 4 - 5 - 6).

Esercizio 1 (4 punti)
Sia A il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12} \leq 0 \right\}.$$

Determinare $\inf A$, $\sup A$ e, se esistono, $\max A$ e $\min A$.

Esercizio 2 (6 punti)
Determinare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2(x\cos(x) + 1)}$$

Esercizio 3 (8 punti)
Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat (estremi locali di funzioni derivabili).
Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una fuzione continua in $[-1, 1]$, derivabile in $(-1, 1)$ e tale che

$$f(-1) = -1 \ , \ f(0) = 2 \ , \ f(1) = 1$$

Dimostrare che esiste $c \in (-1, 1)$ tale che $f'(c) = 0$.

Esercizio 4 (6 punti).
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f(x) = x\,|1 - e^x|$$

a) stabilire se f è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$ e, in caso contrario, si dica in quali punti f è discontinua;
b) dopo aver accertato che f è derivabile in $x = 1$, si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(1, f(1))$.

Esercizio 5 (8 punti).
Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\ln(|x|)}{x}$$

e determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$f(x) = a.$$

Esercizio 6 (8 punti).
Un'impresa deve fabbricare 5 unità del prodotto che l'impresa stessa mette in vendita. L'impresa dispone di due impianti: l'impianto 1 (una fabbrica in Toscana) e l'impianto 2 (una fabbrica in Romania). Con $x_1 \geq 0$ si indica la quantità di prodotto fabbricato utilizzando l'impianto 1, e il costo che l'impresa sostiene relativo all'impianto 1 è

$$4x_1 + \frac{18x_1}{1 + x_1}\ .$$

Con $x_2 \geq 0$ si indica la quantità di prodotto fabbricato utilizzando l'impianto 2, e il costo che l'impresa sostiene relativo all'impianto 2 è $6x_2$. L'impresa vuole scegliere x_1 e x_2, tali che $x_1 + x_2 = 5$, in modo da minimizzare il costo totale, ovvero

$$4x_1 + \frac{18x_1}{1 + x_1} + 6x_2\ .$$

Si noti che sostituendo x_2 con $5 - x_1$ è possibile scrivere il costo totale come funzione della sola variabile x_1 .

(a) Si scriva il problema di minimizzazione del costo totale in funzione della variabile x_1 e si dica se è possibile affermare immediatamente che tale problema ammette soluzione.

(b) Si individui il valore di x_1 che minimizza il costo totale e si ricavi (di conseguenza) il valore di x_2 .

Esame di
Matematica per le applicazioni economiche 1
19 Febbraio 2013
Fila B

-Pena l'annullamento della prova, è vietato l'uso di calcolatrici, telefoni cellulari, smartphone o ogni altro strumento che sia in grado di connettersi con l'esterno. Lo studente può portare con sé, al posto assegnato, soltanto il materiale per scrivere, cancellare. Tutto il resto, cappotti e giacche incluse, deve essere lasciato agli appositi attaccapanni al momento dell'ingresso in aula.

-È possibile ritirarsi o consegnare soltanto dopo che sia trascorsa almeno un'ora dall'inizio della prova.

-Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato il compito per la correzione o essersi ritirato.

-Verranno verbalizzati tutti i risultati d'esame sia positivi che negativi.

-La prova ha la durata di due ore e mezzo. Spiegate con molta cura le vostre risposte. Consegnate SEPARATAMENTE la parte relativa agli (Esercizi 1 - 2 - 3) e quella relativa agli (Esercizi 4 - 5 - 6).

Esercizio 1 (4 punti)
Sia A il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9x + 20} \leq 0 \right\}.$$

Determinare $\inf A$, $\sup A$ e, se esistono, $\max A$ e $\min A$.

Esercizio 2 (6 punti)
Determinare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(1 - 2\sin(x)\right)}{x(\cos(3x) + 1)}$$

Esercizio 3 (8 punti)
Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat (estremi locali di funzioni derivabili).
Sia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ una fuzione continua in $[0, 2]$, derivabile in $(0, 2)$ e tale che

$$f(0) = -1 \ , \ f(1) = -2 \ , \ f(2) = 1$$

Dimostrare che esiste $c \in (0, 2)$ tale che $f'(c) = 0$.

Esercizio 4 (6 punti).
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f(x) = |x-1|e^{-x^2+2x}$$

a) stabilire se f è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$ e, in caso contrario, si dica in quali punti f è discontinua;
b) dopo aver accertato che f è derivabile in $x = 2$, si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(2, f(2))$.

Esercizio 5 (8 punti).
Studiare la funzione

$$f(x) = xe^{\frac{1}{|x|}}$$

e determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$f(x) = a\ .$$

Esercizio 6 (8 punti).
Un'impresa deve fabbricare 17 unità del prodotto che l'impresa stessa mette in vendita. L'impresa dispone di due impianti: l'impianto 1 (una fabbrica in Toscana) e l'impianto 2 (una fabbrica in Romania). Con $x_1 \geq 0$ si indica la quantità di prodotto fabbricato utilizzando l'impianto 1, e il costo che l'impresa sostiene relativo all'impianto 1 è

$$4x_1 + \frac{18x_1}{1+x_1}.$$

Con $x_2 \geq 0$ si indica la quantità di prodotto fabbricato utilizzando l'impianto 2, e il costo che l'impresa sostiene relativo all'impianto 2 è $6x_2$. L'impresa vuole scegliere x_1 e x_2, tali che $x_1 + x_2 = 17$, in modo da minimizzare il costo totale, ovvero

$$4x_1 + \frac{18x_1}{1+x_1} + 6x_2.$$

Si noti che sostituendo x_2 con $17 - x_1$ è possibile scrivere il costo totale come funzione della sola variabile x_1.

(a) Si scriva il problema di minimizzazione del costo totale in funzione della variabile x_1 e si dica se è possibile affermare immediatamente che tale problema ammette soluzione.

(b) Si individui il valore di x_1 che minimizza il costo totale e si ricavi (di conseguenza) il valore di x_2.

SOLUZIONI FILA A

Esercizio 1

Le radici del numeratore sono 1 e 2, quelle del denominatore sono 3 e 4. L'insieme $A = [1, 2] \cup (3, 4)$ Quindi

$$\inf A = \min A = 1 \quad , \quad \sup A = 4 \quad , \quad \max A \qquad \text{non esiste.}$$

Esercizio 2 (6)

Si moltiplica numeratore e denominatore per 4. Si ottiene

$$\frac{\cos 2x - 1}{4x^2} \to -1/2 \quad , \quad x \cos x + 1 \to 1$$

Quindi il limite è -2.

Esercizio 3 (8)

Th Fermat: f continua in [a,b] e derivabile in (a,b) se $c \in (a, b)$ è un punto di massimo allora $f'(c) = 0$. La nostra funzione ha massimo per Weierstass, tale massimo non può essere raggiunto nei punti x=-1 o x=1 poichè

$$f(0) > f(-1) \ , \ f(0) > f(1)$$

Quindi il punto di massimo $c \in (-1, 1)$ e $f'(c) = 0$

Esercizio 4 (6). Sia f è continua in tutto $\mathbb{R}$ poichè è prodotto e composizione di funzioni continue.

$$|1 - e^x| = \begin{cases} 1 - e^x, \text{ per } x \leq 0 \\ e^x - 1, \text{ per } x > 0 \end{cases}$$

Per $x > 0$

$$f(x) = x(e^x - 1)$$

$f'(x) = (1 - e^x) - xe^x$ da cui segue che $f'(1) = 1 - 2e$. Dato che $f(1) = e - 1$, la retta tangente è

$$y - (e - 1) = (e - 1)(x - 1) \quad , \quad y = (e - 1)x$$

Esercizio 5 (8).

Il dominio è $x \neq 0$. La funzione è dispari. La studiamo per $x \geq 0$. La funzione è

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^-$$

infatti il numeratore tende a $-\infty$ e il denominatore a 0^+ .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0+$$

infatti il segno è positivo poichè numeratore e denominatore sono positivi e applicando la regola de l'hopital si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Quindi $y = 0$ è un asintoto orizzontale e $x = 0$ è un asintoto verticale.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

La derivata si annulla per $x = e$ è positiva per $x < e$ e negativa per $x > e$. Il punto $x = e$ è punto di massimo e $f(e) = 1/e$. Dato che la funzione è dispari si ha che $f(x) = a$ ha

$$\begin{cases} \text{1 soluzione, per } a \in (-\infty - 1/e) \cup (1/e, +\infty) \\ \text{2 soluzioni, per } a = -1/e\ ,\ a = 1/e\ ,\ a = 0 \\ \text{3 soluzioni, per } a \in (-1/e, 1/e). \end{cases}$$

Esercizio 5 (8). Il problema è $\min_{x_1\in[0,5]} f(x_1)$, con $f(x_1) = 4x_1 + \frac{18x_1}{1+x_1} + 6(5-x_1)$. Poiche' f è

una funzione continua in $[0, 5]$, il teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di un punto di minimo globale. Per ricavare il punto di minimo e' sufficiente notare che (i) poichè $f'(x_1) = -2 + \frac{18}{(1+x)^2}$, esiste un unico punto critico in $(0, 5)$, che è 2; (ii) $f(0) = 30$, $f(2) = 38$, $f(5) = 35$. Dunque il punto di minimo globale è $x_1 = 0$, e $x_2 = 5$.

SOLUZIONI FILA B

EX 1 [punti 4]. Le x in A sono caratterizzate dal fatto che $\frac{(x-3)(x-2)}{(x-4)(x-5)} \leq 0$. Innanzitutto il denominatore deve essere diverso da zero. Inoltre numeratore e denominatore devono essere discordi. Dal prospetto dei segni risulta che $A = [2,3] \cup (4,5)$, dunque $\inf A = \min A = 2$, $\sup A = 5$, mentre $\max A$ non esiste perché l'estremo 5 non è incluso in A.

EX 2 [punti 6]. Il limite proposto si presenta nella forma non immediata $\frac{0}{0}$. Usando il teorema di de l'Hopital, il limite proposto coincide con

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\cos(x)}{1-2\sin(x)} \cdot \frac{1}{\cos(3x)+1-3x\sin(3x)} = -1.$$

EX 3 [punti 8]. Per l'enunciato e la dimostrazione del teorema di Fermat, si veda il libro di testo.
Riguardo alla tesi da dimostrare, la f proposta è continua, per il teorema di Weierstrass f assume allora di sicuro sia massimo che minimo assoluti nell'intervallo [0,2].
Di sicuro il punto di minimo in questione, che chiamiamo $\underline{x}$, non può essere né 0 né 2, perché esiste in [0,2] un x, $x = 1$, su cui f assume valore inferiore a $f(0)$ e ad $f(2)$.
Allora tale punto di minimo $\underline{x}$ si trova in $(0,2)$. $\underline{x}$ è punto di minimo assoluto per f in [0,2] e si trova in (0,2), è dunque punto di minimo locale per f.
f è derivabile in (0,2), quindi anche in $\underline{x}$, sono allora soddisfatte le ipotesi del teorema di Fermat: $\underline{x}$ è punto estremale locale per f, f è derivabile in $\underline{x}$, allora $f'(\underline{x}) = 0$. Di sicuro quindi la scelta $c = \underline{x}$ soddisfa la tesi.

EX 4 [punti 6]. a) f è prodotto di composizioni di funzioni elementari continue su $\mathbb{R}$, ed il suo dominio è tutto $\mathbb{R}$. Dunque f è continua su tutto $\mathbb{R}$.
b) Per tutti gli $x > 1$ il valore assoluto si scioglie con il segno $+$, perciò

$$f(x) = (x-1) \cdot e^{2x-x^2} \tag{1}$$

in tutto l'intorno aperto $(1, +\infty)$ di 2. In questo intorno f è prodotto di composizioni di funzioni derivabili, è dunque derivabile in tutti i punti, e dunque anche in 2.
L'equazione della retta tangente al grafico di f in $(2, f(2))$ è data da $y - f(2) = f'(2)(x-2)$. Dall'espressione (1) si ricava che

$$f(2) = 1, \;\; f'(x) = e^{2x-x^2} + (x-1)e^{2x-x^2}(2-2x),$$

e dunque $f'(2) = -1$, perciò la retta tangente richiesta ha equazione $y = -x + 3$.

EX 5 [punti 8]. $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; la funzione è dispari, essendo $f(-x) = -xe^{\frac{1}{|x|}} = -f(x)$, la studiamo allora per le sole $x > 0$, e dopo simmetrizzeremo il grafico rispetto all'origine degli assi cartesiani.
Per $x > 0$, f ha sempre segno strettamente positivo, in particolare il grafico di f non interseca l'asse delle ascisse.
$\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, perché, pur presentandosi il limite nella forma $0 \cdot \infty$, possiamo riscrivere $f(x)$ come

$$\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{e^z}{z}$$

con $z = \frac{1}{x}$, e sappiamo che l'esponenziale e^z trascina la potenza z^1 quando $z \to +\infty$.
Abbiamo dunque un asintoto verticale di equazione $x = 0$.
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, perché $e^{1/x} \to 1$ quando $x \to +\infty$. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{z\to 0+} \frac{e^z - 1}{z} = 1,$$

la funzione ha un asintoto obliquo di equazione $y = x + 1$ per $x \to +\infty$.
Sempre guardando solo la regione $\{x > 0\}$, si ha

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\Big(1 - \frac{1}{x}\Big),$$

dunque $f'(x) \geq 0$ se e solo se $\frac{1}{x} \leq 1$, ossia, essendo $x > 0$, se e solo se $x \geq 1$. f è dunque decrescente strettamente su (0,1] e crescente strettamente su $[1, +\infty)$, $f(1) = e$ è dunque il valore minimo che f assume in assoluto su $(0, +\infty)$.
Inoltre abbiamo

$$f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3},$$

che per le $x > 0$ risulta sempre strettamente positiva, f è dunque strettamente convessa su $(0, +\infty)$.

Simmetrizzando ora rispetto all'origine la parte di grafico di f ottenuta per ascisse positive, otteniamo il seguente grafico
L'asintoto obliquo per $x \to -\infty$ ha equazione $y = x - 1$, poiché

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1 \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} x(e^{-\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{-\frac{1}{x}} = -1.$$

Dal grafico di f si vede che l'equazione $f(x) = a$ ha: 2 soluzioni per gli $a < -e$ e per gli $a > e$; 1 soluzione per $a = -e$ ed $a = e$; nessuna soluzione per $a \in (-e, e)$.

EX 6 [punti 8]. Con la sostituzione di x_2 con $17 - x_1$, la funzione costo diventa

$$f(x_1) = \frac{18x_1}{1 + x_1} - 2x_1 + 102 = \frac{-2x_1^2 + 118x_1 + 102}{1 + x_1}.$$

a) Per scrivere il problema si deve tener conto non solo del fatto che $x_1 \geq 0$, ma anche di quello che $x_2 \geq 0$, ossia $17 - x_1 \geq 0$, quindi $x_1 \leq 17$. Il problema diventa dunque:

$$\min_{x_1\in[0,17]} f(x_1).$$

Tale problema di sicuro ammette soluzione, per il teorema di Weierstrass, essendo la funzione f continua in $[0, 17]$.
b) Risulta $f'(x_1) = \frac{-2x_1^2-4x_1+16}{(1+x_1)^2}$, che è ben definita solo per gli $x_1 \neq -1$, e si ha $f'(x_1) \geq 0$ se e solo se $x_1^2 + 2x_1 - 8 \leq 0$ e $x_1 \neq -1$, ossia $x_1 \in \big[-4, -1\big) \cup \big(-1, 2\big]$. Quindi, tenendo presente il prospetto del segno di f', l'andamento di f è crescente su $[0, 2]$ e decrescente su $[2, 17]$. Risulta allora che $\min_{x_1\in[0,17]} f(x_1) = \min\{f(0), f(17)\}$. Ora $f(17) = 85$ e $f(0) = 102$ e allora il punto di minimo assoluto di $f(x_1)$ su [0,17] è $\underline{x} = 17$. Di conseguenza i valori $(x_1, x_2) = (x_1, 17 - x_1)$ che rendono minimo $4x_1 + \frac{18x_1}{1+x_1} + 6x_2$ sono $(\underline{x}, 17 - \underline{x}) = (17, 0)$.

Compito A del 17 Giugno 2013, Matematica per le Applicazioni Economiche I

Esercizio 1. (10 punti)

(a) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

(b) Dimostrare che l'equazione

$$2\,x\log(x) + x - \frac{4}{x} = 0$$

ha almeno una soluzione nell'intervallo [1, 2]. Suggerimento: applicare il Teorema di Rolle nell'intervallo $[1, 2]$ alla funzione

$$f : x \mapsto f(x) = \left(x^2 - 4\right)\log(x)$$

(c) Dimostrare che nell'intervallo [1, 2] la soluzione è unica.

(d) Quante iterazioni dell'algoritmo di bisezione sarebbero necessarie per trovare un valore approssimato di questa soluzione con un errore non superiore a $0,125$?

Esercizio 2. (5 punti)
Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left|1 - x^2 - \log(x)\right| - \left|x^2 + x + 1\right|}{x + \log(3\,x)}$$

Esercizio 3. (5 punti)
Utilizzando le definizioni di continuità e derivabilità e/o i teoremi sulle funzione continue e/o derivabili, studiare la continuità e la derivabilità della seguente funzione in tutti i punti del suo dominio.

$$f := x \mapsto f(x) = x\,|x|$$

Esercizio 4. (5 punti)
Per una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ (con $A \subseteq \mathbb{R}$) si diano le definizioni di

(a) $\mathrm{Im}(f)$;

(b) $\sup f$;

(c) funzione monotona strettamente decrescente.

Si fornisca un esempio di funzione $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ che non è monotona strettamente decrescente ed è tale che $\mathrm{Im}(f) = [1, 2]$; per tale funzione si ricavi $\sup f$.

Esercizio 5. (7 punti)
Un'impresa deve scegliere il prezzo $p \geq 0$ per il prodotto che mette in vendita, e sa che per ogni $p \geq 0$ la quantità venduta è pari a $800\,e^{-p/6}$ unità. Per semplicità immaginiamo che l'impresa non sostenga alcun costo di produzione (né di vendita). Pertanto il profitto dell'impresa coincide con il ricavo, che è dato dal prodotto $p \cdot 800\,e^{-p/6}$. L'impresa vuole individuare p che massimizza il profitto, ma deve rispettare una legge che le vieta di scegliere p maggiore di 4.

(a) Si scriva il problema di massimizzazione del profitto e si dica se è possibile affermare immediatamente che tale problema ammette soluzione.

(b) Si individui il valore di p che massimizza il profitto. Si dica se la cancellazione della legge che impone $p \leq 4$ permetterebbe all'impresa di aumentare il profitto rispetto al profitto che ottiene in presenza della legge (si spieghi).

Esercizio 6. (8 punti)
Si studi la funzione

$$f(x) = x^2\log(x)$$

Soluzione esercizio 1.

a. Per l'enunciato e la dimostrazione del Teorema di Rolle si veda il libro di testo

b. La funzione
$$f : x \mapsto f(x) = \left(x^2 - 4\right) \log(x)$$
soddisfa le ipotesi del Teorema nell'intervallo $[1, 2]$ in quanto prodotto di funzioni continue e derivabili in quell'intervallo ed inoltre
$$f(1) = 0, \quad f(2) = 0$$
e quindi esiste un punto $c \in [1, 2]$ in cui
$$f'(c) = D[f](c) = 2\,c \log(c) + c - 4\,\frac{1}{c} = 0.$$

c. Se deriviamo la funzione al primo membro dell'equazione otteniamo
$$f''(x) = D^2[f](x) = 2\,\log(x) + 3 + 4\,\frac{1}{x^2}$$
è immediato verificare che nell'intervallo $[1, 2]$ i tre addendi sono positivi e quindi la funzione $f' = D[f]$ è strettamente crescente e si può annullare al massimo una volta. La soluzione dell'equazione è quindi unica.

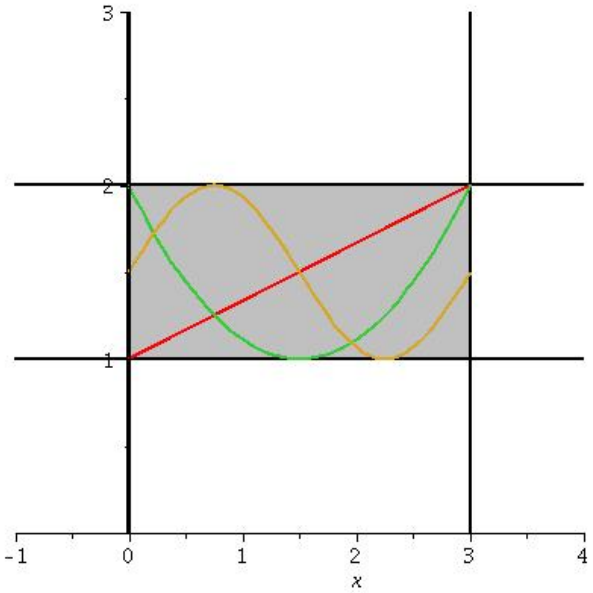
d. Notiamo che
$$0.125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}.$$
Poiché l'intervallo iniziale di incertezza è lungo 1 abbiamo che l'errore iniziale è minore o eguale a $\frac{1}{2}$, e dopo due iterazioni dell'algoritmo di bisezione si ottiene un valore approssimato della soluzione con un errore minore o eguale a $\dfrac{1}{2^3}$.

Soluzione esercizio 2. Per calcolare
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left|1 - x^2 - \log(x)\right| - \left|x^2 + x + 1\right|}{x + \log(3\,x)}$$
dobbiamo per prima cosa cercare di scrivere il numeratore senza i due valori assoluti. Poiché
$$\lim_{x \to +\infty} 1 - x^2 - \log(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 + x + 1 = +\infty$$
possiamo eliminare i due valori assoluti all'interno del limite cambiando di segno alla prima espressione perché diventa negativa al crescere di x e lasciando inalterata la seconda perché, invece, è positiva al crescere di x. Il limite così diventa
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \frac{-\left(1 - x^2 - \log(x)\right) - \left(x^2 + x + 1\right)}{x + \log(3\,x)} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x) - x - 2}{x + \log(3\,x)} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(\dfrac{\log(x)}{x} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1 + \dfrac{\log(3\,x)}{x}\right)} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 3. La funzione
$$f := x \mapsto f(x) = x\,|x|$$
ha per dominio $Dom(f) = \mathbb{R}$ e, in quanto prodotto di funzioni elementari (derivabili e continue), è continua in tutto $\mathbb{R}$ ed è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ tranne, al massimo, in $x_0 = 0$ dove il valore assoluto non è derivabile. In $x_0 = 0$ dobbiamo verificare la derivabilità utilizzando la definizione
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{x\,|x|}{x} = \\
&= \lim_{x \to 0} |x| = 0
\end{aligned}$$

e dunque la nostra funzione è derivabile anche in $x_0 = 0$.

Soluzione esercizio 4. Per le definizioni si veda il libro di testo.
Per l'esempio da fornire, dobbiamo trovare una funzione il cui grafico abbia come proiezione sull'asse x l'intervallo $[0, 3]$ e sull'asse y l'intervallo $[1, 2]$, ovviamente di funzioni con questa proprietà ce ne sono infinite



la scelta più semplice è prendere la retta (crescente) che descrive la diagonale del rettangolo individuato dal dominio e dall'immagine

$$f(x) = 1 + \frac{2-1}{3-0} \cdot x = 1 + \frac{1}{3}x$$

che ha $\sup f = \max f = 2$, poiché $\operatorname{Im} f = [1,\, 2]$.

Soluzione esercizio 5.

(a) Il problema di massimizzazione del profitto può essere formulato così

$$\max_{p \in [0,4]} f(p)$$

con $f(p) = 800\, p\, e^{-p/6}$, ovvero l'impresa vuole massimizzare $800\, p\, e^{-p/6}$ rispetto a p, per p contenuto in $[0, 4]$. Poiché f è una funzione continua in $[0, 4]$, il teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di un punto di massimo globale per f in $[0, 4]$.

(b) Per ricavare il punto di massimo si studia il segno di $f'(p) = D[f](p)$ in $[0, 4]$. Poiché

$$f'(p) = D[f](p) = 800\, e^{-p/6} + 800\, p e^{-p/6}(-\frac{1}{6}) = \frac{400}{3} e^{-p/6}\,(6 - p)\,,$$

si ricava $f'(p) = D[f](p) > 0$ per ogni $p \in [0, 4]$; dunque f è monotona strettamente crescente in $[0, 4]$. Pertanto esiste un unico punto di massimo globale per f in $[0, 4]$, ed è $p = 4$. Se venisse cancellata la legge che impone $p \leq 4$, allora l'impresa potrebbe scegliere ogni $p \geq 0$. Osservando $f' = D[f]$ si deduce che f è monotona strettamente crescente in $[4, 6]$, dunque $f(6) > f(4)$ e quindi la cancellazione della legge che impone $p \leq 4$ permetterebbe all'impresa di aumentare il proprio profitto da $f(4)$ a $f(6)$.

Soluzione esercizio 6. Il dominio è $A = (0, +\infty)$ e f è continua e derivabile in A perché è il prodotto di funzioni elementari continue e derivabili in A. Inoltre

(i) $f(x) < 0$ per $x \in (0, 1)$, $f(1) = 0$, $f(x) > 0$ per $x \in (1, +\infty)$;

(ii) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^+ \cdot (-\infty)$, ma applicando il teorema di L'Hôpital a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x^2}}$$

si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^-;$$

(iii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$. Dunque non esistono asintoti verticali né orizzontali e non esistono nemmeno asintoti obliqui poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

La derivata prima è

$$f'(x) = D[f](x) = x(1 + 2\log(x))$$

e

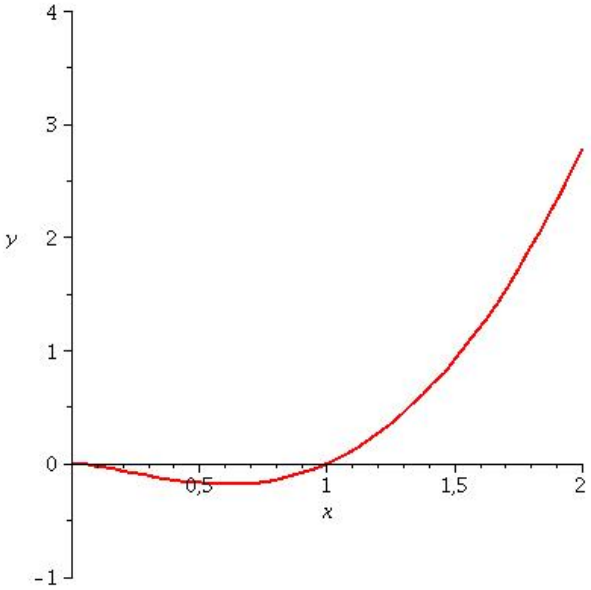
$$\begin{aligned} f'(x) = D[f](x) < 0 \quad &\text{per} \quad x \in (0, e^{-1/2}), \\ f'(x) = D[f](x) > 0 \quad &\text{per} \quad x \in (e^{-1/2}, +\infty). \end{aligned}$$

Dunque f è monotona strettamente decrescente in $(0, e^{-1/2})$, monotona strettamente crescente in $(e^{-1/2}, +\infty)$, e $x = e^{-1/2}$ è punto di minimo globale per f.
La derivata seconda è

$$f''(x) = D^2[f](x) = 2\log(x) + 3$$

$$\begin{aligned} f''(x) = D^2[f](x) < 0 \quad &\text{per} \quad x \in (0, e^{-3/2}), \\ f''(x) = D^2[f](x) > 0 \quad &\text{per} \quad x \in (e^{-3/2}, +\infty). \end{aligned}$$

Dunque f è concava in $(0, e^{-3/2})$, convessa in $(e^{-3/2}, +\infty)$, e $x = e^{-3/2}$ è punto di flesso per f.
Il grafico di f è quindi il seguente:



Compito B del 17 Giugno 2013, Matematica per le Applicazioni Economiche I

Esercizio 1. (10 punti)

(a) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

(b) Dimostrare che l'equazione

$$2\,x - 3 + \pi\,\cos(\pi\,x) = 0$$

ha almeno una soluzione nell'intervallo $[1, 2]$. Suggerimento: applicare il Teorema di Rolle nell'intervallo $[1, 2]$ alla funzione

$$f : x \mapsto f(x) = x^2 - 3\,x + 2 + \sin(\pi\,x)$$

(c) Dimostrare che nell'intervallo [1, 2] la soluzione è unica.

(d) Quante iterazioni dell'algoritmo di bisezione sarebbero necessarie per trovare un valore approssimato di questa soluzione con un errore non superiore a $0,125$?

Esercizio 2. (5 punti)
Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left|1 - x^2 - \sin(x)\right| - \left|x^2 - x + 1\right|}{x + \sin(3\,x)}$$

Esercizio 3. (5 punti)
Utilizzando le definizioni di continuità e derivabilità e/o i teoremi sulle funzione continue e/o derivabili, studiare la continuità e la derivabilità della seguente funzione in tutti i punti del suo dominio.

$$f := x \mapsto f(x) = |x|\,\log(1 - 3\,x)$$

Esercizio 4. (5 punti)
Per una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ (con $A \subseteq \mathbb{R}$) si diano le definizioni di

(a) $\mathrm{Im}(f)$;

(b) $\inf f$;

(c) funzione monotona strettamente crescente.

Si fornisca un esempio di funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ che non è monotona strettamente crescente ed è tale che $\mathrm{Im}(f) = [2, 5]$; per tale funzione si ricavi $\inf f$.

Esercizio 5. (7 punti)
Un'impresa deve scegliere il prezzo $p \geq 0$ per il prodotto che mette in vendita e sa che, per ogni $p \geq 0$, la quantità venduta è pari a $900\,e^{-p/7}$ unità. Per semplicità immaginiamo che l'impresa non sostenga alcun costo di produzione (né di vendita). Pertanto il profitto dell'impresa coincide con il ricavo, che è dato dal prodotto $p \cdot 900\,e^{-p/7}$. L'impresa vuole individuare il valore di p che massimizza il profitto, ma deve rispettare una legge che le vieta di scegliere p maggiore di 8.

(a) Si scriva il problema di massimizzazione del profitto e si dica se è possibile affermare immediatamente che tale problema ammette soluzione.

(b) Si individui il valore di p che massimizza il profitto. Si dica se la cancellazione della legge che impone $p \leq 8$ permetterebbe all'impresa di aumentare il profitto rispetto al profitto che ottiene in presenza della legge (si spieghi).

Esercizio 6. (8 punti)
Si studi la funzione

$$f(x) = x\,(\log(x))^2$$

Soluzione esercizio 1.

a. Per l'enunciato e la dimostrazione del Teorema di Rolle si veda il libro di testo

b. La funzione
$$f : x \mapsto f(x) = x^2 - 3\,x + 2 + \sin(\pi\,x)$$
soddisfa le ipotesi del Teorema nell'intervallo $[1, 2]$ in quanto somma di funzioni elementari continue e derivabili in quell'intervallo ed inoltre
$$f(1) = 0, \quad f(2) = 0$$
e quindi esiste un punto $c \in [1, 2]$ in cui
$$f'(c) = D[f](c) = 2\,c - 3 + \pi\,\cos(\pi\,c) = 0.$$

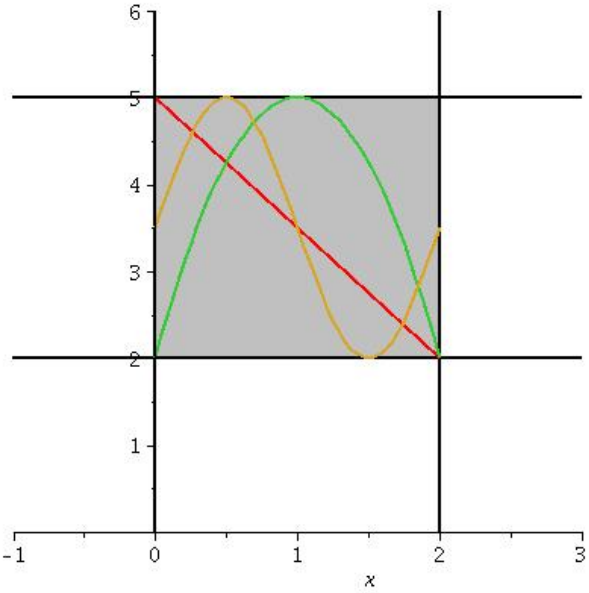
c. Se deriviamo la funzione al primo membro dell'equazione otteniamo
$$f''(x) = D^2[f](x) = 2 - \pi^2\,\sin(\pi\,x)\,;$$
è immediato verificare che nell'intervallo $[1, 2]$ questa espressione è positiva (la funzione seno è negativa fra π e $2\,\pi$) e quindi la funzione $f' = D[f]$ è strettamente crescente e si può annullare al massimo una volta. La soluzione dell'equazione è quindi unica.

d. Notiamo che
$$0.125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8},$$
Poiché l'intervallo iniziale di incertezza è lungo 1 abbiamo che l'errore iniziale minore o eguale a $\frac{1}{2}$, e dopo due iterazioni dell'algoritmo di bisezione si ottiene un valore approssimato della soluzione con un errore minore o eguale a $\dfrac{1}{2^3}$.

Soluzione esercizio 2. Per calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left|1 - x^2 - \sin(x)\right| - \left|x^2 - x + 1\right|}{x + \sin(3\,x)}$$
dobbiamo per prima cosa cercare di scrivere il numeratore senza i due valori assoluti. Poiché
$$\lim_{x\to+\infty} 1 - x^2 - \sin(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 - x + 1 = +\infty$$
possiamo eliminare i due valori assoluti all'interno del limite cambiando di segno alla prima espressione perché diventa negativa al crescere di x e lasciando inalterata la seconda perché, invece, è positiva al crescere di x. Il limite così diventa
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{-\left(1 - x^2 - \sin(x)\right) - \left(x^2 - x + 1\right)}{x + \sin(3\,x)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x) + x - 2}{x + \sin(3\,x)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\dfrac{\sin(x)}{x} + 1 - \dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1 + \dfrac{\sin(3\,x)}{x}\right)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 3. La funzione
$$f := x \mapsto f(x) = |x|\,\log(1 - 3\,x)$$
ha per dominio $Dom(f) = (-\infty, \dfrac{1}{3})$ e, in quanto prodotto e composizione di funzioni elementari continue, è continua in tutto il suo dominio ed è derivabile in tutto il suo dominio tranne, al massimo, in $x_0 = 0$ dove il valore assoluto non è derivabile. In $x_0 = 0$ dobbiamo verificare la derivabilità utilizzando la definizione
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{|x|\,\log(1 - 3\,x)}{x} = \\
&= \lim_{x\to 0} |x| \cdot (-3) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\log(1 - 3\,x)}{-3\,x} = 0 \cdot 1 = 0
\end{aligned}$$

e dunque la nostra funzione è derivabile anche in $x_0 = 0$.
Soluzione esercizio 4. Per le definizioni si veda il libro di testo.
Per l'esempio da fornire, dobbiamo trovare una funzione il cui grafico abbia come proiezione sull'asse x l'intervallo $[0, 2]$ e sull'asse y l'intervallo $[2, 5]$, ovviamente di funzioni con questa proprietà ce ne sono infinite



la scelta più semplice è prendere la retta (decrescente) che descrive la diagonale del rettangolo individuato dal dominio e immagine

$$f(x) = 5 - \frac{5-2}{2-0} \cdot x = 5 - \frac{3}{2}x$$

con $\sup f = \max f = 5$ e $\inf f = \min f = 2$, poiché $\operatorname{Im} f = [2,\, 5]$.

Soluzione esercizio 5.

1. Il problema di massimizzazione del profitto può essere formulato così

$$\max_{p \in [0,8]} f(p)$$

con $f(p) = 900\, p\, e^{-p/7}$, ovvero l'impresa vuole massimizzare $900\, p\, e^{-p/7}$ rispetto a p, per p contenuto in $[0, 8]$. Poiché f è una funzione continua in $[0, 8]$, il teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di un punto di massimo globale per f in $[0, 8]$.

2. Per ricavare il punto di massimo si studia il segno di $f'(p) = D[f](p)$ in $[0, 8]$. Poiché

$$f'(p) = D[f](p) = 900\, e^{-p/7} + 900\, p\, e^{-p/7}(-\frac{1}{7}) = \frac{900}{7}\, e^{-\frac{1}{7}\, p}\, (7 - p)\,,$$

si ricava $f'(p) = D[f](p) > 0$ per $p \in [0, 7)$, $f'(p) = D[f](p) < 0$ per $p \in (7, 8]$; dunque f è monotona strettamente crescente in $[0, 7]$, monotona strettamente decrescente in $[7, 8]$. Pertanto esiste un unico punto di massimo globale per f in $[0, 8]$, ed è $p = 7$. Se venisse cancellata la legge che impone $p \leq 8$, allora l'impresa potrebbe scegliere ogni $p \geq 0$. Osservando $f' = D[f]$ si deduce che f è monotona strettamente decrescente in $[8, +\infty)$, dunque $f(p) < f(8) < f(7)$ per ogni $p > 8$ e la cancellazione della legge che impone $p \leq 8$ non permetterebbe all'impresa di aumentare il proprio profitto.

Soluzione esercizio 6. Il dominio è $A = (0, +\infty)$, e f è continua e derivabile in A perché è il prodotto di funzioni elementari continue e derivabili in A. Inoltre

(i) $f(x) > 0$ per $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $f(1) = 0$;

(ii) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^+ \cdot (+\infty)$, ma applicando il teorema di L'Hopital a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(\log(x))^2}{\frac{1}{x}}$$

(due iterazioni) si ottiene $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^+$;

(iii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$.

Dunque non esistono asintoti verticali né orizzontali, e non esistono nemmeno asintoti obliqui poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

La derivata prima è

$$f'(x) = D[f](x) = \log(x)\,(\log(x)+2)$$

$$\begin{aligned} f'(x) = D[f](x) < 0 \quad &\text{per} \quad x \in (e^{-2}, 1), \\ f'(x) = D[f](x) > 0 \quad &\text{per} \quad x \in (0, e^{-2}) \cup (1, +\infty). \end{aligned}$$

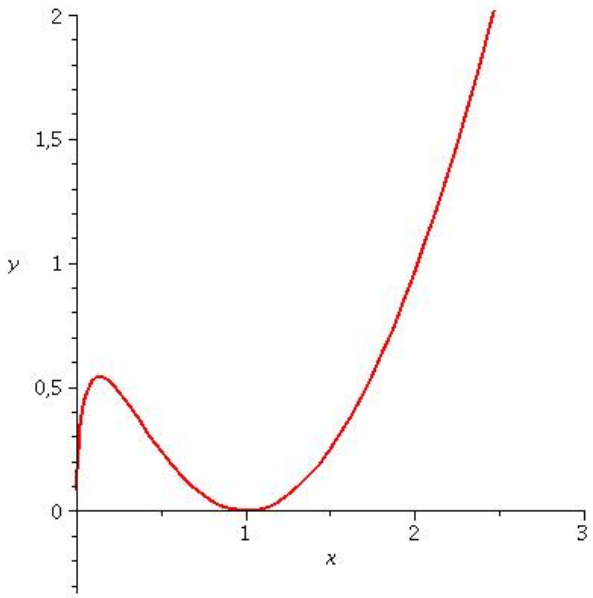
Dunque f è monotona strettamente crescente in $(0, e^{-2})$ e in $(1, +\infty)$;, monotona strettamente decrescente in $(e^{-2}, 1)$. $x = e^{-2}$ è punto di massimo (locale, dato che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$) e $x = 1$ è punto di minimo (globale, dato che $f(1) = 0$ e $f(x) > 0$ per $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$).

La derivata seconda è

$$f''(x) = D^2[f](x) = 2\,\frac{\log(x)+1}{x}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = D^2[f](x) < 0 \quad &\text{per} \quad x \in (0, e^{-1}), \\ f''(x) = D^2[f](x) > 0 \quad &\text{per} \quad x \in (e^{-1}, +\infty). \end{aligned}$$

Dunque f è concava in $(0, e^{-1})$, convessa in $(e^{-1}, +\infty)$, e $x = e^{-1}$ è un punto di flesso per f. Il grafico di f è quindi il seguente:



Matematica per le Applicazioni Economiche I 04-07-2013, Fila A

Nome _____ **Matricola** _____

Esercizio 1. (5 punti)
Si consideri la funzione $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{(x-1)^2}$. Si dimostri che f è iniettiva e si determini $\mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 2. (5 punti)
Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2+2x^2+x^4} - \sqrt{1+3x+x^4}\right).$$

Esercizio 3. (5 punti)
Si enunci il teorema dei valori intermedi. Dimostrare che l'equazione

$$\frac{x^3}{x^2+2} = 3$$

ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[-5, 10]$.

Esercizio 4. (8 punti)

1. Si enunci e si dimostri il criterio di monotonia (crescente) per le funzioni derivabili;
2. si determinino gli intervalli di monotonia della funzione $f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{1-x}$.

Esercizio 5. (7 punti)

Si consideri un'impresa che produce un bene. Il ricavo totale ottenuto producendo una quantità $q \geq 0$ del bene è descritto dalla funzione

$$R(q) = 4 - 2^{-2q}.$$

Il costo necessario per produrre la quantità q del bene è descritto dalla funzione

$$C(q) = \frac{2^q}{4};$$

L'impresa ha come obiettivo la massimizzazione del profitto, cioè della funzione

$$\pi(q) = R(q) - C(q).$$

Si assuma che la quantità massima che l'impresa può produrre sia 4.
1. Si scriva il problema di massimizzazione del profitto e si dica se ammette soluzione.
2. Si dica qual è la soluzione del problema dell'impresa.

Esercizio 6. (10 punti)
Si studi la funzione $f(x)$ (suggerimento: non occuparsi del calcolo degli zeri della funzione $f(x)$)

$$f(x) = \log(x^2+1) - \frac{3x}{5}$$

e si disegni il suo grafico.

ESERCIZIO 1.

Per quanto riguarda l'iniettività si può osservare che se $x_1 \neq x_2$ e $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ allora $x_1 - 1 \neq x_2 - 1$ e anche $x_1 - 1 < 0$, $x_2 - 1 < 0$. Quindi $(x_1 - 1)^2 \neq (x_2 - 1)^2$ e poiché la funzione $x \to e^x$ è iniettiva si ha

$$f(x_1) = e^{(x_1-1)^2} \neq e^{(x_2-1)^2} = f(x_2).$$

In definitiva si ha che se $x_1 \neq x_2$ e $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$ ottenendo così l'iniettività di f.

L'inetività di f può essere anche dimostrata osservando che la funzione f è strettamente decrescente in quanto risulta

$$f(x) = g\left(h(x)\right),$$

dove $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è tale che $g(x) = e^x$ e $h : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ è tale che $h(x) = (x-1)^2$. Ora, g è strettamente crescente e h è strettamente decrescente. Quindi f è strettamente decrescente e, poiché una funzione strettamente decrescente è iniettiva, f risulta iniettiva.

Per quanto riguarda $\mathrm{Im}\,(f)$, ricordiamo che

$$\mathrm{Im}\,(f) = f\left((-\infty, 0]\right) = g\left(h((-\infty, 0])\right),$$

e osserviamo che

$$h((-\infty, 0]) = [1, +\infty)$$

e

$$g\left([1, +\infty)\right) = [e, +\infty)$$

quindi

$$\mathrm{Im}\,(f) = [e, +\infty).$$

ESERCIZIO 2.

Il limite proposto è una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$. Per superare questa indeterminazione effettuiamo le seguenti semplici trasformazioni. Innnanzitutto moltiplichiamo e dividiamo la funzione $\sqrt{2 + 2x^2 + x^4} - \sqrt{1 + 3x + x^4}$ per $\sqrt{2 + 2x^2 + x^4} + \sqrt{1 + 3x + x^4}$ e otteniamo:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2 + 2x^2 + x^4} - \sqrt{1 + 3x + x^4} &= \frac{\left(\sqrt{2 + 2x^2 + x^4} - \sqrt{1 + 3x + x^4}\right)\left(\sqrt{2 + 2x^2 + x^4} + \sqrt{1 + 3x + x^4}\right)}{\sqrt{2 + 2x^2 + x^4} + \sqrt{1 + 3x + x^4}} = \\
&= \frac{(2 + 2x^2 + x^4) - (1 + 3x + x^4)}{\sqrt{2 + 2x^2 + x^4} + \sqrt{1 + 3x + x^4}} = \frac{1 - 3x + 2x^2}{\sqrt{2 + 2x^2 + x^4} + \sqrt{1 + 3x + x^4}}.
\end{aligned}$$

Poi osserviamo che

$$\begin{aligned}
\frac{1 - 3x + 2x^2}{\sqrt{2 + 2x^2 + x^4} + \sqrt{1 + 3x + x^4}} &= \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2\right)}{\sqrt{x^4\left(\frac{2}{x^4} + \frac{2}{x^2} + 1\right)} + \sqrt{x^4\left(\frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^3} + 1\right)}} = \\
&= \frac{x^2}{x^2}\frac{\left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2\right)}{\sqrt{\frac{2}{x^4} + \frac{2}{x^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^3} + 1}} = \frac{\left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2\right)}{\sqrt{\frac{2}{x^4} + \frac{2}{x^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^3} + 1}}.
\end{aligned}$$

In definitiva abbiamo

$$\sqrt{2+2x^2+x^4}-\sqrt{1+3x+x^4}=\frac{\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}+2\right)}{\sqrt{\frac{2}{x^4}+\frac{2}{x^2}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{3}{x^3}+1}}.$$

Ora, poiché

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}+2\right)=2$$

e

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2}{x^4}+\frac{2}{x^2}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{3}{x^3}+1}=2$$

otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2+2x^2+x^4}-\sqrt{1+3x+x^4}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}+2\right)}{\sqrt{\frac{2}{x^4}+\frac{2}{x^2}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{3}{x^3}+1}}=1.$$

ESERCIZIO 3.

L'enunciato del teorema dei valori intermedi si trova sul libro di testo. Per quanto riguarda l'esistenza di una soluzione procediamo nelmodo seguente. Indichiamo con$f$ la funzione tale che $f:[-5,10]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{x^2+2}$. La funzione f risulta continua in quanto quoziente di due polinomi e il denominatore, x^2+2, non si annulla in $[-5,10]$. Inoltre si ha

$$f(-5)=-\frac{125}{27}<3<\frac{1000}{102}=f(10),$$

quindi $3\in[f(-5),f(10)]$ e per il teorema dei valori intermedi si ha che esiste $c\in[-5,10]$ tale che

$$\frac{c^3}{c^2+2}=f(c)=3.$$

ESERCIZIO 4

La formulazione del criterio si può trovare sul libro di testo.

Il dominio $\mathcal{D}$ della funzione $f(x)$ è $(-\infty,1)\bigcup(1,+\infty)$.

La sua derivata è

$$f'(x)=\frac{1+2x-x^2}{2(1-x)^2}.$$

Essendo il denominatore della ultima espressione non negativo, osserviamo che il numeratore cambia il segno nei punti $1\pm\sqrt{2}$, e prende valori positivi nell'intervallo $I=\left(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right)$ ed è non positivo nel complemento di I. La derivata $f'(x)$ prende valori positivi nella intersezione

$$I\bigcap\mathcal{D}=\left(1-\sqrt{2},1\right)\bigcup\left(1,1+\sqrt{2}\right).$$

La funzione $f(x)$ cresce negli intervalli $\left(1-\sqrt{2},1\right)$ e $\left(1,1+\sqrt{2}\right)$. La derivata $f'(x)$ prende valori negativi e la funzione $f(x)$ decresce negli intervalli $\left(-\infty,1-\sqrt{2}\right)$ e $\left(1+\sqrt{2},+\infty\right)$.

ESERCIZIO 5.

Il problema della massimizzazione del profitto si formula come

$$\pi(q)=4-2^{-2q}-\frac{2^q}{4}\to\max;\ 0\le q\le 4,$$

ed ha soluzione d'accordo con teorema di Weierstrass.

Per trovare punto del massimo calcoliamo la derivata

$$\pi'(q) = 2^{-2q} 2 \log 2 - \frac{2^q \log 2}{4},$$

e cerchiamo i(l) punti(o) critici(o) dalla condizione

$$\pi'(q) = 2^{-2q} 2 \log 2 - \frac{2^q \log 2}{4} = 0,$$

che implica $2^{-2q} 8 = 2^q \Leftrightarrow 2^{3q} = 8$, da dove si trova l'unico punto critico $q_* = 1$.

È facile di vedere che la derivata $\pi'(q)$ è positiva e la funzione $\pi(q)$ cresce per $q \in [0, 1)$, mentre $\pi'(q) < 0$ e la $\pi(q)$ decresce per $q \in (1, 4]$.

Allora il massimo del profitto si raggiunge per $q_* = 1$; $\pi(q_*) = 3.25$.

ESERCIZIO 6.

Il dominio della funzione

$$f(x) = \log(x^2 + 1) - \frac{3x}{5}$$

è $\mathbb{R}$. La funzione è continua nel domino essendo la somma delle composizione delle funzioni elementari continue.

La funzione ne è pari ne dispari.

Il grafico della funzione non ha asintoti verticali.

Osserviamo che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty - (-\infty) = +\infty$.

Il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ risulta una forma indeterminata $+\infty - \infty$.

Trasformiamo $f(x)$ nella forma

$$f(x) = x \left(\frac{\log(x^2 + 1)}{x} - 3/5 \right).$$

Calcoliamo il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x}$, che è forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, applicando teorema di De L'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{(x^2 + 1) \cdot 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2/x}{1 + (1/x^2)} = 0.$$

Allora

$$\lim_{x\to+\infty} x \left(\frac{\log(x^2 + 1)}{x} - 3/5 \right) = +\infty \cdot (-3/5) = -\infty.$$

Per quanto riguarda gli asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$, definiti dalle formule $y = k_\pm x + \ell$, allora eventuali valori di $k_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ sono uguali entrambi ad $-3/5$, mentre eventuali valori di $\ell_\pm = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - k_\pm x)$ risultano infiniti. È dimostrata l'assenza di asintoti.

La derivata prima della funzione

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{3}{5} = \frac{10x - 3x^2 - 3}{5(x^2 + 1)},$$

si annulla nei punti $x_1 = 1/3, x_2 = 3$.

La derivata $f'(x)$ è negativa per $x \in (-\infty, 1/3) \bigcup (3, +\infty)$, dove la funzione $f(x)$ decresce, ed è positiva in $(-1/3, 3)$, dove $f(x)$ cresce.

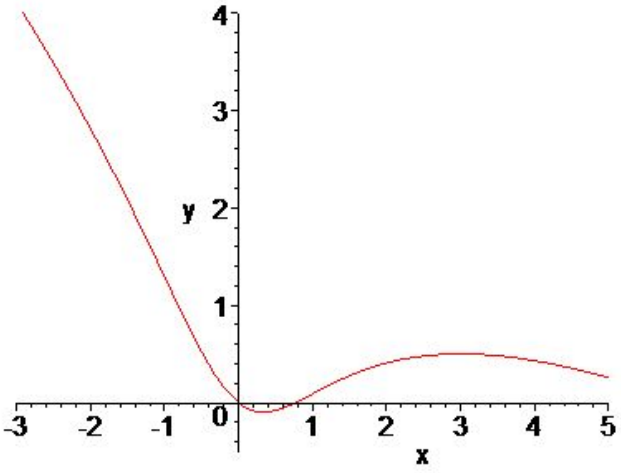
I punti $x_1 = 1/3, x_2 = 3$ sono rispettivamente i punti del minimo e del massimo locale.

La derivata seconda

$$f''(x) = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2},$$

si annulla nei punti $x = \pm 1$, che sono punti di flesso. La funzione risulta convessa in $(-1, 1)$ ed è concava altrove.

Il grafico della funzione e'



Matematica per le Applicazioni Economiche I 04-07-2013, Fila B

Nome _____ **Matricola** _____

Esercizio 1. (5 punti)
Si consideri la funzione $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 + (x+1)^2}$. Si dimostri che f è iniettiva e si determini $\mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 2. (5 punti)
Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1 + 3x^2 + x^6} - \sqrt{1 + x^3 + x^6} \right).$$

Esercizio 3. (5 punti)
Si enunci il teorema dei valori intermedi. Dimostrare che l'equazione

$$x^3 + \sin x = 2$$

ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[-\pi/2, \pi]$.

Esercizio 4. (8 punti)

1. Si enunci e si dimostri il criterio di monotonia (decrescente) per le funzioni derivabili;
2. si determinino gli intervalli di monotonia della funzione $f(x) = -x + \frac{1}{1-2x}$.

Esercizio 5. (7 punti)

Si consideri un'impresa che produce un bene. Il ricavo totale ottenuto producendo una quantità $q \geq 0$ del bene è descritto dalla funzione

$$R(q) = \frac{q}{1+2q}.$$

Il costo necessario per produrre la quantità q del bene è descritto dalla funzione

$$C(q) = \log\left(1 + \frac{q}{8}\right);$$

L'impresa ha come obiettivo la massimizzazione del profitto, cioè della funzione

$$\pi(q) = R(q) - C(q).$$

Si assuma che la quantità massima che l'impresa può produrre sia 4.
1. Si scriva il problema di massimizzazione del profitto e si dica se ammette soluzione.
2. Si dica qual è la soluzione del problema dell'impresa.

Esercizio 6. (10 punti)
Si studi la funzione (suggerimento: non occuparsi del calcolo degli zeri della funzione $f(x)$)

$$f(x) = x^2 e^{-x/2} - 1,$$

e si disegni il suo grafico.

ESERCIZIO 1.

Per quanto riguarda l'iniettività si può osservare che se $x_1 \neq x_2$ e $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ allora $x_1 + 1 \neq x_2 + 1$ e anche $x_1 + 1 > 0$, $x_2 + 1 > 0$. Quindi $1 + (x_1 + 1)^2 \neq 1 + (x_2 + 1)^2$ e poiché la funzione $x \to \sqrt{x}$ è iniettiva si ha

$$f(x_1) = \sqrt{1 + (x_1 + 1)^2} \neq \sqrt{1 + (x_2 + 1)^2} = f(x_2).$$

In definitiva si ha che se $x_1 \neq x_2$ e $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$ ottenendo così l'iniettività di f.

L'inettività di f può essere anche dimostrata osservando che la funzione f è strettamente crescente in quanto risulta

$$f(x) = g\left(h(x)\right),$$

dove $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è tale che $g(x) = \sqrt{x}$ e $h : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ è tale che $h(x) = 1 + (x + 1)^2$. Ora sia g che h sono strettamente crescenti. Quindi f è strettamente crescente e, pertanto, è iniettiva.

Per quanto riguarda $\mathrm{Im}\,(f)$, ricordiamo che

$$\mathrm{Im}\,(f) = f\left([0, +\infty)\right) = g\left(h([0, +\infty))\right),$$

e osserviamo che

$$h([0, +\infty)) = [2, +\infty)$$

e

$$g\left([2, +\infty)\right) = [\sqrt{2}, +\infty)$$

quindi

$$\mathrm{Im}\,(f) = [\sqrt{2}, +\infty).$$

ESERCIZIO 2.

Il limite proposto è una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$. Per superare questa indeterminazione effettuiamo le seguenti semplici trasformazioni. Innanzitutto moltiplichiamo e dividiamo la funzione $\sqrt{1 + 3x^2 + x^6} - \sqrt{1 + x^3 + x^6}$ per $\sqrt{1 + 3x^2 + x^6} + \sqrt{1 + x^3 + x^6}$ e otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1 + 3x^2 + x^6} - \sqrt{1 + x^3 + x^6} = \\
&= \frac{\left(\sqrt{1 + 3x^2 + x^6} - \sqrt{1 + x^3 + x^6}\right)\left(\sqrt{1 + 3x^2 + x^6} + \sqrt{1 + x^3 + x^6}\right)}{\sqrt{1 + 3x^2 + x^6} + \sqrt{1 + x^3 + x^6}} = \\
&= \frac{(1 + 3x^2 + x^6) - (1 + x^3 + x^6)}{\sqrt{1 + 3x^2 + x^6} + \sqrt{1 + x^3 + x^6}} = \frac{3x^2 - x^3}{\sqrt{1 + 3x^2 + x^6} + \sqrt{1 + x^3 + x^6}}.
\end{aligned}$$

Poi osserviamo che

$$\begin{aligned}
&\frac{3x^2 - x^3}{\sqrt{1 + 3x^2 + x^6} + \sqrt{1 + x^3 + x^6}} = \frac{x^3\left(\frac{3}{x} - 1\right)}{\sqrt{x^6\left(\frac{1}{x^6} + \frac{3}{x^4} + 1\right)} + \sqrt{x^6\left(\frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^3} + 1\right)}} = \\
&= \frac{x^3}{x^3}\frac{\left(\frac{3}{x} - 1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^6} + \frac{3}{x^4} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^3} + 1}} = \frac{\left(\frac{3}{x} - 1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^6} + \frac{3}{x^4} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^3} + 1}}.
\end{aligned}$$

In definitiva abbiamo

$$\sqrt{1 + 3x^2 + x^6} - \sqrt{1 + x^3 + x^6} = \frac{\left(\frac{3}{x} - 1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^6} + \frac{3}{x^4} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^3} + 1}},$$

e

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+3x^2+x^6}-\sqrt{1+x^3+x^6}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{3}{x}-1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^6}+\frac{3}{x^4}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^3}+1}}=\frac{0-1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=-\frac{1}{2}$$

ESERCIZIO 3.

L'enunciato del teorema dei valori intermedi si trova sul libro di testo.

Per quanto riguarda l'esistenza di una soluzione procediamo nel modo seguente. Indichiamo con f la funzione tale che $f:[-\pi/2,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\sin x$. La funzione f risulta continua in quanto somma delle due funzioni continue x^3 e $\sin x$. Inoltre si ha

$$f(-\pi/2)=-\frac{\pi^3}{8}-1<2<\pi^3=f(\pi),$$

quindi $2\in[f(-\pi/2),f(\pi)]$ e per il teorema dei valori intermedi si ha che esiste $c\in[-\pi/2,\pi]$ tale che

$$c^3+\sin c=f(c)=2.$$

ESERCIZIO 4

La formulazione del criterio si può trovare sul libro di testo.

Il dominio $\mathcal{D}$ della funzione $f(x)$ è $(-\infty,1/2)\bigcup(1/2,+\infty)$. La sua derivata è

$$f'(x)=\frac{-4x^2+4x+1}{(1-2x)^2}.$$

Essendo il denominatore della ultima espressione non negativo, osserviamo che il numeratore cambia il segno nei punti $\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$, e prende valori positivi nell'intervallo $I=\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2},\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ ed è non positivo nel complemento di I. La derivata $f'(x)$ prende valori positivi nella intersezione

$$I\bigcap\mathcal{D}=\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)\bigcup\left(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right).$$

La funzione $f(x)$ cresce negli intervalli $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$. La derivata $f'(x)$ prende valori negativi e la funzione $f(x)$ decresce negli intervalli $\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

ESERCIZIO 5

Il problema della massimizzazione del profitto si formula come

$$\pi(q)=R(q)-C(q)=\frac{q}{1+2q}-\log\left(1+\frac{q}{8}\right)\to\max;\ 0\le q\le 4,$$

ed ha soluzione d'accordo con teorema di Weierstrass.

Per trovare il punto del massimo calcoliamo la derivata

$$\pi'(q)=\frac{1}{(1+2q)^2}-\frac{1}{8+q}=\frac{7-3q-4q^2}{(1+2q)^2(8+q)},$$

e cerchiamo i(l) punti(o) critici(o) di $\pi(q)$ dalla condizione $\pi'(q)$. I punti critici risultano $q_0=-7/4, q_1=1$; q_0 non soddisfa i vincoli.

È facile di vedere che la derivata $\pi'(q)$ è positiva e la funzione $\pi(q)$ cresce nell'intervallo $[0,1)$, mentre $\pi'(q)<0$ e $\pi(q)$ decresce in $(1,4]$. Allora il massimo del profitto si raggiunge per $q_1=1$; $\pi(q_1)=\frac{1}{3}-\log(9/8)\approx 0,21$.

ESERCIZIO 6.

Il dominio della funzione

$$f(x) = x^2 e^{-x/2} - 1,$$

è $\mathbb{R}$. La funzione è ottenuta tramite somme, prodotti e le composizioni delle funzioni elementari continue, e quindi è continua nel dominio.

Il grafico della funzione non ha asintoti verticali.

La funzione ne è pari ne dispari.

Osserviamo che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \cdot +\infty - 1 = +\infty$, mentre il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ contiene una forma indeterminata $\infty \cdot 0$.

Il limite $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x/2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x/2}}$ è del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Applicando teorema di De L'Hopital (due volte) concludiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{(1/2)e^{x/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{(1/4)e^{x/2}},$$

e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$. Il grafico di $f(x)$ ha asintoto orizzontale $y = -1$ per $x \to +\infty$.

Per quanto riguarda asintoto obliquo per $x \to -\infty$, vediamo, che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x/2} = -\infty,$$

mostrando assenza di tale asintoto.

La derivata prima

$$f'(x) = \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) e^{-x/2},$$

si annulla nei punti 0 e 4.

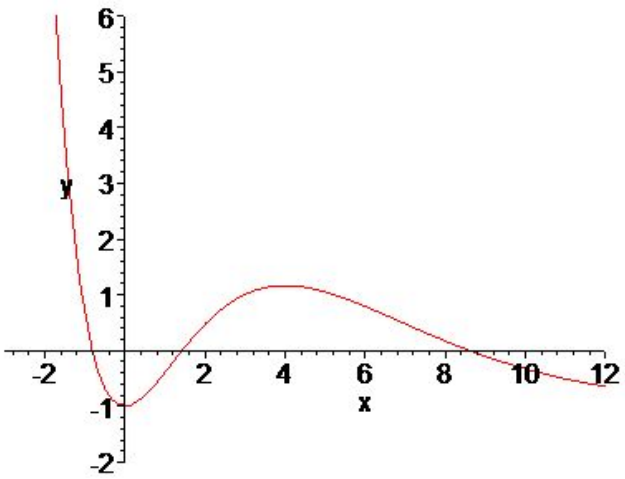
La derivata $f'(x)$ è positiva per $x \in (0, 4)$, dove la funzione $f(x)$ cresce; $f'(x)$ è negativa in $(-\infty, 0) \bigcup (4, \infty)$ dove la f decresce. I punti $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$ sono rispettivamente i punti del minimo e del massimo locale.

La derivata seconda

$$f''(x) = \left(2 - 2x + \frac{x^2}{4}\right) e^{-x/2},$$

si annulla nei punti $x = 4 \pm 2\sqrt{2}$, che sono punti di flesso. La funzione risulta concava in $(4-2\sqrt{2}, 4+2\sqrt{2})$ ed è convessa altrove.

Il grafico della funzione è



Esame di
Matematica per le applicazioni economiche 1
4 settembre 2013

FILA A

-Pena l'annullamento della prova, è vietato l'uso di calcolatrici e telefoni cellulari, smartphone o ogni altro strumento che sia in grado di connettersi con l'esterno. Lo studente può portare con sé, al posto assegnato, soltanto il materiale per scrivere, cancellare. Tutto il resto, cappotti e giacche incluse, deve essere lasciato agli appositi attaccapanni al momento dell'ingresso in aula.

-È possibile ritirarsi o consegnare soltanto dopo che sia trascorsa almeno un'ora dall'inizio della prova.

-Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato il compito per la correzione o essersi ritirato.

-Verranno verbalizzati tutti i risultati d'esame sia positivi che negativi.

-La prova ha la durata di due ore e mezzo. Spiegate con molta cura le vostre risposte.

→ Consegnate SEPARATAMENTE la parte relativa agli (Esercizi 1 - 2 - 3) e quella relativa agli (Esercizi 4 - 5 - 6). ←

Esercizio 1. (5 punti)

Si consideri la funzione

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = 7x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 5x + 3.$$

a. Si dia la definizione di funzione monotona crescente.

b. Si dimostri usando le relative definizioni che f non é né monotona crescente né monotona decrescente.

c. Si determini un maggiorante di $Im(f)$.

Esercizio 2. (5 punti)

Si determini il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = e^{\sin(x)} + \sqrt{\frac{2|x| - 1}{x^2 - 2x - 3}}$$

Esercizio 3. (5 punti)

Si calcolino i seguenti limiti:

a.

$$\lim_{x \to 0} \frac{4^x - 1}{2^x - 1},$$

b

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - \sqrt{x}}{1 - x},$$

Esercizio 4. (8 punti)

a. Si enunci e dimostri il teorema di Lagrange.

b. Si applichi il teorema di Lagrange alla funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ nell'intervallo $[1, 2]$ per dimostrare che

$$\forall x_1, x_2 \in [1, 2] \text{ tali che } x_1 < x_2 \text{ si ha che } e^{x_2} - e^{x_1} > e(x_2 - x_1).$$

Esercizio 5. (7 punti)

Sia $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c(x)$ la funzione di consumo in termini di reddito. La funzione elasticità del consumo rispetto al reddito è definita come segue:

$$\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \tfrac{x \cdot c'(x)}{c(x)},$$

ed è interpretabile come l'aumento percentuale del consumo conseguente all'incremento di un punto percentuale del reddito. Sia

$$c(x) = -x^2 + 4x.$$

a. E' possibile dimostrare che la funzione elasticità ammette un massimo e un minimo globale nell'intervallo $[1, 3]$ senza calcolare i punti di massimo e di minimo globale?

b. Si calcolino i punti di massimo e minimo globale della funzione elasticita' η nell'intervallo $[1, 3]$.

Esercizio 6. (10 punti)

Si studi il grafico di

$$f(x) = \left| \frac{2}{e^{\frac{1}{x-4}} - 1} \right|$$

Non si studi la presenza di eventuali asintoti obliqui a $\pm\infty$; non si studi il segno della derivata seconda.

Esame di
Matematica per le applicazioni economiche 1
4 settembre 2013

FILA B

-Pena l'annullamento della prova, è vietato l'uso di calcolatrici e telefoni cellulari, smartphone o ogni altro strumento che sia in grado di connettersi con l'esterno. Lo studente può portare con sé, al posto assegnato, soltanto il materiale per scrivere, cancellare. Tutto il resto, cappotti e giacche incluse, deve essere lasciato agli appositi attaccapanni al momento dell'ingresso in aula.

-È possibile ritirarsi o consegnare soltanto dopo che sia trascorsa almeno un'ora dall'inizio della prova.

-Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato il compito per la correzione o essersi ritirato.

-Verranno verbalizzati tutti i risultati d'esame sia positivi che negativi.

-La prova ha la durata di due ore e mezzo. Spiegate con molta cura le vostre risposte.

→ Consegnate SEPARATAMENTE la parte relativa agli (Esercizi 1 - 2 - 3) e quella relativa agli (Esercizi 4 - 5 - 6). ←

Esercizio 1. (5 punti)
Si consideri la funzione

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = -5x^5 + 3x^3 - 16x^2 - 3x + 2.$$

a. Si dia la definizione di funzione monotona decrescente.
b. Si dimostri usando le relative definizioni che f non é né monotona crescente né monotona decrescente.
c. Si determini un maggiorante di $Im(f)$.

Esercizio 2. (5 punti)
Si determini il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sin\big(\cos(x)\big) - \sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{|x| - 5}}$$

Esercizio 3. (5 punti)
Si calcolino i seguenti limiti:
a.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{4^x - 1},$$

b

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1},$$

Esercizio 4. (8 punti)
a. Si enunci e dimostri il teorema di Lagrange.
b. Si applichi il teorema di Lagrange alla funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ nell'intervallo $[0, 1]$ per dimostrare che

$$\forall x_1, x_2 \in [0, 1] \text{ tali che } x_1 < x_2 \text{ si ha che } e^{x_2} - e^{x_1} < e\,(x_2 - x_1)\,.$$

Esercizio 5. (7 punti)
Sia $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto s(x)$ la funzione di risparmio (savings) in termini di reddito. La funzione elasticità del risparmio rispetto al reddito è definita come segue:

$$\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \tfrac{x \cdot s'(x)}{s(x)},$$

ed è interpretabile come l'aumento percentuale del risparmio conseguente all'incremento di un punto percentuale del reddito. Sia

$$s(x) = -x^2 + 8x.$$

a. E' possibile dimostrare che la funzione elasticità ammette un massimo e un minimo globale nell'intervallo $[1, 6]$ senza calcolare i punti di massimo e di minimo globale?;
b. Si calcolino i punti di massimo e minimo globale della funzione elasticita' η nell'intervallo $[1, 6]$.

Esercizio 6. (10 punti)
Si studi il grafico di

$$f(x) = -\frac{2}{e^{\frac{1}{x-4}} - 1}$$

Non si studi la presenza di eventuali asintoti obliqui a $\pm\infty$; non si studi il segno della derivata seconda

Soluzioni.

Fila A

Esercizio 1

Osserviamo che $f(-1) = 5$, $f(0) = 3$ e $f(1) = 11$. Dunque f non é monotona crescente poiché $f(-1) > f(0)$ e f non é monotona decrescente poiché $f(0) < f(1)$. Osserviamo adesso che, per ogni $x \in [-1, 1]$, si ha che

$$7x^4 \leq 7, \quad 8x^3 \leq 8, \quad -2x^2 \leq 0, \quad -5x \leq 5.$$

Dunque, per ogni $x \in [-1, 1]$,

$$f(x) \leq 7 + 8 + 0 + 5 + 3 = 23.$$

Da ciò segue che se $y \in Im(f)$ allora $y \leq 23$. Pertanto 23 é un maggiorante di $Im(f)$.

Esercizio 2

La funzione $e^{\sin(x)}$ é definita su tutto $\mathbb{R}$ pertanto ci possiamo ricondurre a studiare il campo di esistenza della formula

$$\sqrt{\frac{2|x| - 1}{x^2 - 2x - 3}} = \sqrt{\frac{2|x| - 1}{(x - 3)(x + 1)}}.$$

Sicuramente -1 e 3 non sono in tale insieme. Dobbiamo dunque risolvere la disequazione

$$\frac{2|x| - 1}{(x - 3)(x + 1)} \geq 0$$

su $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$. Il numeratore é non negativo per $x \in (-\infty, -1/2] \cup [1/2, +\infty)$. Il denominatore é non negativo per $x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$. Si ottiene dunque che la soluzione della disequazione ossia il campo di esistenza cercato é

$$(-\infty, -1) \cup \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right] \cup (3, +\infty).$$

Esercizio 3.

a. Il limite e' una forma indeterminata del tipo "$\frac{0}{0}$".

Ricordando il limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{4^x - 1}{2^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{4^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{2^x - 1} = \frac{\log 4}{\log 2} = \frac{\log 2^2}{\log 2} = 2.$$

b. Il limite e' una forma indeterminata del tipo "$\frac{0}{0}$".

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - \sqrt{x}}{1 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(x - \sqrt{x}\right) \cdot \left(x + \sqrt{x}\right)}{(1 - x) \cdot \left(x + \sqrt{x}\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{(1 - x) \cdot \left(x + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-x(1 - x)}{(1 - x) \cdot \left(x + \sqrt{x}\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{-x}{\left(x + \sqrt{x}\right)} = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 4.

a. Vedi libro di testo.

b. La funzione f e' continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$e dunque è continua su $[1, 2]$ e derivabile su $(1, 2)$. Possiamo dunque applicare il teorema di Lagrange per concludere che

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) \text{ tale che } \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} = e^{x_0} > e^1,$$

dove la disuguaglianza segue dal fatto che $x_0 > x_1 \geq 1$ e che $x_2 > x_1$.

Esercizio 5.

a. Poichè

$$\eta(x) = \frac{x(-2x+4)}{-x^2+4x} = \frac{-2x^2+4x}{-x^2+4x} = \frac{2x-4}{x-4}$$

il risultato segue dal teorema di Weirstrass (o del valore estremo) e dal fatto che

i. η e' una funzione continua perche' rapporto tra polinomi con polinomio al denominatore diverso da zero (e i polinomi sono funzioni continue), e

ii. $[1,2]$ e' un intervallo chiuso e limitato.

b. Occorre studiare il segno di η':

$$\eta'(x) = \frac{2(x-4)-2x+4}{(x-4)^2} = \frac{-4}{(x-4)^2}$$

Poichè per ogni $x \in [1,3]$, $\eta'(x) < 0$, η ammette massimo globale in 1 e minimo globale in 3.

Esercizio 6

Si studi il grafico di

$$f(x) = \left| \frac{2}{e^{\frac{1}{x-4}} - 1} \right|$$

Non si studi la presenza di eventuali asintoti obliqui a $\pm\infty$; non si studi il segno della derivata seconda.

Soluzione Esercizio 6A.

Disegniamo il grafico di $g(x) = \frac{2}{e^{\frac{1}{x-4}}-1}$ e poi quello di $f(x)$.

<u>1. Dominio.</u>

$x-4=0$ se e solo se $x=4$;
$e^{\frac{1}{x-4}} - 1 = 0$ se e solo se $\frac{1}{x-4} = 0$, che non e' verificato per alcun $x \in \mathbb{R}$. Dunque
$dom\ g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

<u>2. Segno.</u>

La funzione è positiva se $e^{\frac{1}{x-4}} - 1 > 0$, ovvero $\frac{1}{x-4} > 0$ o $x > 4$; la funzione e' negativa per $x < 4$.
$g(0) = \frac{2}{e^{\frac{1}{-4}}-1} = -9.0416$

<u>3. Punti di discontinuita'.</u>

$\lim_{x\to 4^-} \frac{2}{e^{\frac{1}{x-4}}-1} = \text{“}\frac{2}{e^{-\infty}-1}\text{”} = -2$
$\lim_{x\to 4+} \frac{2}{e^{\frac{1}{x-4}}-1} = \text{“}\frac{2}{e^{+\infty}-1}\text{”} = 0$

<u>4. Comportamento a $\pm\infty$.</u>

$\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{e^{\frac{1}{x-4}}-1} = \text{“}\frac{2}{e^{0^-}-1}\text{”} = \text{“}\frac{2}{0^-}\text{”} = -\infty$;
$\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{e^{\frac{1}{x-4}}-1} = \text{“}\frac{2}{e^{0^+}-1}\text{”} = \text{“}\frac{2}{0^+}\text{”} = +\infty$;

<u>5. Derivata prima.</u>

$$\frac{d\left(\frac{2}{e^{\frac{1}{x-4}}-1}\right)}{dx} = \frac{d\left(2\cdot\left(e^{\frac{1}{x-4}}-1\right)^{-1}\right)}{dx} =$$

$$-2\left(e^{\frac{1}{x-4}}-1\right)^{-2} e^{\frac{1}{x-4}}(-1)(x-4)^{-2} = \frac{2e^{\frac{1}{x-4}}}{\left(e^{\frac{1}{x-4}}-1\right)^2\cdot(x-4)^2} > 0$$

per qualsiasi valore di $x \in dom\ g$;dunque g e' strettamente crescente.

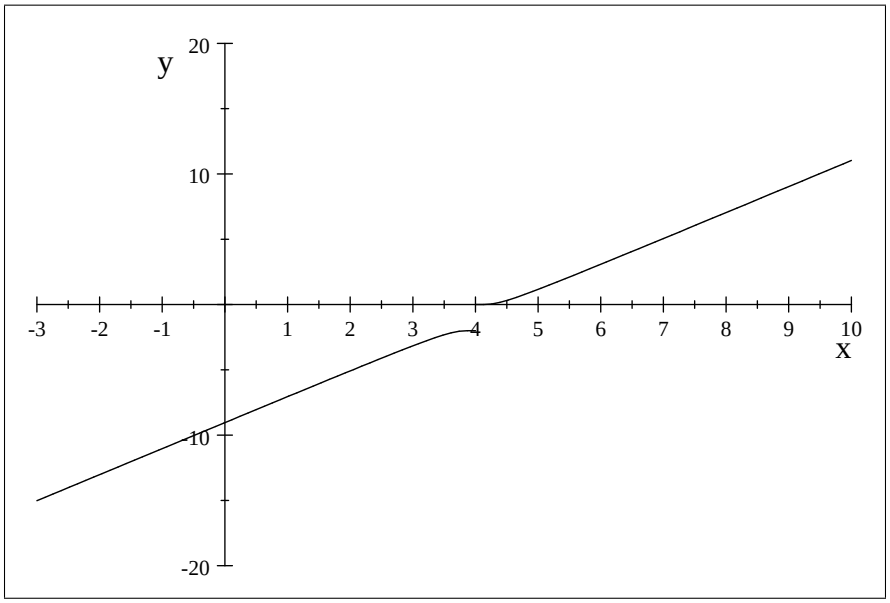
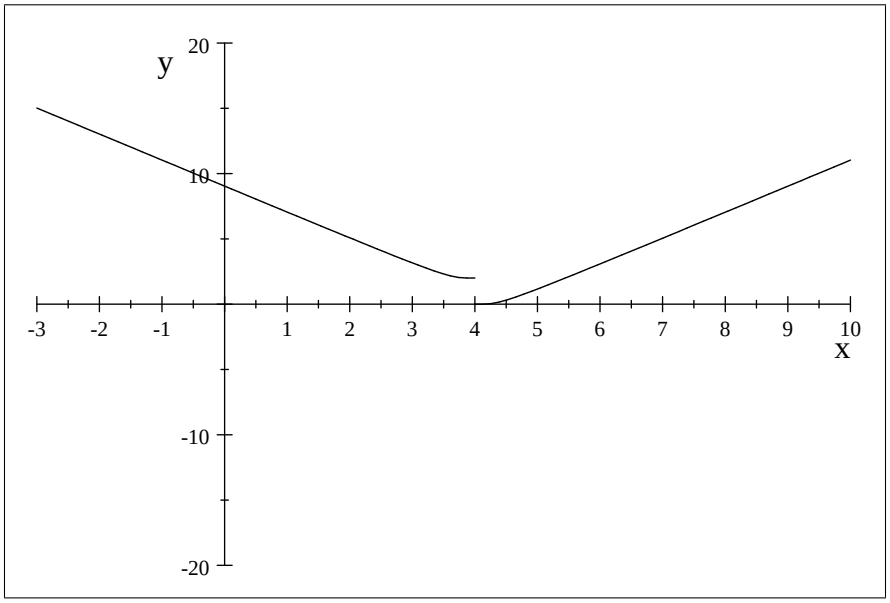


Grafico di f.



Fila B

Esercizio 1

Osserviamo che $f(-1) = -9$, $f(0) = 2$ e $f(1) = -19$. Dunque f non é monotona crescente poiché $f(0) > f(1)$ e f non é monotona decrescente poiché $f(-1) < f(0)$. Osserviamo adesso che, per ogni $x \in [-1, 1]$, si ha che

$$-5x^5 \leq 5, \quad 3x^3 \leq 3, \quad -16x^2 \leq 0, \quad -5x \leq 5.$$

Dunque, per ogni $x \in [-1, 1]$,

$$f(x) \leq 5 + 3 + 0 + 5 + 2 = 15.$$

Da ciò segue che se $y \in Im(f)$ allora $y \leq 15$. Pertanto 15 é un maggiorante di $Im(f)$.

Esercizio 2

La funzione $f(x) = \sin\big(\cos(x)\big)$ é definita su tutto $\mathbb{R}$ pertanto ci possiamo ricondurre a studiare il campo di esistenza della formula

$$\sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{|x| - 5}} = \sqrt{\frac{(x+3)(x-2)}{|x| - 5}}$$

Sicuramente 5 e -5 non sono in tale insieme. Dobbiamo dunque risolvere la disequazione

$$\frac{(x+3)(x-2)}{|x| - 5} \geq 0$$

su $\mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$. Il numeratore é non negativo per $x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$. Il denominatore é non negativo per $x \in (-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$. Si ottiene dunque che la soluzione della disequazione ossia il campo di esistenza cercato é

$$(-\infty, -5) \cup [-3, 2] \cup (5, +\infty).$$

Esercizio 3.

a. Il limite e' una forma indeterminata del tipo "$\frac{0}{0}$".

Ricordando il limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{4^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{4^x - 1} = \frac{\log 2}{\log 4} = \frac{\log 2}{\log 2^2} = \frac{1}{2}.$$

b. Il limite e' una forma indeterminata del tipo "$\frac{0}{0}$".

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(x - \sqrt{x}\right) \cdot \left(x + \sqrt{x}\right)}{(x-1) \cdot \left(x + \sqrt{x}\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{(x-1) \cdot \left(x + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1) \cdot \left(x + \sqrt{x}\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{\left(x + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 4.

a. Vedi libro di testo.

b. La funzione f e' continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$e dunque è continua su $[0, 1]$ e derivabile su $(0, 1)$ .Possiamo dunque applicare il teorema di Lagrange per concludere che

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) \text{ tale che } \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} = e^{x_0} < e^1,$$

dove la disuguaglianza segue dal fatto che $x_0 < x_1 \leq 1$ e che $x_2 > x_1$.

Esercizio 5.

a. Poichè

$$\eta(x) = \frac{x(-2x+8)}{-x^2+8x} = \frac{2x(-x+4)}{x(-x+8)} = \frac{2(x-4)}{x-8},$$

il risultato segue dal teorema di Weirstrass (o del valore estremo) e dal fatto che

i. η e' una funzione continua perche' rapporto tra polinomi con polinomio al denominatore diverso da zero (e i polinomi sono funzioni continue), e

ii. $[1,6]$ e' un intervallo chiuso e limitato.

b. Occorre studiare il segno di η':

$$\eta'(x) = \frac{2(x-8)-2(x-4)}{(x-8)^2} = \frac{-8}{(x-8)^2}$$

Poichè per ogni $x \in [1,6]$, $\eta'(x) < 0$, η ammette massimo globale in 1 e minimo globale in 6.

Esercizio 6.

Disegniamo il grafico di $g(x) = \frac{2}{e^{\frac{1}{x-4}}-1}$ e poi quello di $f(x)$.

<u>1. Dominio.</u>

$x-4=0$ se e solo se $x=4$;
$e^{\frac{1}{x-4}}-1=0$ se e solo se $\frac{1}{x-4}=0$, che non e' verificato per alcun $x \in \mathbb{R}$. Dunque
$dom\ g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

<u>2. Segno.</u>

La funzione è positiva se $e^{\frac{1}{x-4}}-1$, ovvero $\frac{1}{x-4}>0$ o $x>4$; la funzione e' negativa per $x<4$.
$g(0) = \frac{2}{e^{\frac{1}{-4}}-1} = -9.0416$

<u>3. Punti di discontinuita'.</u>

$\lim_{x\to -4^-} \frac{2}{e^{\frac{1}{x-4}}-1} = \text{“}\frac{2}{e^{-\infty}-1}\text{”} = -2$
$\lim_{x\to -4+} \frac{2}{e^{\frac{1}{x-4}}-1} = \text{“}\frac{2}{e^{+\infty}-1}\text{”} = 0$

<u>4. Comportamento a $\pm\infty$.</u>

$\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{e^{\frac{1}{x-4}}-1} = \text{“}\frac{2}{e^{0^-}-1}\text{”} = \text{“}\frac{2}{0^-}\text{”} = -\infty$;
$\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{e^{\frac{1}{x-4}}-1} = \text{“}\frac{2}{e^{0^+}-1}\text{”} = \text{“}\frac{2}{0^+}\text{”} = +\infty$;

<u>5. Derivata prima.</u>

$$\frac{d\left(\frac{2}{e^{\frac{1}{x-4}}-1}\right)}{dx} = \frac{d\left(2\cdot\left(e^{\frac{1}{x-4}}-1\right)^{-1}\right)}{dx} =$$

$$-2\left(e^{\frac{1}{x-4}}-1\right)^{-2} e^{\frac{1}{x-4}}(-1)(x-4)^{-2} = \frac{2e^{\frac{1}{x-4}}}{\left(e^{\frac{1}{x-4}}-1\right)^2\cdot(x-4)^2} > 0$$

per qualsiasi valore di $x \in dom\ g$;dunque g e' strettamente crescente.

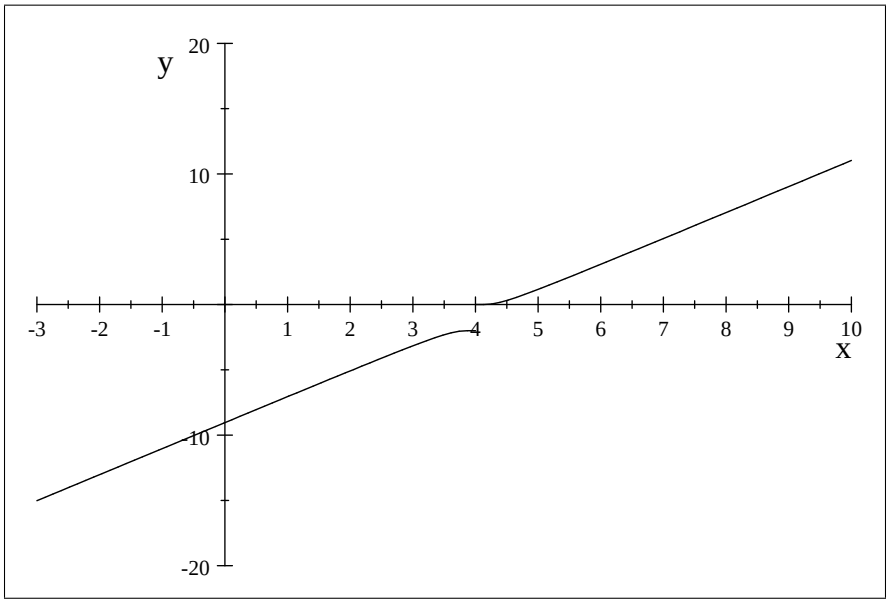
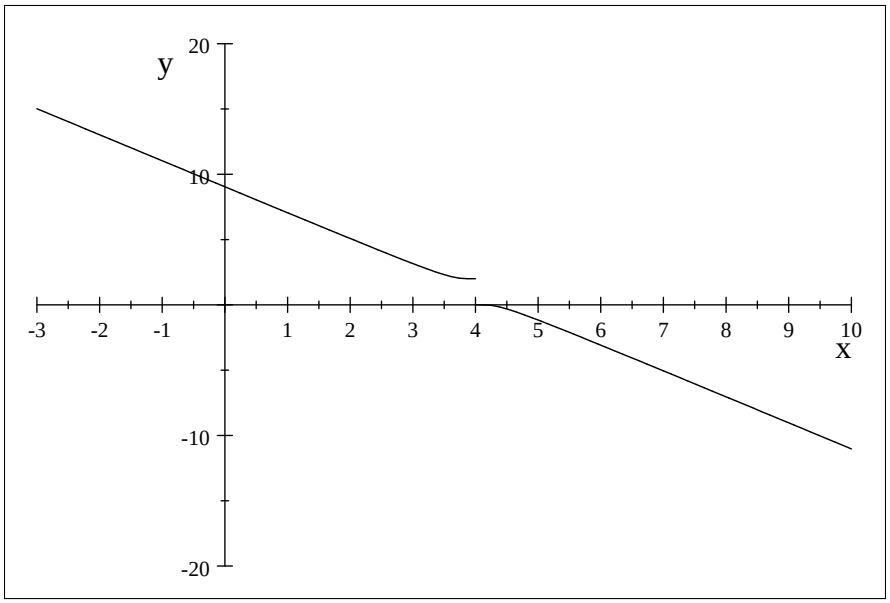


Grafico di f.



Matematica per le Applicazioni Economiche I 09-12-2013, Fila A

Nome _____ **Matricola** _____

Esercizio 1. (5 punti)
Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 4e^{x/2}$. Si determini l'immagine di f, $\mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 2. (5 punti)
Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - e^x}{x + x^2}.$$

Esercizio 3. (5 punti)
3a) Si enunci e si dimostri il teorema dei carabinieri.
3b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + k^2 & \text{se} \quad x \leq 1 \\ \frac{2\ln\left(x^k\right)}{x-1} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Si determinino tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali f è continua nel punto $x = 1$.

Esercizio 4. (7 punti)
a) Si enunci il teorema di Weierstrass.
b) Si giustifichi l'esistenza del massimo e del minimo globale della funzione $f : [1, 9] \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = x - 4\sqrt{x} + 5$$

c) si determinino il massimo e e il minimo globale della funzione di cui al punto b).

Esercizio 5. (10 punti)

Si consideri un'impresa con funzione di costo totale

$$T : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad T(x) = x^2 + 10x + 25.$$

La funzione di costo marginale è

$$M : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad M(x) = T'(x).$$

La funzione di costo medio è

$$N : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad N(x) = \frac{T(x)}{x}.$$

1. Si disegni il grafico delle tre funzioni.
2. Si verifichi che costo marginale e medio sono uguali nel punto di minimo del costo medio.
3. Si dica per quali valori di x, il costo marginale maggiore è del costo medio.

Esercizio 6. (8 punti)
Si studi la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{(3-x)x^2}$$

e se ne disegni il grafico. Si tralasci lo studio della derivata seconda.

SOLUZIONI

Fila A

Esercizio 7. (5 punti)
Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 4e^{x/2}$. Si determini l'immagine di f, $\mathrm{Im}(f)$, e si dimostri che f non è iniettiva.

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 1A.

IMMAGINE DI f
Per determinare l'immagine di f basta determinare l'insieme degli $y \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione

$$f(x) = y \tag{1}$$

ammetta almeno una soluzione.
L'equazione (1) si scrive come segue

$$e^x - 4e^{x/2} = y. \tag{2}$$

Ora poniamo $t = e^{x/2}$. Poiché $t > 0$, determiniamo l'insieme degli $y \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione

$$t^2 - 4t - y = 0 \tag{3}$$

ammette soluzioni positive positive.
Indicato con Δ il discriminante di (3) si ha

$$\frac{\Delta}{4} = 4 + y.$$

Quindi per $y \geq -4$ si ha $\Delta \geq 0$ e in questo caso le due soluzioni di (3) sono date da

$$t_1 = 2 - \sqrt{4+y}, \quad \text{e} \quad t_2 = 2 + \sqrt{4+y}. \tag{4}$$

Poiché $t_2 > 0$ si ha che per $y \geq -4$ l'equazione (3) ammette almeno una soluzione positiva. Per quanto riguarda l'equazione (2) basta risolvere l'equazione

$$e^{x/2} = t_2 = 2 + \sqrt{4+y}$$

che ammette come (unica) soluzione

$$x = 2 \ln t_2 = 2 \ln \left(2 + \sqrt{4+y}\right).$$

Conclusione: $\mathrm{Im}(f) = [-4, +\infty)$.

Esercizio 8. (5 punti)
Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - e^x}{x + x^2}.$$

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 2A.

Il limite è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ in quanto

$$\lim_{x \to 0} \left(\sqrt{1+x} - e^x\right) = \sqrt{1+0} - e^0 = 1 - 1 = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0}\left(x+x^2\right)=0+0^2=0.$$

L'esercizio può essere risolto in due modi: senza applicare il teorema di de l'Hôpital oppure applicandolo.

PRIMO MODO (senza adoperare il teorema di de l'Hôpital).
Trasformiamo la funzione $\frac{\sqrt{1+x}-e^x}{x+x^2}$ in modo da risolvere l'indetrminazione.
Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{1+x}+e^x$ abbiamo

$$\frac{\sqrt{1+x}-e^x}{x+x^2}=\frac{\left(\sqrt{1+x}-e^x\right)\left(\sqrt{1+x}+e^x\right)}{\left(x+x^2\right)\left(\sqrt{1+x}+e^x\right)}=\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-\left(e^x\right)^2}{\left(x+x^2\right)\left(\sqrt{1+x}+e^x\right)}=\frac{1+x-e^{2x}}{\left(x+x^2\right)\left(\sqrt{1+x}+e^x\right)}. \tag{5}$$

Inoltre nel denominatore dell'ultima espressione raccogliamo x in modo che sia abbia

$$\frac{\sqrt{1+x}-e^x}{x+x^2}=\frac{1+x-e^{2x}}{x\left(1+x\right)\left(\sqrt{1+x}+e^x\right)}=\frac{1}{\left(1+x\right)\left(\sqrt{1+x}+e^x\right)}\left(\frac{1+x-e^{2x}}{x}\right)=$$
$$=\frac{1}{\left(1+x\right)\left(\sqrt{1+x}+e^x\right)}\left(1-\frac{e^{2x}-1}{x}\right)=\frac{1}{\left(1+x\right)\left(\sqrt{1+x}+e^x\right)}\left(1-2\frac{e^{2x}-1}{2x}\right).$$

In definitiva

$$\frac{\sqrt{1+x}-e^x}{x+x^2}=\frac{1}{\left(1+x\right)\left(\sqrt{1+x}+e^x\right)}\left(1-2\frac{e^{2x}-1}{2x}\right). \tag{6}$$

Ora ricordiamo il limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{7}$$

Applichiamo i teoremi sulle operazioni con i limiti abbiamo da (6) e (7)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-e^x}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(1+x\right)\left(\sqrt{1+x}+e^x\right)}\left(1-2\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)=$$
$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(1+x\right)\left(\sqrt{1+x}+e^x\right)}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\left(1-2\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot(1-2)=-\frac{1}{2}.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-e^x}{x+x^2}=-\frac{1}{2}.$$

SECONDO MODO (adoperando il teorema de l'Hôpital).
Abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-e^x}{x+x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{D\left(\sqrt{1+x}-e^x\right)}{D\left(x+x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-e^x}{1+2x}=\\ &= \frac{\frac{1}{2}-e^0}{1}=\frac{\frac{1}{2}-1}{1}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Esercizio 9. (5 punti)
3a) Si enunci e si dimostri il teorema dei carabinieri.
3b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + k^2 & \text{se} \quad x \leq 1 \\ \\ \frac{2\ln\left(x^k\right)}{x-1} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Si determinino tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali f è continua nel punto $x = 1$.

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 3A.
Per la parte 3a) si rinvia al libro di testo.
Per quanto riguarda 3b), basta vedere per quali valori di k si ha

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

e dal momento che $f(1) = 1^2 - 1 + k^2 = k^2$, basta vedere per quali valori di k si ha

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = k^2. \tag{8}$$

Calcoliamo $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.
Abbiamo

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f_{|(-\infty,1)}(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(x^2 - x + k^2\right) = k^2$$

Quindi

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = k^2. \tag{9}$$

Calcoliamo $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.
Abbiamo

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f_{|(-\infty,1)}(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2\ln\left(x^k\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2k\ln x}{x-1}. \tag{10}$$

Ora, posto $x - 1 = y$ e sfruttando il limite notevole

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1$$

abbiamo da (10)

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2k\ln x}{x-1} = \lim_{y\to 0} \frac{2k\ln(y+1)}{y} = 2k.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2k. \tag{11}$$

Poiché vale la (9), la (8) è soddisfatta se e solo se

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = k^2$$

ovvero, tenendo presente la (11), la (8) è soddisfatta se e solo se

$$k^2 = 2k$$

e quindi se e solo se $k = 0$ oppure $k = 2$.
Pertanto la funzione è continua se e solo se $k = 0$ oppure $k = 2$.

Esercizio 10. (7 punti)

a) Per la parte 4a) si rinvia al libro di testo.

b) Basta vedere, che la funzione $f(x) = x - 4\sqrt{5} + 5$ è somma delle potenze, definita e continua in $\mathbb{R}_+$. D'accordo con il teorema di Weierstrass raggiunge suo massimo e minimo globale nell'intervallo $[1, 9]$.

c) Visto che la funzione è derivabile in $[1, 9]$ suoi massimo e minimo globali possono essere raggiunti o nei punti critici di f o nei punti estremi dell'intervallo.

Calcolando $f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$ risolviamo l'equazione

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0,$$

trovando il punto critico $x_0 = 4$, che appartiene a $(1, 9)$. Il valore $f(4) = 1$.

I valori della funzione nei punti estremi dell'intervallo sono $f(1) = 2, f(9) = 2$.

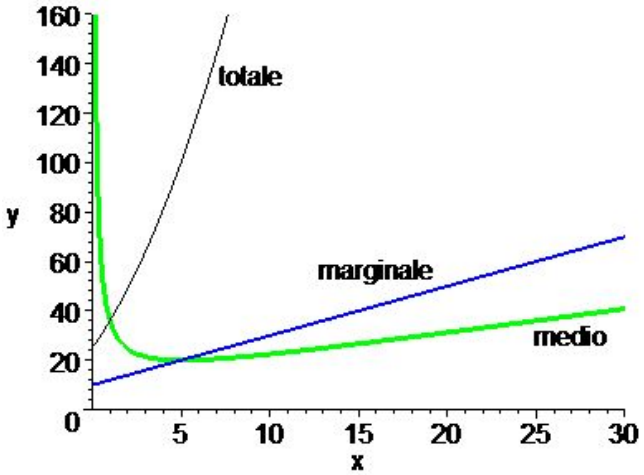
Dunque la funzione raggiunge il minimo globale, uguale a 1, in $x_0 = 4$, e raggiunge il massimo globale, uguale a 2, nei punti $x = 1, x = 9$.

Esercizio 11. (10 punti)

La funzione di costo marginale $M(x) = T'(x) = 2x + 10$, mentre la funzione di costo medio

$$N(x) = \frac{T(x)}{x} = x + 10 + 25/x.$$

I grafici di queste funzioni sono



Per trovare il minimo di costo medio calcoliamo la derivata $N'(x) = 1 - \frac{25}{x^2}$ e cerchiamo punti critici dall'equazione $N'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = 0$. Da due punti critici $x_{0,1} = \pm 5$ l'unico appartenente all'intervallo $(0, +\infty)$ è $x_0 = 5$.

È facile di vedere che $N'(x) < 0$ in $(0, 5)$ e $N'(x) > 0$ in $(5, +\infty)$, quindi $x_0 = 5$ è punto di minimo globale di $N(x)$ in $(0, +\infty)$.

Calcolando i valori $N(5) = 20, M(5) = 20$ verifichiamo loro coincidenza $M(5) = N(5)$.

La differenza $\Delta(x) = M(x) - N(x) = x - 25/x$ si annulla nel punto $x_0 = 5$. Inoltre $\Delta(x)$ è rappresentabile come la SOMMA di due funzioni $f(x) = x$ e $g(x) = -25/x$, entrambe monotone CRESCENTI (per $x > 0$) e quindi anche $\Delta(x)$ è monotona crescente.

Allora per $x > 5$: $\Delta(x) > 0$ e $M(x) > N(x)$.

Esercizio 12. (10 punti) Il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{(3 - x)x^2} = \sqrt[3]{-x^3 + 3x^2},$$

è $\mathbb{R}$, visto che f è composizione di due funzioni (il radicale $\sqrt[3]{y}$ ed il polinomio $3x^2 - x^3$), definite ovunque.

La funzione f è continua in $\mathbb{R}$ e non è pari ne dispari

I limiti della funzione $f(x)$ all'infinito sono

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{-x^3+3x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x\sqrt[3]{-1+3/x} = \mp\infty.$$

Non avendo la funzione f discontinuità, il suo grafico non ha asintoti verticali.

Per calcolare asintoti obliqui $y = k_\pm x + \ell_\pm$ applichiamo le formule per loro coefficienti:

$$k_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{-x^3+3x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{-1+3/x} = -1,$$

e

$$\ell_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{-x^3+3x^2} - k_\pm x = \lim_{x\to\pm\infty} x\sqrt[3]{-1+3/x} + x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{-1+3/x}+1}{1/x}.$$

L'ultimo limite è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, a quale si può applicare teorema di De l'Hôpital:

$$\ell_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(-1+3/x)^{1/3}+1}{1/x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{3}(-1+3/x)^{-2/3}\,(-3/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} (-1+3/x)^{-2/3} = 1.$$

Dunque la retta $y = -x+1$ è l'asintoto obliquo del grafico di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

Calcoliamo la derivata della funzione $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{3}((3-x)x^2)^{-2/3}((3-x)x^2)' = \frac{6x-3x^2}{3((3-x)x^2)^{2/3}} = \frac{(2-x)x}{(((3-x)x^2)^{1/3})^2}.$$

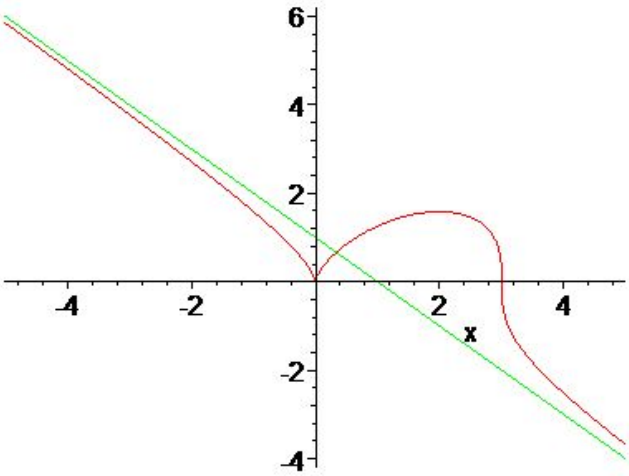
Vediamo che il denominatore è sempre non-negativo, perciò il segno della derivata è determinato dal segno del numeratore - un polinomio quadratico. Le radici del polinomio sono 0 e 2.

Allora la derivata $f'(x)$ prende valori negativi per $x \in (-\infty, 0)$, positivi per $x \in (0, 2)$ e di novo negativi per $x \in (2, +\infty)$. Pertanto la funzione $f(x)$ decresce in $(-\infty, 0)$, cresce in $(0, 2)$ e decresce in $(2, +\infty)$.

Il punto $x_0 = 0$ è punto di minimo locale (*la funzione non è derivabile in* 0) e $x_1 = 2$ è punto di massimo locale.

I valori del minimo e del massimo locale sono $f(0) = 0, f(2) = \sqrt[3]{4}$.

Il grafico della funzione è



Matematica per le Applicazioni Economiche I 12-09-2013, Fila B

Nome _____ **Matricola** _____

Esercizio 1. (5 punti)
Si consideri la funzione $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2$. Si determini l'immagine di f, $\mathrm{Im} f$.

Esercizio 2. (5 punti)
Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{2x + e^x} - 1}{x^2 - x^3}.$$

Esercizio 3. (5 punti)
3a) Si enunci e si dimostri il teorema della permanenza del segno per le funzioni continue.
3b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \geq 2 \\ \frac{e^{k^2 x} - e^{2k^2}}{e^{2k^2}(x-2)} & \text{se} \quad x < 2 \end{cases}$$

Si determinino tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali f è continua nel punto $x = 2$.

Esercizio 4. (7 punti) a) Si fornisca la definizione di punto di massimo globale. b) Si giustifichi l'esistenza del massimo e del minimo globale della funzione $f : [-4, -1] \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8$$

c) si determinino il massimo e e il minimo globale della funzione di cui al punto b).
Esercizio 5. (10 punti)

Si consideri un'impresa con funzione di costo totale

$$T : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad T(x) = 2x^2 + 8x + 18.$$

La funzione di costo marginale e'

$$M : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad M(x) = T'(x).$$

la funzione di costo medio è

$$N : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad N(x) = \frac{T(x)}{x}.$$

1. Si disegni il grafico delle tre funzioni;
2. Si verifichi che costo marginale e medio sono uguali nel punto di minimo del costo medio;
3. Si dica per quali valori di x, il costo marginale è maggiore del costo medio.

Esercizio 6. (8 punti)
Si studi la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$$

e si disegni il suo grafico. Si tralasci lo studio della derivata seconda.

SOLUZIONI

Fila B

Esercizio 1. (5 punti)
Si consideri la funzione $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2$. Si determini l'immagine di f, Imf, e si dimostri che f è iniettiva.

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 1B

IMMAGINE DI f.

Per determinare l'immagine di f basta determinare l'insieme degli $y \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione

$$f(x) = y \tag{1}$$

ammetta almeno una soluzione $x \in [1, +\infty)$.
L'equazione (1) si scrive:

$$x^4 - 2x^2 = y. \tag{2}$$

Ora poniamo $t = x^2$. Poiché $t \geq 1$, determiniamo l'insieme degli $y \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione

$$t^2 - 2t - y = 0 \tag{3}$$

ammette soluzioni maggiori o uguali di 1.
Indicato con Δ il discriminante di (3) si ha

$$\frac{\Delta}{4} = 1 + y.$$

Quindi per $y \geq -1$ si ha $\Delta \geq 0$ e in questo caso le due soluzioni di (3) sono date da

$$t_1 = 1 - \sqrt{1+y}, \quad \text{e} \quad t_2 = 1 + \sqrt{1+y}. \tag{4}$$

Poiché $t_2 \geq 1$ si ha che per $y \geq -1$ l'equazione (3) ammette almeno una soluzione maggiori o uguale di 1. Per quanto riguarda l'equazione (2) basta risolvere l'equazione

$$x^2 = t_2 = 1 + \sqrt{1+y}$$

che ammette soluzione una (unica) soluzione maggiore o uguale quella fornita da

$$x = \sqrt{t_2} = \sqrt{1 + \sqrt{1+y}}.$$

Conclusione: $\text{Im}(f) = [-1, +\infty)$.

Esercizio 2. (5 punti)
Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{2x + e^x} - 1}{x^2 - x^3}.$$

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 2B

Il limite è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ in quanto

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\sqrt{2x + e^x} - 1 \right) = \sqrt{0 + e^0} - 1 = 1 - 1 = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^2-x^3\right)=0^2-0^3=0.$$

L'esercizio può essere risolto in due modi: senza applicare il teorema di de l'Hôpital oppure applicandolo.

PRIMO MODO (senza adoperare il teorema di de l'Hôpital).
Trasformiamo la funzione $\frac{\sqrt{2x+e^x}-1}{x^2-x^3}$ in modo da risolvere l'indetrminazione.
Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{2x+e^x}+1$ abbiamo

$$\frac{\sqrt{2x+e^x}-1}{x^2-x^3}=\frac{\left(\sqrt{2x+e^x}-1\right)\left(\sqrt{2x+e^x}+1\right)}{\left(x^2-x^3\right)\left(\sqrt{2x+e^x}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{2x+e^x}\right)^2-1}{\left(x^2-x^3\right)\left(\sqrt{2x+e^x}+1\right)}=\frac{2x+e^x-1}{\left(x^2-x^3\right)\left(\sqrt{2x+e^x}+1\right)}.$$

Inoltre nel denominatore dell'ultima espressione raccogliamo x^2 in modo che sia abbia

$$\frac{\sqrt{2x+e^x}-1}{x^2-x^3}=\frac{2x+e^x-1}{x^2\left(1-x\right)\left(\sqrt{2x+e^x}+1\right)}=\frac{1}{\left(1-x\right)\left(\sqrt{2x+e^x}+1\right)}\left(\frac{2x+e^x-1}{x^2}\right)=$$
$$=\frac{1}{\left(1-x\right)\left(\sqrt{2x+e^x}+1\right)}\left(\frac{e^x-1}{x^2}+\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{\left(1-x\right)\left(\sqrt{2x+e^x}+1\right)}\left(\frac{e^x-1}{x}+2\right)\frac{1}{x}.$$

In definitiva

$$\frac{\sqrt{2x+e^x}-1}{x^2-x^3}=\frac{1}{\left(1-x\right)\left(\sqrt{2x+e^x}+1\right)}\left(\frac{e^x-1}{x}+2\right)\frac{1}{x}. \tag{5}$$

Ora ricordiamo il limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{6}$$

Applichiamo i teoremi sulle operazioni con i limiti abbiamo da (5) e (6)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2x+e^x}-1}{x^2-x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\left(1-x\right)\left(\sqrt{2x+e^x}+1\right)}\left(\frac{e^x-1}{x}+2\right)\frac{1}{x}=$$
$$\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\left(1-x\right)\left(\sqrt{2x+e^x}+1\right)}\left(\frac{e^x-1}{x}+2\right)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{2}\cdot(+\infty)=+\infty.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2x+e^x}-1}{x^2-x^3}=+\infty.$$

SECONDO MODO (adoperando il teorema de l'Hôpital).

Abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2x+e^x}-1}{x^2-x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{D\left(\sqrt{2x+e^x}-1\right)}{D\left(x^2-x^3\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2+e^x}{2\sqrt{2x+e^x}}}{x\left(2-3x\right)}=$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2+e^x}{2\sqrt{2x+e^x}}}{2-3x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{3}{4}\cdot(+\infty)=+\infty$$

Esercizio 3. (5 punti)
3a) Si enunci e si dimostri il teorema della permanenza del segno per le funzioni continue.
3b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \geq 2 \\ \frac{e^{k^2 x} - e^{2k^2}}{e^{2k^2}(x-2)} & \text{se} \quad x < 2 \end{cases}$$

Si determinino tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali f è continua nel punto $x = 2$.

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 3B

Per la parte 3a) si rinvia al libro di testo.

Per quanto riguarda 3b), basta vedere per quali valori di k si ha

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$$

e dal momento che $f(2) = 2^2 = 4$ basta vedere per quali valori di k si ha

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4. \tag{7}$$

Calcoliamo $\lim_{x \to 2^+} f(x)$.

Abbiamo

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f_{|(2,+\infty)}(x) = \lim_{x \to 2^+} x^2 = 4$$

Quindi

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4 = f(2). \tag{8}$$

Calcoliamo $\lim_{x \to 2^-} f(x)$.

Osserviamo innanzitutto che se $k = 0$ allora $f_{|(-\infty,2)}(x) = 0$. Quindi in questo caso $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$ e perciò, per (8), f non è continua in $x = 2$.

Ora consideriamo il caso $k \neq 0$.

Abbiamo

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f_{|(-\infty,2)}(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{e^{k^2 x} - e^{2k^2}}{e^{2k^2}(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{e^{2k^2}\left(e^{k^2(x-2)} - 1\right)}{e^{2k^2}(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{e^{k^2(x-2)} - 1}{x-2}. \tag{9}$$

Posto $(x-2)k^2 = y$ e sfruttando il limite notevole

$$\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1,$$

abbiamo da (9)

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{e^{k^2(x-2)} - 1}{x-2} = \lim_{y \to 0} k^2 \frac{e^y - 1}{y} = k^2.$$

Quindi

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = k^2. \tag{10}$$

Poiché vale la (8), la (7) è soddisfatta se e solo se

$$k^2 = 4$$

ovvero, tenendo presente la (10), la (7) è soddisfatta se e solo se $k = -2$ oppure $k = 2$.

Pertanto la funzione è continua se e solo se $k = -2$ oppure $k = 2$.

Esercizio 4. (7 punti)

a) Per la parte 4a) si rinvia al libro di testo.

b) Basta vedere, che la funzione $f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8$ è somma delle potenze, definita e continua in $\mathbb{R} \setminus 0$. D'accordo con il teorema di Weierstrass raggiunge suo massimo e minimo globale nell'intervallo $[-4, -1]$.

c) Visto che la funzione $f(x)$ è derivabile in $[-4, -1]$, suoi massimo e minimo possono essere raggiunti o nei punti critici di f o nei punti estremi dell'intervallo.

Calcolando $f'(x) = -x - \frac{8}{x^2}$ risolviamo l'equazione

$$f'(x) = -x - \frac{8}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8,$$

trovando il punto critico $x_0 = -2$ che appartiene a $(-4, -1)$. Il valore $f(-2) = 2$.

I valori della funzione nei punti estremi dell'intervallo sono $f(-4) = -2, f(-1) = -\frac{1}{2}$.

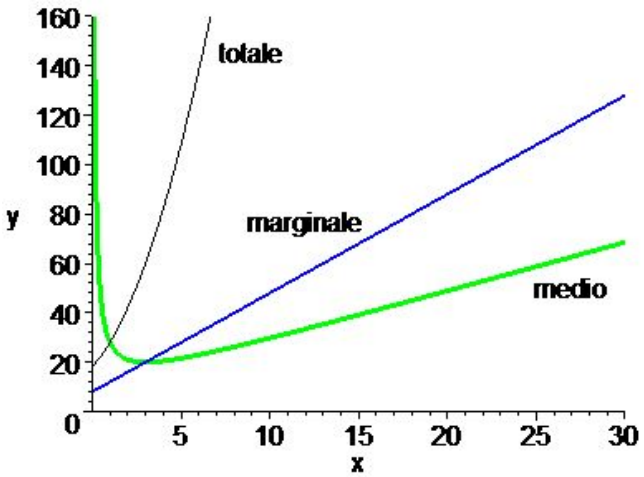
Dunque la funzione raggiunge il suo minimo globale, uguale a -2, nel punto $x_1 = -4$, ed il suo massimo globale, uguale a 2 nel punto $x_0 = -2$.

Esercizio 5. (10 punti)

La funzione di costo marginale $M(x) = T'(x) = 4x + 8$, mentre la funzione di costo medio

$$N(x) = \frac{T(x)}{x} = 2x + 8 + 18/x.$$

I grafici di queste funzioni sono



Per trovare il minimo di costo medio calcoliamo la derivata $N'(x) = 2 - \frac{18}{x^2}$ e cerchiamo punti critici dall'equazione $N'(x) = 2 - \frac{18}{x^2} = 0$.

Da due punti critici $x_{0,1} = \pm 3$ di $N(x)$ c'è un solo $x_0 = 3$, che appartiene all'intervallo $(0, +\infty)$.

È facile di vedere che $N'(x) < 0$ in $(0, 3)$ e $N'(x) > 0$ in $(3, +\infty)$, quindi $x_0 = 3$ è punto di minimo globale di $N(x)$ in $(0, +\infty)$.

Calcolando i valori $N(3) = 20, M(3) = 20$, verifichiamo loro coincidenza $M(3) = N(3)$.

La differenza $\Delta(x) = M(x) - N(x) = 2x - 18/x$ si annulla nel punto $x_0 = 3$. Inoltre $\Delta(x)$ è rappresentabile come la SOMMA di due funzioni $f(x) = 2x, g(x) = -18/x$, entrambe monotone CRESCENTI (per $x > 0$), e quindi anche $\Delta(x)$ è monotona crescente. Allora, per $x > 3$, $\Delta(x) > 0$ e $M(x) > N(x)$.

Esercizio 6. (8 punti)

Il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$$

è $\mathbb{R}$, visto che f è composizione di due funzioni (il radicale $\sqrt[3]{y}$ ed il polinomio $3x(x+3)^2$), definite ovunque.

La funzione è continua in $\mathbb{R}$ e non è pari ne dispari

I limiti della funzione all'infinito sono

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x(x+3)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x\sqrt[3]{(1+3/x)^2} = \pm\infty.$$

Non avendo la funzione f discontinuità, il suo grafico non ha asintoti verticali.

Per calcolare asintoti obliqui $y = k_\pm x + \ell_\pm$ applichiamo le formule per loro coefficienti:

$$k_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x(x+3)^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{(1+3/x)^2} = 1,$$

e

$$\ell_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x(x+3)^2} - k_\pm x = \lim_{x\to\pm\infty} x\sqrt[3]{(1+3/x)^2} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(1+3/x)^{2/3}-1}{1/x}.$$

L'ultimo limite è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, a quale si può applicare teorema di De l'Hôpital:

$$\ell_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(1+3/x)^{2/3}-1}{1/x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{3}(1+3/x)^{-1/3}\,(-3/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} 2(1+3/x)^{-1/3} = 2.$$

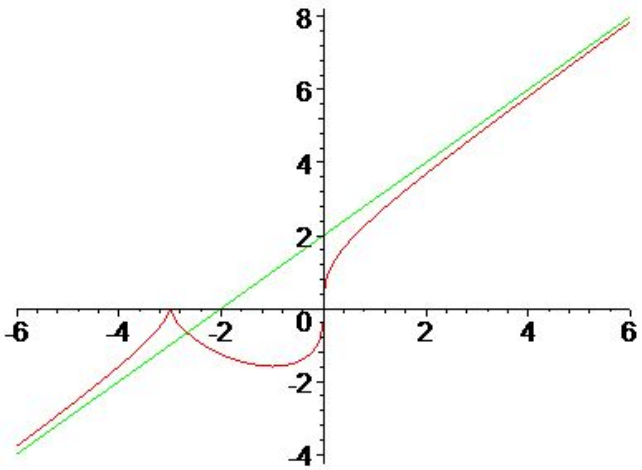
Dunque la retta $y = x+2$ è asintoto obliquo del grafico di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

Calcoliamo la derivata della funzione $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x(x+3)^2)^{-2/3}(x(x+3)^2)' = \frac{3x^2+12x+9}{3(x(x+3)^2)^{2/3}} = \frac{x^2+4x+3}{x^{2/3}(x+3)^{4/3}}.$$

Vediamo che il denominatore è non-negativo per tutti x, quindi il segno della derivata è determinato dal segno del numeratore - un polinomio quadratico. Le radici del polinomio sono -3 e -1.

Allora la derivata $f'(x)$ prende valori positivi per $x \in (-\infty, -3)$, negativi per $x \in (-3, -1)$, e di novo positivi per $x \in (-1, \infty)$. Pertanto $f(x)$ cresce in $(-\infty, -3)$ decresce in $(-3, -1)$ e cresce in $((-1, +\infty)$.

Il punto $x_0 = -3$ è punto di massimo locale (*la funzione non è derivabile in* -3) e $x_1 = -1$ è punto di minimo locale.

I valori del massimo e del minimo locale sono $f(-3) = 0, f(-1) = -\sqrt[3]{4}$. Il grafico della funzione è