

Matematica per le Applicazioni Economiche I

Testo d'esame A, 15 gennaio 2014

1. **(7 punti)** (a) Sia data la funzione f definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{x-1}{x+3} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Trovare il dominio di f , l'estremo superiore di f , l'estremo inferiore di f e dire se questi ultimi sono il massimo e il minimo di f .

(b) Sia data la funzione $g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue (si noti che g ha la stessa espressione di f , ma è definita nell'intervallo $[0, 2]$):

$$g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \in [0, 1] \\ \frac{x-1}{x+3} & \text{se } x \in (1, 2] \end{cases}$$

Trovare l'estremo superiore di g , l'estremo inferiore di g e dire se questi ultimi sono il massimo e il minimo di g .

2. **(5 punti)** Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[5]{x^2 + x + 1} + x - 3$$

3. **(7 punti)** (a) Si diano le definizioni di funzione continua in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e di funzione continua in tutto $\mathbb{R}$.

(b) Sia f definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{ax} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\sin(bx)}{\ln(1+x)} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Si determinino i valori dei parametri reali a e b in modo che f sia continua in tutto $\mathbb{R}$.

4. **(8 punti)** Si studi la funzione

$$f(x) = e^{-x}(2x + x^2)$$

e si disegni il suo grafico.

5. **(7 punti)** In questo esercizio f è una funzione definita in $\mathbb{R}$.

(a) Si dia la definizione di funzione strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

(b) Si provi che se f è derivabile in $\mathbb{R}$ e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

(c) E' vero che se f è derivabile e strettamente crescente in $\mathbb{R}$, allora $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$? Se no, si dia un esempio di funzione f che è derivabile e strettamente crescente in $\mathbb{R}$, ma per la quale non è vero che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

6. **(6 punti)** Si consideri un'impresa che produce un solo bene; l'impresa deve decidere la quantità, $x \geq 0$, di bene da produrre e mettere in vendita. Il prezzo di vendita unitario del bene è 9, e dunque produrre la quantità x genera un ricavo pari a $9x$. Per produrre la quantità x , l'impresa sostiene un costo pari a $15x - \frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$, e quindi il profitto dell'impresa dal produrre la quantità x è

$$\pi(x) = 9x - \left(15x - \frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)$$

L'obiettivo dell'impresa è individuare un punto di massimo globale per la funzione π , che è definita nell'intervallo $[0, +\infty)$.

(a) Si enunci il teorema di Weierstrass e si dica se è possibile applicare tale teorema per stabilire l'esistenza di un punto di massimo globale per la funzione π .

(b) Indipendentemente dalla risposta al punto (a), si determini un punto di massimo globale per la funzione π .

Matematica per le Applicazioni Economiche I

Testo d'esame B, 15 gennaio 2014

1. **(7 punti)** Sia data la funzione f definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{1-2x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Trovare il dominio di f , l'estremo superiore di f , l'estremo inferiore di f e dire se questi ultimi sono il massimo e il minimo di f .

(b) Sia data la funzione $g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue (si noti che g ha la stessa espressione di f , ma è definita nell'intervallo $[0, 2]$):

$$g(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \in [0, 1] \\ \frac{1}{1-2x} & \text{se } x \in (1, 2] \end{cases}$$

Trovare l'estremo superiore di g , l'estremo inferiore di g e dire se questi ultimi sono il massimo e il minimo di g .

2. **(5 punti)** Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^6 - 3x + 2} + 5 - x$$

3. **(7 punti)** (a) Si diano le definizioni di funzione continua in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e di funzione continua in tutto $\mathbb{R}$.

(b) Sia f definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}-1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\ln(1+bx)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Si determinino i valori dei parametri reali $a > 0$ e $b > 0$ in modo che f sia continua in tutto $\mathbb{R}$.

4. **(8 punti)** Si studi la funzione

$$f(x) = e^x(2x - x^2)$$

e si disegni il suo grafico.

5. **(7 punti)** In questo esercizio f è una funzione definita in $\mathbb{R}$.

(a) Si dia la definizione di funzione strettamente decrescente in $\mathbb{R}$.

(b) Si provi che se f è derivabile in $\mathbb{R}$ e $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora f è strettamente decrescente in $\mathbb{R}$.

(c) E' vero che se f è derivabile e strettamente decrescente in $\mathbb{R}$, allora $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$? Se no, si dia un esempio di funzione f che è derivabile e strettamente decrescente in $\mathbb{R}$, ma per la quale non è vero che $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

6. **(6 punti)** Si consideri un'impresa che produce un solo bene; l'impresa deve decidere la quantità, $x \geq 0$, di bene da produrre e mettere in vendita. Il prezzo di vendita unitario del bene è 10, e dunque produrre la quantità x genera un ricavo pari a $10x$. Per produrre la quantità x , l'impresa sostiene un costo pari a $24x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$, e quindi il profitto dell'impresa dal produrre la quantità x è

$$\pi(x) = 10x - \left(24x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)$$

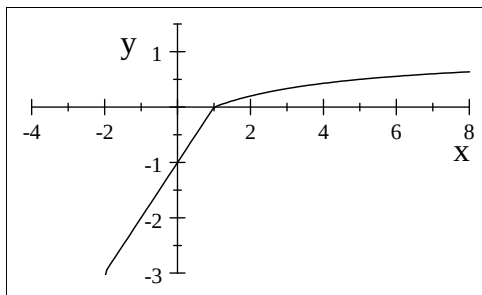
L'obiettivo dell'impresa è individuare un punto di massimo globale per la funzione π , che è definita nell'intervallo $[0, +\infty)$.

(a) Si enunci il teorema di Weierstrass e si dica se è possibile applicare tale teorema per stabilire l'esistenza di un punto di massimo globale per la funzione π .

(b) Indipendentemente dalla risposta al punto (a), si determini un punto di massimo globale per la funzione π .

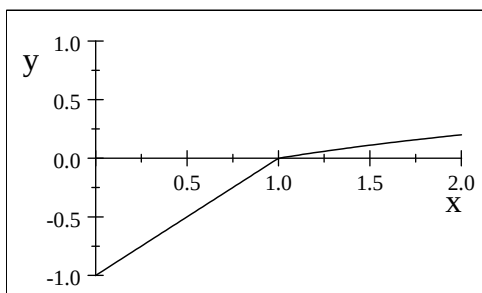
Soluzioni per il testo A

1. (a) Il dominio di f è $\mathbb{R}$. Il grafico di f è



e $\sup f = 1$, $\inf f = -\infty$, $\max f$ non esiste, $\min f$ non esiste.

- (b) Il grafico di g è



e $\sup g = \frac{1}{5}$, $\inf g = -1$, $\max g = \frac{1}{5}$, $\min g = -1$.

2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[5]{x^2 + x + 1} + x - 3 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{\sqrt[5]{x^2 + x + 1}}{x} + 1 - \frac{3}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\sqrt[5]{\frac{x^2 + x + 1}{x^5}} + 1 - \frac{3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\infty)(0 + 1 - 0) = -\infty \end{aligned}$$

3. (a) Si veda il libro di testo.

(b) Per ogni a e b in $\mathbb{R}$, f è continua in ogni x diverso da 0. f è continua anche in $x = 0$ se e solo se $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{a} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{a}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(bx)}{\ln(1+x)} = \frac{b}{1} = b$, $f(0) = 1$, si deduce che f è continua in $x = 0$ (e dunque in $\mathbb{R}$) se e solo se $a = b = 1$.

4. Il dominio di f è $\mathbb{R}$. $f(x) = 0$ in $x = -2$ e in $x = 0$; $f(x) > 0$ in $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ in $(-2, 0)$. Poiché f è continua (f è anche derivabile) in $\mathbb{R}$, non esistono asintoti verticali. Poiché $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$, non esiste asintoto orizzontale né asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$. Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + x^2}{e^x} = 0$ (per confronto tra ordini di infinito), la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$.

La derivata prima di f è

$$f'(x) = e^{-x}(-2x - x^2) + e^{-x}(2 + 2x) = e^{-x}(2 - x^2)$$

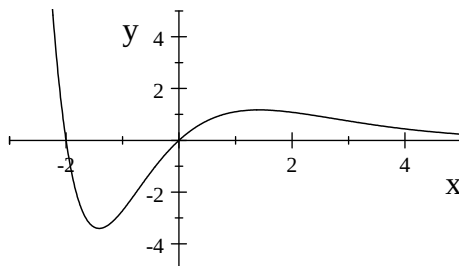
quindi $f'(x) < 0$ in $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ e $f'(x) > 0$ in $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Pertanto f è strettamente decrescente in $(-\infty, -\sqrt{2})$, strettamente crescente in $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, strettamente decrescente in $(\sqrt{2}, +\infty)$. Il punto $x = -\sqrt{2}$ è punto di minimo globale per f , con $f(-\sqrt{2}) < 0$; il punto $x = \sqrt{2}$ è punto di massimo locale per f , con $f(\sqrt{2}) > 0$.

La derivata seconda di f e'

$$f''(x) = e^{-x}(-2 + x^2) + e^{-x}(-2x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 2)$$

quindi $f''(x) > 0$ in $(-\infty, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, +\infty)$ e $f''(x) < 0$ in $(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$. Pertanto f e' convessa in $(-\infty, 1 - \sqrt{3})$, concava in $(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$, convessa in $(1 + \sqrt{3}, +\infty)$. I punti $x = 1 - \sqrt{3}$ e $x = 1 + \sqrt{3}$ sono punti di flesso per f .

Pertanto il grafico di f e'



5. (a-b) Si veda il libro di testo.

(c) La funzione $f(x) = x^3$ e' strettamente crescente in $\mathbb{R}$, ma non e' vero che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2$ e' uguale a zero nel punto $x = 0$.

6. (a) Si veda il libro di testo per il teorema di Weierstrass. Sebbene π sia continua, non e' possibile applicare il teorema di Weierstrass per dimostrare l'esistenza di un punto di massimo globale per π perche' π e' definita su un insieme illimitato.

(b) $\pi(x) = -6x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$, quindi $\pi'(x) = -6 + 7x - x^2$, che e' negativa per $x \in [0, 1) \cup (6, +\infty)$ e positiva per $x \in (1, 6)$. Pertanto π e' strettamente decrescente in $[0, 1)$, strettamente crescente in $(1, 6)$, strettamente decrescente in $(6, +\infty)$. Il punto $x = 6$ e' punto di massimo globale per π perche' $\pi(6) = 18 > \pi(0) = 0$.

Soluzioni per il testo B

1. (a) Il dominio di f e' $\mathbb{R}$. Il grafico di f si trova alla fine di questo documento, e $\sup f = 0$, $\inf f = -\infty$, $\max f$ non esiste, $\min f$ non esiste.

(b) Il grafico di g si trova alla fine di questo documento, e $\sup g = -\frac{1}{3}$, $\inf g = -2$, $\max g = -\frac{1}{3}$, $\min g = -2$.

2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^6 - 3x + 2} + 5 - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\sqrt[4]{x^6 - 3x + 2}}{x} + \frac{5}{x} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[4]{\frac{x^6 - 3x + 2}{x^4}} + \frac{5}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (+\infty)(+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

3. (a) Si veda il libro di testo.

(b) Per ogni a e b in $\mathbb{R}$, f e' continua in ogni x diverso da 0. f e' continua anche in $x = 0$ se e solo se $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. Poiche' $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \frac{\ln(1+bx)}{x} = b$, $f(0) = 5$, si deduce che f e' continua in $x = 0$ (e dunque in $\mathbb{R}$) se e solo se $a = b = 5$.

4. Il dominio di f e' $\mathbb{R}$. $f(x) = 0$ in $x = 0$ e in $x = 2$; $f(x) < 0$ in $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $f(x) > 0$ in $(0, 2)$.

Poiche' f e' continua (f e' anche derivabile) in $\mathbb{R}$, non esistono asintoti verticali. Poiche' $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - x^2}{e^{-x}} =^H \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - 2x}{-e^{-x}} =^H \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{e^{-x}} = 0$, la retta $y = 0$ e' asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$. Poiche' $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$, non esiste asintoto orizzontale ne' asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$.

La derivata prima di f e'

$$f'(x) = e^x(2x - x^2) + e^x(2 - 2x) = e^x(2 - x^2)$$

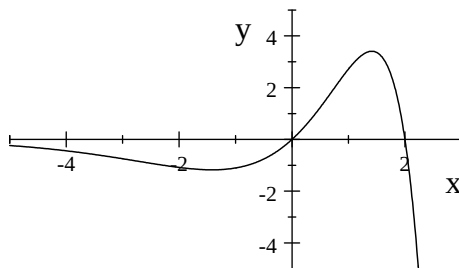
quindi $f'(x) < 0$ in $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ e $f'(x) > 0$ in $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Pertanto f e' strettamente decrescente in $(-\infty, -\sqrt{2})$, strettamente crescente in $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, strettamente decrescente in $(\sqrt{2}, +\infty)$. Il punto $x = -\sqrt{2}$ e' punto di minimo locale per f , con $f(-\sqrt{2}) < 0$; il punto $x = \sqrt{2}$ e' punto di massimo globale per f , con $f(\sqrt{2}) > 0$.

La derivata seconda di f e'

$$f''(x) = e^x(2 - x^2) + e^x(-2x) = e^x(-x^2 - 2x + 2)$$

quindi $f''(x) < 0$ in $(-\infty, -1 - \sqrt{3}) \cup (-1 + \sqrt{3}, +\infty)$ e $f''(x) > 0$ in $(-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$. Pertanto f e' concava in $(-\infty, -1 - \sqrt{3})$, convessa in $(-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$, concava in $(-1 + \sqrt{3}, +\infty)$. I punti $x = -1 - \sqrt{3}$ e $x = -1 + \sqrt{3}$ sono punti di flesso per f .

Pertanto il grafico di f e'

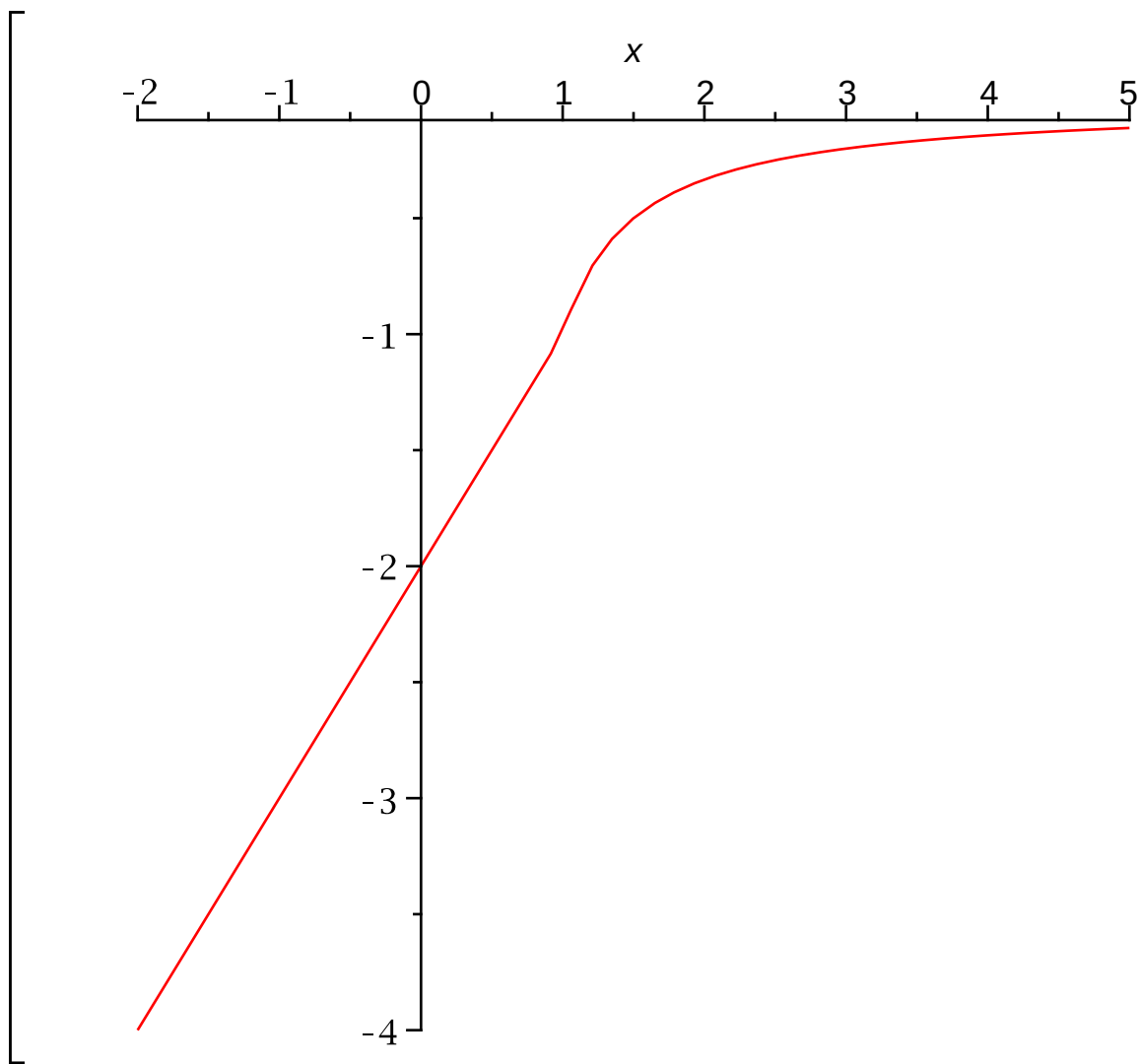


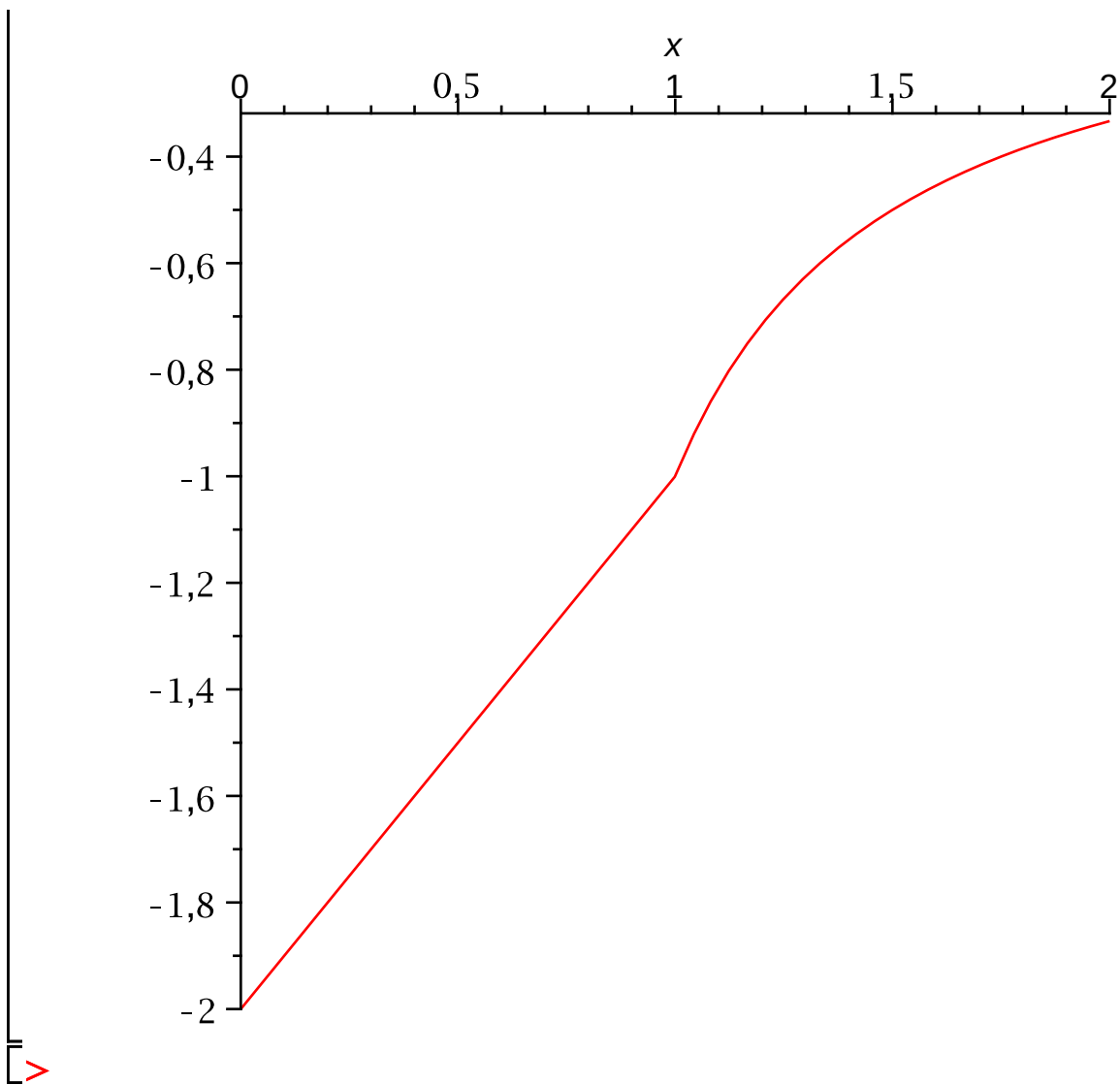
5. (a-b) Si veda il libro di testo.

(c) La funzione $f(x) = -x^3$ e' strettamente decrescente in $\mathbb{R}$, ma non e' vero che $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -3x^2$ e' uguale a zero nel punto $x = 0$.

6. (a) Si veda il libro di testo per il teorema di Weierstrass. Sebbene π sia continua, non e' possibile applicare il teorema di Weierstrass per dimostrare l'esistenza di un punto di massimo globale per π perche' π e' definita su un insieme illimitato.

(b) $\pi(x) = -14x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$, quindi $\pi'(x) = -14 + 9x - x^2$, che e' negativa per $x \in [0, 2) \cup (7, +\infty)$ e positiva per $x \in (2, 7)$. Pertanto π e' strettamente decrescente in $[0, 2)$, strettamente crescente in $(2, 7)$, strettamente decrescente in $(7, +\infty)$. Il punto $x = 7$ e' punto di massimo globale per π perche' $\pi(7) = \frac{49}{6} > \pi(0) = 0$.





COMPITO A DEL 5 FEBBRAIO 2014, VERSIONE DEL 5 FEBBRAIO 2014

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte. Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):**

$1 - \square, 2 - \square, 3 - \square, 4 - \square, 5 - \square, 6 - \square$
--

Esercizio 1. (8 punti)

- a) (3p) Si enunci il teorema di Taylor, specificando con precisione la proprietà del resto.
- b) (2p) Per la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ si calcolino la derivata prima e seconda in zero e si scriva lo sviluppo di Taylor nel punto $x_0 = 0$ fino al grado due.
- c) (3p) Si calcoli il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2},$$

possibilmente usando lo sviluppo di Taylor con resto trovato in precedenza.

Esercizio 2. (6 punti)

- a) (1p) Si scriva la definizione di derivata prima di una funzione f in un punto x_0 .
- b) (4p) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 - x & \text{se } x \in (0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{4} & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

si calcolino la derivata destra e la derivata sinistra in $x_0 = 0$. La funzione è derivabile in $x_0 = 0$? Si calcolino la derivata destra e la derivata sinistra in $x_0 = \frac{1}{2}$. La funzione è derivabile in $x_0 = \frac{1}{2}$? La funzione è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$?

- c) (1p) Si disegni il grafico della funzione.

Esercizio 3. (6 punti) Una azienda necessita per quest'anno di 300 tonnellate di materia prima per il suo piano di produzione ed effettua degli ordini, ciascuno della stessa quantità x . Poiché ci sono dei costi di magazzino si è valutato che il costo per questa strategia di acquisto è espresso in euro dalla funzione

$$C(x) = \frac{60.000}{x} + 6x.$$

- a) (2p) Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ a cui x deve appartenere.
- b) (4p) Determinare la quantità x che è ottimale ordinare se si vuole minimizzare il costo descritto.

Esercizio 4. (9 punti) Si consideri la funzione

$$f := x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x - 5$$

- a) (4p) Si dimostri, utilizzando teoremi noti, che l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione nell'intervallo $[0, 5]$.
- b) (3p) Si dimostri che questa equazione ha esattamente una soluzione nell'intervallo dato.
- c) (2p) Una volta determinato un intervallo in cui c'è una soluzione, si dica quante iterazioni dell'algoritmo di bisezione sono necessarie per trovare una soluzione approssimata con un errore inferiore a 0.1.

Esercizio 5. (11 punti) Data la funzione

$$f(x) = x e^{\frac{1}{x^2}} = x \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

- a) (3p) Determinarne dominio, zeri, segno; dire se la funzione è pari/dispari e determinarne eventuali asintoti.
- b) (2p) Dire se è possibile definire f anche in $x = 0$ in modo che risulti continua in quel punto.
- c) (3p) Determinare gli intervalli di monotonia di f ed eventuali punti di estremo relativo e assoluto.
- d) (2p) Determinarne intervalli di concavità.
- e) (1p) Disegnarne il grafico.

COMPITO B DEL 5 FEBBRAIO 2014

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte. Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):**

$1 - \square, 2 - \square, 3 - \square, 4 - \square, 5 - \square, 6 - \square$

Esercizio 1. (8 punti)

- a) (3p) Si enunci il teorema di Taylor, specificando con precisione la proprietà del resto.
- b) (2p) Per la funzione $f(x) = \log(x^2 + e)$ si calcolino la derivata prima e seconda in zero e si scriva lo sviluppo di Taylor nel punto $x_0 = 0$ fino al grado due.
- c) (3p) Si calcoli il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^2 + e) - 1}{x^2}.$$

possibilmente usando lo sviluppo di Taylor con resto trovato in precedenza.

Esercizio 2. (6 punti)

- a) (1p) Si scriva la definizione di derivata prima di una funzione f in un punto x_0 .
- b) (4p) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2 - x^2 & \text{se } x \in (0, 1) \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

si calcolino la derivata destra e la derivata sinistra in $x_0 = 0$. La funzione è derivabile in $x_0 = 0$? Si calcolino la derivata destra e la derivata sinistra in $x_0 = 1$. La funzione è derivabile in $x_0 = 1$? La funzione è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$?

- c) (1p) Si disegni il grafico della funzione.

Esercizio 3. (6 punti)

Una azienda necessita per quest'anno di 400 tonnellate di materia prima per il suo piano di produzione ed effettua degli ordini, ognuno della stessa quantità x . Poiché ci sono dei costi di magazzino si è stabilito che il costo per questa strategia di acquisto è espresso in euro dalla funzione

$$C(x) = \frac{80.000}{x} + 2x.$$

- a) (2p) Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ a cui x deve appartenere.
- b) (4p) Determinare la quantità x che è ottimale ordinare se si vuole minimizzare il costo descritto.

Esercizio 4. (9 punti) Si consideri la funzione

$$f := x \mapsto -4x^3 + 18x^2 - 24x + 7$$

- a) (4p) Si dimostri, utilizzando teoremi noti, che l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione nell'intervallo $[0, 4]$.
- b) (3p) Dimostrare che questa equazione ha esattamente una soluzione nell'intervallo dato.
- c) (2p) Una volta determinato un intervallo in cui c'è una soluzione, si dica quante iterazioni dell'algoritmo di bisezione sono necessarie per trovare una soluzione approssimata con un errore inferiore a 0.1.

Esercizio 5. (11 punti) Data la funzione

$$f(x) = x e^{\frac{-1}{x^2}} = x \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

- a) (3p) determinarne dominio, zeri, segno; dire se la funzione è pari/dispari e determinarne eventuali asintoti.
- b) (2p) Dire se è possibile definire f anche in $x = 0$ in modo che risulti continua in quel punto.
- c) (3p) Determinare gli intervalli di monotonia di f ed eventuali punti di estremo relativo e assoluto.
- d) (2p) Determinarne intervalli di concavità.
- e) (1p) Disegnarne il grafico.

1 Soluzioni Compito A

Soluzione esercizio 1.

a) Vedere libro di testo.

b) Lo sviluppo di Taylor fino al grado due di f nell'origine è

$$f(0) + D[f](0)x + \frac{D^2[f](0)}{2!}x^2 + \frac{D^3[f](0)}{3!}x^3$$

ovvero

$$f(0) + D[f](0)x + \frac{D^2[f](0)}{2!}x^2 + R_2(x)$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0.$$

Per la nostra funzione abbiamo che

$$f(0) = 3, D[f](0) = 0, D^2[f](0) = \frac{1}{3}$$

e quindi

$$f(x) = 3 + \frac{1}{6}x^2 + R_2(x)$$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^2 + R_2(x)}{x^2} = \\ &= \frac{1}{6} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 2.

a) Vedere libro di testo.

b) Per $x \neq 0, \frac{1}{2}$ la funzione è derivabile perché si tratta di una costante o di un polinomio di secondo grado. Si osservi che f è continua in $x_0 = 0$ e in $x_1 = \frac{1}{2}$, perché

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\frac{1}{4}.$$

f è quindi continua in tutto $\mathbb{R}$.

Derivabilità in $x = 0$: si noti che $f(0) = 0$, quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} 0 = 0 = D_-[f](0).$$

Invece

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h - 1 = -1 = D_+[f](0).$$

Poiché derivate destra e sinistra non coincidono, f non risulta derivabile in 0.

Derivabilità in $x = \frac{1}{2}$: si noti che $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\frac{1}{2}+h) - f(\frac{1}{2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(\frac{1}{2}+h)^2 - (\frac{1}{2}+h) + \frac{1}{4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h = 0 = D_-[f]\left(\frac{1}{2}\right).$$

D'altra parte

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{1}{2}+h) - f(\frac{1}{2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{h} = 0 = D_+[f]\left(\frac{1}{2}\right).$$

Derivate destra e sinistra di f in $\frac{1}{2}$ coincidono, perciò f è derivabile in $\frac{1}{2}$.

c) Il grafico della funzione è composto da due tratti di retta orizzontale e da un tratto di parabola ed è in Figura 1 e come vediamo la curva presenta in $x_0 = 0$ un punto angoloso (f non è derivabile), mentre in $x_1 = \frac{1}{2}$ è liscia (f è derivabile).

Soluzione esercizio 3.

a) x è la quantità di materia prima che viene ordinata e quindi $x > 0$. Nell'anno il totale fabbisogno di materia prima è di 150t. e quindi, poiché ci sono dei costi di immagazzinamento, ciascuna ordinazione sarà al massimo di 150t. Dunque

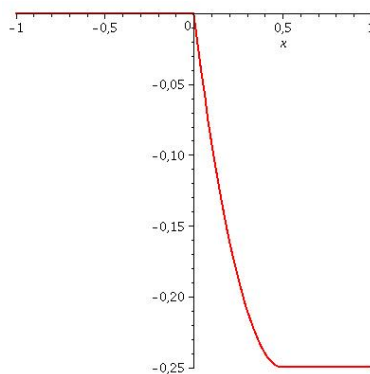


Figura 1: Grafico di $f(x)$

$x \in (0, 150]$.

b) Si determina l'andamento di C per stabilire la collocazione dei punti di minimo assoluto entro $(0, 150]$:

$$D[C](x) = 6 \frac{x^2 - 10000}{x^2}.$$

che si annulla per $x = \pm 100$ ma solo il valore positivo appartiene al dominio, perciò risulta $D[C](x) \geq 0$ in $(0, 150]$ se e solo se $x \geq 100$. Dunque il costo decresce in $(0, 100]$ e cresce in $[100, 150]$, perciò $C(x)$ raggiunge in $[0, 150]$ il suo valore minimo assoluto per $\hat{x} = 100$.

Soluzione esercizio 4.

a) La funzione $f := x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x - 5$ è continua in tutto $\mathbb{R}$ in quanto polinomio. Possiamo quindi applicare il Teorema degli zeri (o il Teorema dei valori intermedi) per dimostrare che l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione nell'intervallo $[0, 5]$.

I due punti $y_0 = f(0) = -5$ e $y_1 = f(5) = 15$ appartengono ad $\text{Im}(f)$ e quindi per i teoremi citati anche il punto zero, in quanto $y_0 < 0 < y_1$. L'equazione ha quindi almeno una soluzione nell'intervallo $(0, 5)$.

b) Calcoliamo la derivata di f

$$D[f] = 3x^2 - 12x + 9$$

che si annulla nei due punti $x_0 = 1$, $x_1 = 3$. La funzione non è quindi monotona ed inoltre abbiamo che $f(x_0) = -1$, $f(x_1) = -5$ sono rispettivamente un massimo ed un minimo locale che sono entrambi negativi quindi la funzione è negativa in zero, cresce fino al massimo negativo, decresce fino al minimo, anch'esso negativo e poi cresce fino a diventare positiva in cinque e quindi la funzione ha un solo zero nell'intervallo

$$[0, 5]$$

c) Poiché $f(4) = -1$ cerchiamo la soluzione in $[4, 5]$ che ha lunghezza uno ed è quindi migliore dell'intervallo originale. La lunghezza dell'intervallo iniziale è uno e quindi l'errore iniziale è $\frac{1}{2}$, errore che si dimezza dopo ogni iterazione e che quindi diventa

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} < 0.1 = \frac{1}{10}$$

dopo tre iterazioni.

Soluzione esercizio 5.

a) Studiamo la funzione

$$f(x) = x e^{\frac{1}{x^2}} = x \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Dominio. La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ tranne che nel punto $x = 0$ che annulla il denominatore dell'esponente dell'esponenziale.

La funzione è dispari e la studieremo quindi in $(0, +\infty)$.

Segno. La funzione è positiva per ogni $x > 0$ perché l'esponenziale è positiva.

Limiti/Asintoti.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

Si tratta di un limite della forma $[\infty \cdot 1]$ che non è una forma indeterminata.

Il limite in $x = 0^+$ è una forma $[0 \cdot \infty]$ che riscriviamo come

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}$$

per riportarlo nella forma $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Per confrontare esponenziale e potenze effettuiamo la sostituzione $x = \frac{1}{y}$ ed otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{y^2}}{y}$$

quest'ultimo è un limite notevole per il confronto fra infiniti, in conclusione

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} = +\infty$$

La funzione ha un asintoto verticale $x = 0$.

Ricerchiamo ora eventuali asintoti obliqui, calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x^2}}}{x} = 1$$

e poi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{x^2}} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x^2}} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x}} \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{e^{z^2} - 1}{z} = \lim_{z \rightarrow 0^+} z \frac{e^{z^2} - 1}{z^2} = 0.$$

La funzione ha un asintoto obliquo di equazione $y = x$.

b) Poiché il limite di f nell'origine non è finito non è possibile definire la funzione in quel punto in modo da renderla continua.

c) La derivata della funzione è

$$D[f](x) = \frac{e^{\frac{1}{x^2}}(x^2 - 2)}{x^2}$$

che si annulla per $x = \pm\sqrt{2}$, di cui solo il secondo valore è positivo. Lo studio del segno di $D[f](x)$ è immediato perché l'esponenziale e x^2 sono sempre positivi e quindi la funzione decresce in $(0, \sqrt{2}]$ e cresce in $[\sqrt{2}, +\infty)$. Il punto $x = \sqrt{2}$ è un punto di minimo relativo.

d) La derivata seconda di f è

$$D^2(f)(x) = 2 \frac{e^{\frac{1}{x^2}}(x^2 + 2)}{x^5}$$

che per $x > 0$ è sempre positiva, la funzione è quindi convessa in $(0, +\infty)$.

e) Il suo grafico in tutto il suo dominio è mostrato in Figura 2

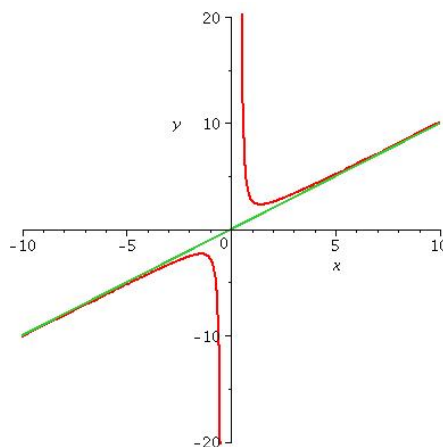


Figura 2: Grafico di $f(x)$

COMPITO B DEL 5 FEBBRAIO 2014

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte. Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):**

1 – ☐, 2 – ☐, 3 – ☐, 4 – ☐, 5 – ☐, 6 – ☐

Esercizio 1. (8 punti)

- a) (3p) Si enunci il teorema di Taylor, specificando con precisione la proprietà del resto.
- b) (2p) Per la funzione $f(x) = \log(x^2 + e)$ si calcolino la derivata prima e seconda in zero e si scriva lo sviluppo di Taylor nel punto $x_0 = 0$ fino al grado due.
- c) (3p) Si calcoli il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^2 + e) - 1}{x^2}.$$

possibilmente usando lo sviluppo di Taylor con resto trovato in precedenza.

Esercizio 2. (6 punti)

- a) (1p) Si scriva la definizione di derivata prima di una funzione f in un punto x_0 .
- b) (4p) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2 - x^2 & \text{se } x \in (0, 1) \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

si calcolino la derivata destra e la derivata sinistra in $x_0 = 0$. La funzione è derivabile in $x_0 = 0$? Si calcolino la derivata destra e la derivata sinistra in $x_0 = 1$. La funzione è derivabile in $x_0 = 1$? La funzione è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$?

- c) (1p) Si disegni il grafico della funzione.

Esercizio 3. (6 punti)

Una azienda necessita per quest'anno di 400 tonnellate di materia prima per il suo piano di produzione ed effettua degli ordini, ognuno della stessa quantità x . Poiché ci sono dei costi di magazzino si è stabilito che il costo per questa strategia di acquisto è espresso in euro dalla funzione

$$C(x) = \frac{80.000}{x} + 2x.$$

- a) (2p) Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ a cui x deve appartenere.
- b) (4p) Determinare la quantità x che è ottimale ordinare se si vuole minimizzare il costo descritto.

Esercizio 4. (9 punti) Si consideri la funzione

$$f := x \mapsto -4x^3 + 18x^2 - 24x + 7$$

- a) (4p) Si dimostri, utilizzando teoremi noti, che l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione nell'intervallo $[0, 4]$.
- b) (3p) Dimostrare che questa equazione ha esattamente una soluzione nell'intervallo dato.
- c) (2p) Una volta determinato un intervallo in cui c'è una soluzione, si dica quante iterazioni dell'algoritmo di bisezione sono necessarie per trovare una soluzione approssimata con un errore inferiore a 0.1.

Esercizio 5. (11 punti) Data la funzione

$$f(x) = x e^{\frac{-1}{x^2}} = x \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

- a) (3p) determinarne dominio, zeri, segno; dire se la funzione è pari/dispari e determinarne eventuali asintoti.
- b) (2p) Dire se è possibile definire f anche in $x = 0$ in modo che risulti continua in quel punto.
- c) (3p) Determinare gli intervalli di monotonia di f ed eventuali punti di estremo relativo e assoluto.
- d) (2p) Determinarne intervalli di concavità.
- e) (1p) Disegnarne il grafico.

TUTTI I LOGARITMI SONO IN BASE e SALVO ESPLICITA INDICAZIONE CONTRARIA

2 Soluzioni Compito B

Soluzione esercizio 1.

a) Vedere libro di testo.

b) Lo sviluppo di Taylor fino al grado due di f nell'origine è

$$f(0) + D[f](0)x + \frac{D^2[f](0)}{2!}x^2 + \frac{D^3[f](0)}{3!}x^3$$

ovvero

$$f(0) + D[f](0)x + \frac{D^2[f](0)}{2!}x^2 + R_2(x)$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0.$$

Per la nostra funzione abbiamo che

$$f(0) = 1, D[f](0) = 0, D^2[f](0) = \frac{2}{e}$$

e quindi

$$f(x) = 1 + \frac{1}{e}x^2 + R_2(x)$$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^2 + e) - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e}x^2 + R_2(x)}{x^2} = \\ &= \frac{1}{e} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 2.

a) Vedere libro di testo.

b) Per $x \neq 0, 1$ la funzione è derivabile perché si tratta di una costante o di un polinomio di secondo grado.

Si osservi che f è continua in $x_0 = 0$ e in $x_1 = 1$, perché

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1.$$

f è quindi continua in tutto $\mathbb{R}$.

Derivabilità in $x = 0$: si noti che $f(0) = 2$, quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2-2}{h} = 0 = D_-[f](0).$$

Inoltre

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2-h^2-2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} -h = 0 = D_+[f](0).$$

. Poiché derivate destra e sinistra coincidono, f risulta derivabile in 0.

Derivabilità in $x = 1$: si noti che $f(1) = 1$, quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2 - (1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -2 - h = -2 = D_-[f](1).$$

Invece

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-1}{h} = 0 = D_+[f](1).$$

Derivate destra e sinistra di f in 1 non coincidono, perciò f non è derivabile in 1.

c) Il grafico della funzione è composto da due tratti di retta orizzontale e da un tratto di parabola ed è in Figura 3 e come vediamo la curva in $x_0 = 0$ è liscia (f è derivabile) mentre presenta in $x_1 = 1$ un punto angoloso (f non è derivabile).

Soluzione esercizio 3.

a) x è la quantità di materia prima che viene ordinata e quindi $x > 0$. Nell'anno il totale fabbisogno di materia prima è di 400t. e quindi, poiché ci sono dei costi di immagazzinamento, ciascuna ordinazione sarà non superiore a 400t. Dunque

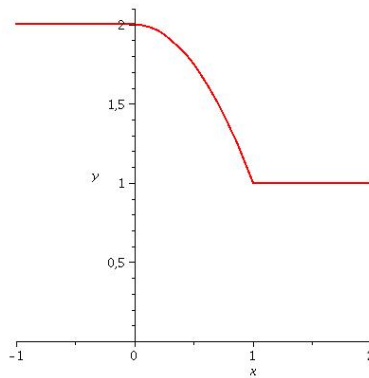


Figura 3: Grafico di $f(x)$

$x \in (0, 400]$.

b) Si determina l'andamento di C per stabilire la collocazione dei punti di minimo assoluto entro $(0, 400]$:

$$D[C](x) = 2 \frac{x^2 - 40000}{x^2}.$$

che si annulla per $x = \pm 200$ ma solo il valore positivo appartiene a $(0, 400]$, perciò risulta $D[C](x) \geq 0$ in $(0, 400]$ se e solo se $x \geq 200$. Dunque il costo decresce in $(0, 200]$ e cresce in $[200, 400]$, perciò $C(x)$ raggiunge in $[0, 400]$ il suo valore minimo assoluto per $\hat{x} = 200$.

Soluzione esercizio 4.

a) La funzione $f := x \mapsto -4x^3 + 18x^2 - 24x + 7$ è continua in tutto $\mathbb{R}$ in quanto polinomio. Possiamo quindi applicare il Teorema degli zeri (o il Teorema dei valori intermedi) per dimostrare che l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione nell'intervallo $[0, 4]$.

I due punti $y_0 = f(0) = 7$ e $y_1 = f(4) = -57$ appartengono ad $\text{Im}(f)$ e quindi per i teoremi citati anche il punto zero in quanto $y_0 > 0 > y_1$. L'equazione ha quindi almeno una soluzione.

b) Calcoliamo la derivata di f

$$D[f] = -12x^2 + 36x - 24 = 12(-x^2 + 3x - 2)$$

che si annulla nei due punti $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ la funzione non è quindi monotona ed inoltre abbiamo che $f(x_0) = -3$, $f(x_1) = -1$ sono rispettivamente un punto di minimo ed un punti di massimo locale che sono entrambi negativi quindi la funzione è positiva in zero, decresce fino al minimo negativo in uno, cresce fino al massimo, anch'esso negativo e poi decresce restando sempre negativa fino a quattro e quindi la funzione ha un solo zero nell'intervallo

$$[0, 1]$$

c) Poiché $f(1) = -3$ cerchiamo la soluzione in $[0, 1]$ che ha lunghezza uno ed è quindi migliore dell'intervallo originale.. La lunghezza dell'intervallo iniziale è uno e quindi l'errore iniziale è $\frac{1}{2}$, errore che si dimezza dopo ogni iterazione e che quindi diventa

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} < 0.1 = \frac{1}{10}$$

dopo tre iterazioni.

Soluzione esercizio 5.

a) Studiamo la funzione

$$f(x) = x e^{\frac{-1}{x^2}} = x \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Dominio. La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ tranne che nel punto $a = 0$ che annulla il denominatore dell'esponente dell'esponenziale.

La funzione è dispari e la studieremo quindi in $(0, +\infty)$.

Segno. La funzione è positiva per ogni $x > 0$ perché l'esponenziale è positiva.

Limiti/ Asintoti.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{-1}{x^2}} = +\infty$$

Si tratta di un limite della forma $[\infty \cdot 1]$ che non è una forma indeterminata.

Il limite in $x = 0^+$ è una forma $[0 \cdot 0]$ che non è indeterminata

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{-1}{x^2}} = 0$$

La funzione non ha asintoti verticali.
 ricerchiamo ora eventuali asintoti obliqui, calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{\frac{-1}{x^2}}}{x} = 1$$

e poi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{-1}{x^2}} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{-1}{x^2}} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{-1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x}} \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{e^{-z^2} - 1}{z} = \lim_{z \rightarrow 0^+} -z \frac{e^{-z^2} - 1}{-z^2} = 0.$$

La funzione ha un asintoto obliquo di equazione $y = x$.

b) Poiché il limite di f nell'origine è zero possiamo definire la funzione in quel punto come $f(0) = 0$ in modo da renderla continua.

c) La derivata della funzione è

$$D[f](x) = \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}(x^2 + 2)}{x^2}$$

che non si annulla mai. Lo studio del suo segno è immediato perché l'esponenziale e x^2 sono sempre positivi e quindi la funzione è strettamente crescente in $(0, +\infty)$.

La derivata seconda di f è

$$D^2(f)(x) = -2 \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}(x^2 - 2)}{x^5}$$

che si annulla per $x = \pm\sqrt{2}$, di cui solo il secondo è positivo. Lo studio del suo segno è immediato perché l'esponenziale e x^2 sono sempre positivi e quindi la funzione è convessa in $(0, \sqrt{2}]$ e concava in $[\sqrt{2}, +\infty)$. Il punto $x = \sqrt{2}$ è un punto di flesso.

d) Il suo grafico in tutto il suo dominio è, vedi Figura 4

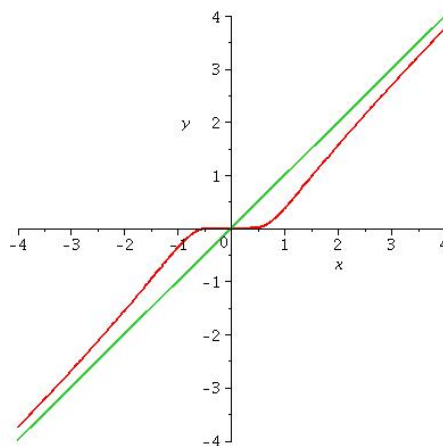


Figura 4: Grafico di $f(x)$

Esame di
Matematica per le applicazioni economiche 1
17 giugno 2014
Fila A

COGNOME_____

NOME _____

MATRICOLA _____

-Durante lo svolgimento della prova scritta lo studente potrà utilizzare soltanto: una penna (blu o nera), un righello, un lapis, una gomma, i fogli messi a disposizione dai docenti e il formulario scaricabile dal sito del corso. L'utilizzo di qualunque altro oggetto diverso da quelli indicati nella lista sopra descritta comporta l'annullamento della prova.

-Durante lo svolgimento della prova scritta i telefoni cellulari, gli smartphone e i tablet dovranno essere spenti. Una volta spenti, essi potranno essere tenuti in tasca o in una borsa e per nessuna ragione potranno essere spostati dalla sede in cui sono riposti all'inizio della prova. Il mancato rispetto delle norme sopra esposte comporta l'annullamento della prova.

-Lo studente deve presentarsi all'esame con un documento di riconoscimento valido. Il libretto universitario non è un documento di riconoscimento.

-È possibile ritirarsi o consegnare soltanto dopo che sia trascorsa almeno un'ora dall'inizio della prova.

-Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato il compito per la correzione o essersi ritirato.

-Verranno verbalizzati tutti i risultati d'esame sia positivi che negativi.

-La prova ha la durata di due ore e mezzo. Spiegate con molta cura le vostre risposte.

→ Consegnate **SEPARATAMENTE** la parte relativa agli (Esercizi 1 - 2 - 3) e quella relativa agli (Esercizi 4 - 5 - 6). ←

Esercizio 1. (6 punti)

- Si dia la definizione di funzione iniettiva.
- Si dia la definizione di punto di minimo globale di una funzione.
- Si consideri la funzione $f : [1/3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in [1/3, 4]$, $f(x) = x \log(x)$. Si stabilisca se essa è iniettiva e se ammette punto di minimo globale.

Esercizio 2. (6 punti)

- Si enunci e dimostri il teorema di Rolle.
- Si consideri la funzione

$$f : \left[0, \frac{9}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{se } x \in \left[0, \frac{3}{2}\right) \\ x - \frac{5}{4} & \text{se } x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right] \end{cases}.$$

Si verifichi che

- f è continua in $\left[0, \frac{9}{4}\right]$;
- f è derivabile in $\left(0, \frac{9}{4}\right)$;
- f soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $\left[0, \frac{9}{4}\right]$.

Esercizio 3. (6 punti) Si calcolino i seguenti limiti.

a.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\log(1+x)) + (1 - \cos^2 x)}{x},$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\log(\sin(5x)) - \log x) \frac{x^2}{1 - \cos x}$$

Esercizio 4. (6 punti) Siano date le seguenti funzioni tutte derivabili

$$f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Si assuma che $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0, g'(x) \geq 0, h'(x) > 0$.

i. Si dica se $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$l(x) = f(g(x)) + e^{h(x)}$$

è una funzione crescente

ii. Se g ha un punto critico in x_0 (ovvero, $g'(x_0) = 0$), è vero che

$$m : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad m(x) = f(g(2x))$$

ha un punto critico in $\frac{x_0}{2}$?

Esercizio 5. (6 punti) Una impresa produce un bene B usando un solo input I. Fissate opportune unità di misura per B ed I, si ha che la funzione di produzione, cioè la funzione che esprime la quantità di bene prodotto in relazione alla quantità di input utilizzata, è data da

$$f(x) = 4x.$$

Si ha inoltre che il prezzo di vendita di una unità di bene B è 1 e che la funzione di costo è data da

$$c(x) = x^2.$$

Un'autorità di politica economica ha inoltre introdotto una imposta sul profitto π descritta come segue

$$t(\pi) = \frac{1}{8}\pi^2.$$

Dunque, il profitto in assenza di tassazione è

$$f(x) - c(x).$$

e il profitto in presenza di tassazione è

$$f(x) - c(x) - t(f(x) - c(x))$$

a. Si determini il piano di produzione ottimale dell'impresa e il corrispondente profitto in assenza di tassazione. b. Si determini il piano di produzione ottimale dell'impresa e il corrispondente profitto in presenza di tassazione.

(Si ricordi che per ogni $a, b \in \mathbb{R}, a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$.)

Esercizio 6. (10 punti) Si disegni il grafico di

$$f(x) = x(3 - \log^2 x).$$

Non si studi la presenza di eventuali asintoti obliqui; **si studi** il segno della derivata seconda.

Esame di
Matematica per le applicazioni economiche 1
17 giugno 2014
Fila B

-Durante lo svolgimento della prova scritta lo studente potrà utilizzare soltanto: una penna (blu o nera), un righello, un lapis, una gomma, i fogli messi a disposizione dai docenti e il formulario scaricabile dal sito del corso. L'utilizzo di qualunque altro oggetto diverso da quelli indicati nella lista sopra descritta comporta l'annullamento della prova.

-Durante lo svolgimento della prova scritta i telefoni cellulari, gli smartphone e i tablet dovranno essere spenti. Una volta spenti, essi potranno essere tenuti in tasca o in una borsa e per nessuna ragione potranno essere spostati dalla sede in cui sono riposti all'inizio della prova. Il mancato rispetto delle norme sopra esposte comporta l'annullamento della prova.

-Lo studente deve presentarsi all'esame con un documento di riconoscimento valido. Il libretto universitario non è un documento di riconoscimento.

-È possibile ritirarsi o consegnare soltanto dopo che sia trascorsa almeno un'ora dall'inizio della prova.

-Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato il compito per la correzione o essersi ritirato.

-Verranno verbalizzati tutti i risultati d'esame sia positivi che negativi.

-La prova ha la durata di due ore e mezzo. Spiegate con molta cura le vostre risposte.

→ Consegnate **SEPARATAMENTE** la parte relativa agli (Esercizi 1 - 2 - 3) e quella relativa agli (Esercizi 4 - 5 - 6). ←

Esercizio 1. (6 punti)

- a. Si dia la definizione di funzione iniettiva.
- b. Si dia la definizione di punto di massimo globale di una funzione.
- c. Si consideri la funzione $f : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in [-2, 3]$, $f(x) = -xe^x$. Si stabilisca se essa è iniettiva e se ammette punto di massimo globale.

Esercizio 2. (6 punti)

- a. Si enunci e dimostri il teorema di Rolle.
- b. Si consideri la funzione

$$f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \in [-1, 1) \\ -3x^2 + 7x - 1 & \text{se } x \in [1, 2] \end{cases}.$$

Si verifichi che

- i. f è continua in $[-1, 2]$;
- ii. f è derivabile in $(-1, 2)$;
- iii. f soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $[-1, 2]$.

Esercizio 3. (6 punti) Si calcolino i seguenti limiti.

a.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - (1 - \cos^2 x)}{x},$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\log(\sin(3x)) - \log x) \frac{1 - \cos x}{x}$$

Esercizio 4. (6 punti) Siano date le seguenti funzioni tutte derivabili

$$f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Si assuma che $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) > 0, \quad g(x) > 0, \quad h(x) > 0,$$

$$f'(x) > 0, g'(x) \geq 0,$$

$$h'(x) < 0.$$

i. Si dica se $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$l(x) = \frac{f(x)}{h(x)} + e^{g(x)}$$

è una funzione crescente

ii. Se g ha un punto critico in x_0 (ovvero, $g'(x_0) = 0$), è vero che

$$m : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad m(x) = f\left(g\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

ha un punto critico in $2x_0$?

Esercizio 5. (6 punti) Una impresa produce un bene B usando un solo input I. Fissate opportune unità di misura per B ed I, si ha che la funzione di produzione, cioè la funzione che esprime la quantità di bene prodotto in relazione alla quantità di input utilizzata, è data da

$$f(x) = 2x.$$

Si ha inoltre che il prezzo di vendita di una unità di bene B è 1 e che la funzione di costo è data da

$$c(x) = x^2.$$

Un'autorità di politica economica ha inoltre introdotto una imposta sul profitto descritta come segue

$$t(\pi) = \frac{1}{2}\pi^2.$$

Dunque, il profitto in assenza di tassazione è

$$f(x) - c(x).$$

e il profitto in presenza di tassazione è

$$f(x) - c(x) - t(f(x) - c(x))$$

a. Si determini il piano di produzione ottimale dell'impresa e il corrispondente profitto in assenza di tassazione.

b. Si determini il piano di produzione ottimale dell'impresa e il corrispondente profitto in presenza di tassazione.

(Si ricordi che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$.)

Esercizio 6. (10 punti) Si disegni il grafico di

$$f(x) = x(\log^2 x - 3).$$

Non si studi la presenza di eventuali asintoti obliqui; **si studi** il segno della derivata seconda.

Nome _____ Matricola _____

Esercizio 1. (5 punti) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $-2kx + |x|$.

Si determinino i valori di k tali che

- (i) f sia crescente,
- (ii) f sia decrescente,
- (iii) f abbia minimo globale,
- (iv) f abbia massimo globale.

Esercizio 2. (6 punti)

- a) Si fornisca la definizione di funzione continua in un punto.
- b) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{se } x \geq 2 \\ e^{bx} & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Si determinino tutti i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

- (i) f risulti continua in $x = 2$,
- (ii) f risulti derivabile in $x = 2$.

Esercizio 3. (6 punti)

Si calcolino i seguenti limiti

a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - \sqrt{x} - x^2(\sqrt{x} + 2)^2}{\sqrt{x^5 + 3}}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x^2} - e^{x^2}}{\log(1 + x^2)}$$

Esercizio 4. (6 punti)

a) Si enunci il teorema (la formula) di Taylor, specificando le proprietà del resto;

b) Per la funzione $f(x) = (27 - 2x)^{4/3}$ si scriva la formula di Taylor nel punto $x_0 = 0$ fino al grado 2;

c) Usando la formula di Taylor ricavata al punto (b), si calcoli un'approssimazione (razionale) di $25^{4/3}$.

Esercizio 5. (8 punti)

Si consideri un'impresa che produce un bene in quantità y usando un input x come descritto dalla seguente funzione di produzione

$$y = f(x) = \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) + 4x \quad x \in [0, +\infty).$$

Sia 1 il prezzo dell'unità del prodotto, e $c(x) = x$ la funzione di costo, in modo che la funzione profitto sia

$$f(x) - c(x).$$

Dato che l'input è una sostanza inquinante, una autorità di politica economica decide di tassare l'input usato dall'impresa. Tale autorità deve scegliere tra una delle due seguenti funzioni di imposta:

$$t_1(x) = \frac{10x}{3}, \quad \text{o} \quad t_2(x) = \frac{x^2}{2} + x.$$

Si assuma che la funzione di imposta, una volta decisa, venga comunicata alla impresa che quindi massimizzerà il profitto al netto dell'imposta. Risolvere i due problemi di massimizzazione.

Se l'autorità di politica economica vuole massimizzare le entrate ricavate dalla imposta, quale delle due funzioni deve scegliere?

Esercizio 6. (9 punti)

Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{-5}{x^2 - 2x - 3} + 1$$

e si disegni il suo grafico.

Nome _____ Matricola _____

Esercizio 1. (5 punti) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = kx - |x|$.

Si determinino i valori di k tali che

- (i) f sia crescente,
- (ii) f sia decrescente,
- (iii) f abbia minimo globale,
- (iv) f abbia massimo globale.

Esercizio 2. (6 punti)

- a) Si fornisca la definizione di funzione derivabile in un punto.
- b) Sia $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f(x) = \begin{cases} a \log x & \text{se } x > 3 \\ \frac{b}{x} & \text{se } 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

Si determinino tutti i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

- (i) f risulti continua in $x = 3$,
- (ii) f risulti derivabile in $x = 3$.

Esercizio 3. (6 punti)

Si calcolino i seguenti limiti

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1 - (\sqrt{x} - 1)^3}{(\sqrt{x} + 2)^2 - 4}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} + \log x}{\sqrt{e^{x^4} + 1}}$$

Esercizio 4. (6 punti)

a) Si enunci il teorema (la formula) di Taylor, specificando le proprietà del resto;

b) Per la funzione $f(x) = (8 - 2x)^{1/3}$ si scriva la formula di Taylor nel punto $x_0 = 0$ fino al grado 2.

c) Usando la formula di Taylor ricavata al punto (b), si calcoli un'approssimazione (razionale) di $10^{1/3}$.

Esercizio 5. (8 punti)

Si consideri un'impresa che produce un bene in quantità y usando un input x come descritto dalla seguente funzione di produzione

$$y = f(x) = \log(1 + 2x) + 5x, \quad x \in [0, +\infty).$$

Sia 1 il prezzo dell'unità del prodotto, e $c(x) = 2x$ la funzione di costo, in modo che la funzione profitto sia

$$f(x) - c(x).$$

Dato che l'input è una sostanza inquinante, una autorità di politica economica decide di tassare l'input usato dall'impresa. Tale autorità deve scegliere tra una delle due seguenti funzioni di imposta:

$$t_1(x) = 3.5x, \quad \text{o} \quad t_2(x) = 3x^2 + x.$$

Si assuma che la funzione di imposta, una volta decisa, venga comunicata alla impresa che quindi massimizzerà il profitto al netto dell'imposta. Risolvere i due problemi di massimizzazione.

Se l'autorità di politica economica vuole massimizzare le entrate ricavate dalla imposta, quale delle due funzioni deve scegliere?

Esercizio 6. (9 punti)

Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{7}{x^2 + 4x - 5} - 1$$

e si disegni il suo grafico.

SOLUZIONI FILA A
ESERCIZIO 1

Abbiamo

$$f(x) = \begin{cases} (-2k+1)x, & \text{se } x \geq 0 \\ (-2k-1)x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(i) f è crescente in $\mathbb{R}$ se e solo se

$$\begin{cases} -2k+1 > 0 \\ -2k-1 > 0 \end{cases}$$

e ciò accade quando

$$k < \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad k < -\frac{1}{2}.$$

Pertanto f è crescente in $\mathbb{R}$ se e solo se

$$k < -\frac{1}{2}$$

(ii) f è decrescente in $\mathbb{R}$ se e solo se,

$$\begin{cases} -2k+1 < 0 \\ -2k-1 < 0 \end{cases}$$

e ciò accade quando

$$k > \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{2} < k.$$

Pertanto f è decrescente in $\mathbb{R}$ se e solo se

$$k > \frac{1}{2}$$

(iii) f ha minimo globale , se e solo se

$$\begin{cases} -2k+1 \geq 0 \\ -2k-1 \leq 0 \end{cases}$$

e ciò accade se e solo se

$$k \leq \frac{1}{2}, \quad \text{e} \quad k \geq -\frac{1}{2}.$$

Quindi f ha minimo globale se e solo se

$$-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}.$$

(iv) f ha massimo globale , se e solo se

$$\begin{cases} -2k+1 \leq 0 \\ -2k-1 \geq 0 \end{cases}$$

e ciò accade se e solo se

$$k \geq \frac{1}{2}, \quad \text{e} \quad k \leq -\frac{1}{2}.$$

Pertanto f non ha mai massimo globale.

ESERCIZIO 2

a) Si rinvia al libro di testo.

b) Punto i). f è continua in $x = 2$ se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

Ora

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} ax = 2a$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} e^{bx} = e^{2b}$$

inoltre $f(2) = 2a$. Quindi f è continua quando se e solo se

$$e^{2b} = 2a \quad (1)$$

Punto ii). La funzione è derivabile in $x = 2$ se

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

e i due limiti sono finiti.

Ricordiamo che condizione necessaria affinché una funzione sia derivabile in un punto è che essa sia continua in tale punto. Quindi affinché f sia derivabile in $x = 2$ deve valere la (1) e si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2ax - 2a}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2a(x - 2)}{x - 2} = 2a \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{bx} - e^{2b}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2b}(e^{b(x-2)} - 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} be^{2b} \frac{(e^{b(x-2)} - 1)}{b(x - 2)} = be^{2b} \end{aligned}$$

Pertanto f è derivabile in $x = 2$ se e solo se

$$\begin{cases} e^{2b} = 2a \\ be^{2b} = 2a \end{cases}.$$

Questo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} e^{2b} = 2a \\ be^{2b} = e^{2b} \end{cases}.$$

Ora la seconda equazione si può scrivere $e^{2b}(b - 1) = 0$ che ha per soluzione $b = 1$, d'altra parte dalla prima equazione si ha anche $2a = e^2$. In definitiva f è derivabile in $x = 2$ se e solo se $a = e^2/2$, $b = 1$.

ESERCIZIO 3

a) Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - \sqrt{x} - x^2(\sqrt{x} + 2)^2}{\sqrt{x^5 + 3}}.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} x^3 - \sqrt{x} - x^2(\sqrt{x} + 2)^2 &= x^3 - \sqrt{x} - x^2(x + 4\sqrt{x} + 4) = \\ &= x^3 - \sqrt{x} - (x^3 + 4x^2\sqrt{x} + 4x^2) = -4x^2\sqrt{x} - 4x^2 - \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - \sqrt{x} - x^2(\sqrt{x} + 2)^2}{\sqrt{x^5 + 3}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^2\sqrt{x} - 4x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x^5 + 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2\sqrt{x} \left(4 + \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^5 \left(1 + \frac{3}{x^5}\right)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2\sqrt{x} \left(4 + \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{3}{x^5}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\left(4 + \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^5}}} = -4.\end{aligned}$$

b) Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x^2} - e^{x^2}}{\log(1 + x^2)}.$$

Il limite è della forma $\frac{0}{0}$.

Osservando che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x^2} - e^{x^2}}{\log(1 + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} (e^{2x^2} - 1)}{\log(1 + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2} \frac{e^{2x^2} - 1}{2x^2}}{\frac{\log(1 + x^2)}{x^2}}$$

e ricordando i due limiti notevoli

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(t + 1)}{t} = 1$$

abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2} \frac{e^{2x^2} - 1}{2x^2}}{\frac{\log(1 + x^2)}{x^2}} = 2.$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x^2} - e^{x^2}}{\log(1 + x^2)} = 2.$$

ESERCIZIO 4

a) La formulazione del teorema di Taylor e il calcolo del resto si trovi nel libro. Occhio ad un errore di battitura nella espressione per il resto nella formula [5.5], p. 185 del libro [Z]; corretta è la formula che appare alla fine della dimostrazione (p.186):

$$R_n(x) = \frac{D^{n+1}f(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \quad \theta \in [c, x].$$

b) Calcolando le derivate della funzione $f(x) = (27 - 2x)^{4/3}$ vediamo, che

$$f(0) = 27^{4/3} = 81, \quad f'(x) = -\frac{8}{3}(27 - 2x)^{1/3}, \quad f'(0) = -8, \quad f''(x) = \frac{16}{9}(27 - 2x)^{-2/3}, \quad f''(0) = \frac{16}{81}.$$

La formula di Taylor ha forma

$$f(x) = 81 - \frac{8}{1!}x + \frac{1}{2!}\frac{16}{81}x^2 + R_2(x) = 81 - 8x + \frac{8}{81}x^2 + R_2(x).$$

c) Il valore approssimato $25^{4/3} = f(1) \approx 81 - 8 \cdot 1 + \frac{8}{81} \cdot 1 = 73\frac{8}{81} \approx 73,0988$. La calcolatrice dà il risultato 73,1004, ed l'errore è di di circa 0,0016.

ESERCIZIO 5

Il profitto (lordo) della impresa prima della tassazione è

$$P(x) = \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) + 3x$$

Se l'autorità di politica economica applicherà la tassazione $t_1(x)$ il profitto dell'impresa al netto della tassazione sarà $P_1(x) = P(x) - t_1(x) = \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) + 3x - \frac{10x}{3} = \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \frac{x}{3}$.

Per trovare il massimo del profitto netto P_1 calcoliamo la derivata

$$P_1'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} - \frac{1}{3} = \frac{1-x}{3(2+x)}.$$

È ovvio $P_1'(x) > 0$ in $[0, 1)$, mentre $P_1'(x) < 0$ in $(1, +\infty)$. Quindi il profitto netto P_1 cresce in $[0, 1)$ e decresce $(1, +\infty)$. Allora $x_1 = 1$ è un punto di massimo globale per P_1 , e la scelta dell'impresa in questo caso. Il valore della tassazione nel punto x_1 è uguale a $t_1(1) = 10/3$.

In modo analogo calcoliamo il profitto al netto della tassazione $t_2(x)$ ottenendo:

$$P_2(x) = P(x) - t_2(x) = \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) + 3x - \left(\frac{x^2}{2} + x\right) = \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) + 2x - \frac{x^2}{2}.$$

Calcolando di nuovo la derivata

$$P_2'(x) = \frac{1}{2+x} + 2 - x = \frac{5-x^2}{2+x},$$

e studiando-la per $x \in [0, +\infty)$, troviamo che $P_2'(x) > 0$ in $[0, \sqrt{5})$, $P_2'(x) < 0$ in $(\sqrt{5}, +\infty)$. Quindi il profitto netto P_2 cresce in $[0, \sqrt{5})$ e decresce $(\sqrt{5}, +\infty)$. Allora $x_2 = \sqrt{5}$ è il punto di massimo globale per $P_2(x)$ e la scelta dell'impresa sotto questa politica di tassazione. Il valore di tassazione è $t_2(\sqrt{5}) = \frac{5}{2} + \sqrt{5}$.

Vediamo che $t_1(x_1) \in [3, 4]$, mentre $t_2(x_2) \in [4, 5]$, quindi la miglior scelta di tassazione per l'autorità economica è t_2 .

ESERCIZIO 6.

Il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{-5}{x^2 - 2x - 3} + 1$$

è definito dalla condizione $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \neq 0$ e quindi $D: x \neq -1 \wedge x \neq 3$.

La funzione ne è pari ne dispari; ad esempio $f(2) = 8/3$, $f(-2) = 0$.

Intersezione con l'asse Oy è il punto $(0, f(0)) = (0, 8/3)$. Per calcolare l'intersezione(-i) con asse Ox trasformiamo $f(x)$ nella forma

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-3)(x+1)},$$

da quale concludiamo che gli zeri della funzione sono $x_1 = -2, x_2 = 4$; inoltre la funzione cambia il segno nei punti $x = -2, x = -1, x = 3, x = 4$.

È ovvio che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ e quindi $y = 1$ è l'asintoto orizzontale della funzione per $x \rightarrow \pm\infty$.

Concludiamo anche che $x = -1$ e $x = 3$ sono asintoti verticali; possiamo calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow -1^\mp} f(x) = \mp\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^\mp} f(x) = \pm\infty.$$

La derivata prima

$$f'(x) = \frac{10(x-1)}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

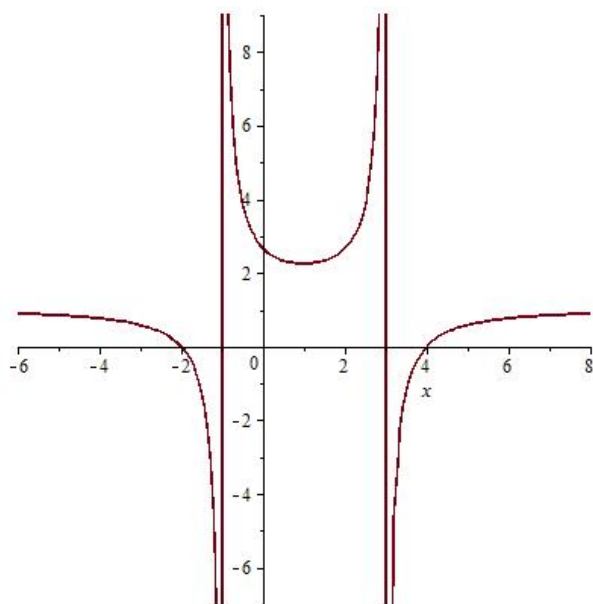
cambia segno in un unico punto $x_c = 1$. La funzione $f(x)$ è decrescente negli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(-1, 1)$ ed è crescente negli intervalli $(1, 3)$ e $(3, +\infty)$.

La derivata seconda è

$$f''(x) = -\frac{10(3x^2 - 6x + 7)}{(x^2 - 2x - 3)^3};$$

il numeratore è positivo, invece il denominatore cambia il segno nei punti $x = -1, x = 3$. Tutto sommato $f''(x) > 0$ e la funzione è convessa in $(-1, 3)$ e $f''(x) < 0$ e la funzione è concava in $(-\infty, -1)$ e in $(3, \infty)$.

Il grafico della funzione è



SOLUZIONI FILA B

ESERCIZIO 1

Abbiamo

$$f(x) = \begin{cases} (k-1)x, & \text{se } x \geq 0 \\ (k+1)x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(i) f è crescente in $\mathbb{R}$ se e solo se

$$\begin{cases} k-1 > 0 \\ k+1 > 0 \end{cases}$$

e ciò accade quando

$$k > 1 \text{ e } k > -1.$$

Pertanto f è crescente in $\mathbb{R}$ se e solo se

$$k > 1.$$

(ii) f è decrescente in $\mathbb{R}$ se e solo se,

$$\begin{cases} k-1 < 0 \\ k+1 < 0 \end{cases}$$

e ciò accade quando

$$k < 1 \text{ e } k < -1.$$

Pertanto f è decrescente in $\mathbb{R}$, se e solo se $k < -1$.

(iii) f ha minimo globale, se e solo se

$$\begin{cases} k-1 \geq 0 \\ k+1 \leq 0 \end{cases}$$

e ciò accade se e solo se

$$k \geq 1, \text{ e } k \leq -1.$$

Quindi f non ha mai minimo globale

(iv) f ha massimo globale, se e solo se

$$\begin{cases} k-1 \leq 0 \\ k+1 \geq 0 \end{cases}$$

e ciò accade se e solo se

$$k \leq 1, \text{ e } k \geq -1.$$

Pertanto f ha massimo globale in 0 se e solo se

$$-1 \leq k \leq 1.$$

ESERCIZIO 2

a) Si rinvia al libro di testo.

b) Punto i). f è continua in $x = 3$ se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$$

Ora

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} a \log x = a \log 3$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{b}{x} = \frac{b}{3}$$

inoltre $f(3) = \frac{b}{3}$. Quindi f è continua quando accade che

$$a \log 3 = \frac{b}{3} \quad (2)$$

Punto ii) La funzione è derivabile in $x = 3$ se i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

e sono entrambi finiti.

Ricordiamo che condizione necessaria affinché una funzione sia derivabile in un punto è che essa sia continua in tale punto. Quindi affinché f sia derivabile in $x = 3$ deve valere la (2) e si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{a \log x - a \log 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{a (\log x - \log 3)}{x - 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{a \log \left(1 + \frac{x-3}{3}\right)}{x - 3} = \frac{a}{3} \end{aligned}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\frac{b}{x} - \frac{b}{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\frac{b}{3x} (3 - x)}{x - 3} = - \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{b}{3x} = -\frac{b}{9}.$$

Pertanto f è derivabile in $x = 3$ se e solo se

$$\begin{cases} a \log 3 = \frac{b}{3} \\ \frac{a}{3} = -\frac{b}{9} \end{cases}.$$

Questo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} -\frac{b}{3} \log 3 = \frac{b}{3} \\ a = -\frac{b}{3} \end{cases}.$$

Ora, poiché $\log 3 \neq -1$ la prima equazione fornisce $b = 0$ e dalla seconda equazione si ha anche $a = 0$. In definitiva f è derivabile in $x = 3$ se e solo se $a = b = 0$.

ESERCIZIO 3

a) Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1 - (\sqrt{x} - 1)^3}{(\sqrt{x} + 2)^2 - 4}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 1 - (\sqrt{x} - 1)^3}{(\sqrt{x} + 2)^2 - 4} &= \frac{x^2 - 1 - ((\sqrt{x})^3 - 3x + 3\sqrt{x} - 1)}{(x + 4\sqrt{x} + 4) - 4} = \frac{x^2 - (\sqrt{x})^3 + 3x - 3\sqrt{x}}{x + 4\sqrt{x}} = \\ &= \frac{\sqrt{x} (x\sqrt{x} - x + 3\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x} (\sqrt{x} + 4)} = \frac{(x\sqrt{x} - x + 3\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x} + 4}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1 - (\sqrt{x} - 1)^3}{(\sqrt{x} + 2)^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x\sqrt{x} - x + 3\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x} + 4} = -\frac{3}{4}.$$

b) Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} + \log x}{\sqrt{e^{x^4} + 1}}.$$

Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} + \log x}{\sqrt{e^{x^4} + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} \left(1 + \frac{\log x}{e^{x^2}}\right)}{e^{\frac{x^4}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{e^{x^4}}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2 - \frac{x^4}{2}} \left(1 + \frac{\log x}{e^{x^2}}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{e^{x^4}}}} \quad (3)$$

Ora il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{e^{x^2}}$$

può essere calcolato in diversi modi. Ad esempio ricordando i limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} + \infty$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\log x}{x^2}}{\frac{e^{x^2}}{x^2}} = 0. \quad (4)$$

Quindi poiché l'esponente di $e^{x^2 - \frac{x^4}{2}}$ è il polinomio $x^2 - \frac{x^4}{2}$ e questo tende a $-\infty$ per x che tende a $+\infty$ si ha da (3) e (4)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} + \log x}{\sqrt{e^{x^4} + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2 - \frac{x^4}{2}} \left(1 + \frac{\log x}{e^{x^2}}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{e^{x^4}}}} = \frac{0 \cdot 1}{1} = 0.$$

ESERCIZIO 4

a) La formulazione del teorema di Taylor e il calcolo del resto si trovi nel libro. Occhio ad un errore di battitura nella espressione per il resto nella formula [5.5], p. 185 del libro [Z]; corretta è la formula che appare alla fine della dimostrazione (p.186):

$$R_n(x) = \frac{D^{n+1}f(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \quad \theta \in [c, x].$$

b) Calcolando le derivate della funzione $f(x) = (8 - 2x)^{1/3}$ vediamo, che

$$f(0) = 8^{1/3} = 2, \quad f'(x) = -\frac{2}{3}(8 - 2x)^{-2/3}, \quad f'(0) = -1/6, \quad f''(x) = -\frac{8}{9}(8 - 2x)^{-5/3}, \quad f''(0) = -\frac{1}{36}.$$

La formula di Taylor ha forma:

$$f(x) = 2 - \frac{1}{6} \frac{x}{1!} - \frac{1}{2!} \frac{1}{36} x^2 + R_2(x) = 2 - \frac{x}{6} - \frac{x^2}{72} + R_2(x).$$

c) Il valore approssimato $10^{1/3} = f(-1) \approx 2 + \frac{1}{6} - \frac{1}{72} = 2\frac{11}{72} \approx 2,1528$. La calcolatrice dà il risultato 2,1544 ed l'errore è di circa 0,0016.

ESERCIZIO 5

Il profitto (lordo) della impresa prima della tassazione è

$$P(x) = \log(1 + 2x) + 5x - 2x = \log(1 + 2x) + 3x.$$

Se l'autorità di politica economica applicherà la tassazione $t_1(x) = 3.5x$ il profitto dell'impresa al netto della tassazione sarà $P_1(x) = P(x) - t_1(x) = \log(1 + 2x) + 3x - 3.5x = \log(1 + 2x) - 0.5x$.

Per trovare il massimo del profitto netto P_1 calcoliamo la derivata

$$P_1'(x) = \frac{2}{1 + 2x} - \frac{1}{2} = \frac{3 - 2x}{2(1 + 2x)}.$$

È ovvio $P_1'(x) > 0$ in $[0, 3/2)$, mentre $P_1'(x) < 0$ in $(3/2, +\infty)$. Quindi il profitto netto P_1 cresce in $[0, 3/2)$ e decresce in $(3/2, +\infty)$. Allora $x_1 = 3/2$ è un punto di massimo globale per P_1 e la scelta dell'impresa in questo caso. Il valore della tassazione nel punto x_1 è uguale a $t_1(3/2) = 5.25$.

In modo analogo calcoliamo il profitto al netto della tassazione $t_2(x)$ ottenendo:

$$P_2(x) = P(x) - t_2(x) = \log(1 + 2x) + 3x - (3x^2 + x) = \log(1 + 2x) + 2x - 3x^2.$$

Calcolando di nuovo la derivata

$$P_2'(x) = \frac{2}{1 + 2x} + 2 - 6x = \frac{4 - 2x - 12x^2}{1 + 2x},$$

e studiando-la per $x \in [0, +\infty)$, troviamo che $P_2'(x) > 0$ in $[0, 1/2)$, $P_2'(x) < 0$ in $(1/2, +\infty)$. Quindi il profitto netto P_2 cresce in $[0, 1/2)$ e decresce in $(1/2, +\infty)$. Allora $x_2 = 1/2$ è il punto del massimo globale per $P_2(x)$ e la scelta dell'impresa sotto questa politica di tassazione. Il valore di tassazione è $t_2(1/2) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} = 1.25$.

Vediamo che $t_1(x_1) = 5.25 > t_2(x_2) = 1.25$ e quindi la miglior scelta di tassazione per l'autorità economica è t_1 .

ESERCIZIO 6.

Il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{7}{x^2 + 4x - 5} - 1$$

è definito dalla condizione $x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1) \neq 0$ e quindi $D : x \neq -5 \wedge x \neq 1$.

La funzione ne è pari ne dispari; ad esempio $f(2) = 0, f(-2) = -16/9$.

Intersezione con l'asse Oy è il punto $(0, f(0)) = (0, -12/5)$. Per calcolare l'intersezione(-i) con asse Ox trasformiamo $f(x)$ nella forma

$$f(x) = \frac{-x^2 - 4x + 12}{x^2 + 4x - 5} = -\frac{(x + 6)(x - 2)}{(x + 5)(x - 1)},$$

da quale concludiamo che gli zeri della funzione sono $x_1 = -6, x_2 = 2$; inoltre la funzione cambia il segno nei punti $x = -6, x = -5, x = 1, x = 2$.

È ovvio che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1$ e quindi $y = -1$ è l'asintoto orizzontale della funzione per $x \rightarrow \pm\infty$.

Concludiamo anche che $x = -5$ e $x = 1$ sono asintoti verticali; possiamo calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow -5^\mp} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^\mp} f(x) = \mp\infty.$$

La derivata prima

$$f'(x) = -\frac{14(x + 2)}{(x^2 + 4x - 5)^2}$$

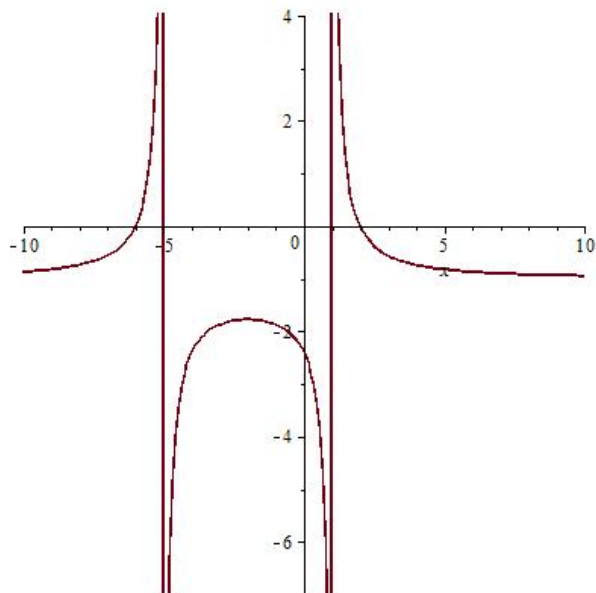
cambia segno in un unico punto $x_c = -2$. La funzione $f(x)$ è crescente negli intervalli $(-\infty, -5)$ e $(-5, -2)$ ed è decrescente negli intervalli $(-2, 1)$ e $(1, +\infty)$.

La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{42(x^2 + 4x + 7)}{(x^2 + 4x - 5)^3};$$

il numeratore è positivo, invece il denominatore cambia il segno nei punti $x = -5$ e $x = 1$. Allora $f''(x) > 0$ e la funzione è convessa in $(-\infty, -5)$ e $(1, +\infty)$ in quanto $f''(x) < 0$ e la funzione è concava in $(-5, 1)$.

Il grafico della funzione è



COMPITO A

Nome

Matricola

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte. Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):**

$1 - \square, 2 - \square, 3 - \square, 4 - \square, 5 - \square, 6 - \square$
--

Esercizio 1. (6 punti)

Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(3x) \sqrt{\ln(1+2x^2)}}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 + x + 1| - 2x^2}{|-x^3 + x| - x^3 + 2x^2}.$$

Esercizio 2. (8 punti)

Studiare la funzione

$$f(x) := \frac{e^{-x}}{|x^2 - 4|}$$

Dominio. Incontro con gli assi. Segno. Continuità. Limiti e asintoti. Derivabilità. Derivata prima. Segno della derivata prima, intervalli di crescita e decrescenza, estremi relativi. Non proseguire con la derivata seconda. Grafico.

Esercizio 3. (8 punti)

- a) Enunciare il Teorema degli zeri.
- b) Applicarlo per dimostrare che l'equazione

$$x^5 + 3x - 1 = 0$$

ha almeno una soluzione in $[0, 1]$.

- c) Quante iterazioni del metodo di bisezione sono necessarie per ottenere un'approssimazione di una soluzione con errore minore di $1/100$?
- d) Fare la prima (solo la prima) iterazione dell'algoritmo di bisezione per trovare il secondo intervallo di incertezza.

Esercizio 4. (6 punti)

Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 2, & \text{se } x \leq 1 \\ ax - b, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dire se esistono a, b in modo che risulti continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 5. (6 punti)

Un'impresa deve scegliere il prezzo $p > 0$ per un certo prodotto che mette in vendita, e sa che la funzione domanda è

$$d(p) := \begin{cases} 3 + \frac{10}{p} - p & \text{se } p \in (0, 5] \\ 0 & \text{se } p > 5. \end{cases}$$

Per semplicità immaginiamo che l'impresa non sostenga alcun costo di produzione (né di vendita). Pertanto il profitto dell'impresa coincide con il ricavo, che è dato dal prodotto $p \cdot d(p)$. L'impresa vuole individuare p che massimizza il profitto, ma deve rispettare una legge che le vieta di scegliere $p > 3$.

- a) Si scriva il problema di massimizzazione del profitto e si dica se è possibile affermare immediatamente che tale problema ammette soluzione.
- b) Si individui il valore di p che massimizza il profitto. Si dica se la cancellazione della legge che impone $p \leq 3$ permetterebbe all'impresa di aumentare il profitto rispetto al profitto che

ottiene in presenza della legge (si spieghi).

Esercizio 6. (6 punti)

a) Per la funzione $F(x) := x^2 - 3x$ si scriva la definizione di F derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$. A partire da questa, poi, si dimostri che $F'(x_0) = 2x_0 - 3$.

b) Si enunci la regola di derivazione della funzione composta e supponendo la derivabilità delle funzioni coinvolte si calcolino le seguenti derivate

$$D[f(x)^2], \quad D[\cos(2f(x))], \quad D[\log(\sin(2x^2))]$$

TUTTI I LOGARITMI SONO IN BASE e TUTTI GLI ANGOLI IN RADIANTI

Soluzione esercizio 1. Utilizzando alcuni limiti notevoli possiamo calcolare il primo limite come

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(3x) \sqrt{\log(1+2x^2)}}{x^2} = 3\sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(3x)}{3x} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\log(1+2x^2)}{2x^2}} = 3\sqrt{2}$$

NOTA. Nello spostare x sotto radice abbiamo utilizzato il fatto che $x \rightarrow 0^+$ e quindi $x > 0$ altrimenti il passaggio non sarebbe stato corretto poiché $\sqrt{x^2} = |x|$. In effetti il limite per $x \rightarrow 0^-$ è $-3\sqrt{2}$ ed il limite per $x \rightarrow 0$ non esiste.

Per quanto riguarda il secondo limite possiamo utilizzare il fatto che conosciamo il segno del polinomio quando x tende a più infinito per eliminare i valori assoluti

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^2 + x + 1| - 2x^2}{|-x^3 + x| - x^3 + 2x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + x + 1) - 2x^2}{-(-x^3 + x) - x^3 + 2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + x + 1}{2x^2 - x} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 2. Si tratta di una funzione sempre positiva; osservando che

$$\frac{e^{-x}}{|x^2 - 4|} = \left| \frac{e^{-x}}{x^2 - 4} \right|,$$

per semplicità la studiamo senza il valore assoluto per poi modificare il grafico di conseguenza, studiamo quindi la funzione

$$g(x) := \frac{e^{-x}}{x^2 - 4}$$

Dominio La funzione è definita per $x \neq \pm 2$.

Incontro con gli assi Per $x = 0$ si ha $g(0) = -\frac{1}{4}$ mentre g non incontra mai l'asse orizzontale.

Segno Poiché l'esponenziale è sempre positiva la funzione g è negativa nell'intervallo $(-2, 2)$ ed è positiva altrimenti

Continuità Si tratta di una funzione continua, dove è definita, in quanto ottenuta per composizione, somma e quoziente di funzioni elementari continue

Limiti

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2 - 4} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^2 - 4} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right] = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^2 - 4} &= \left[\frac{0^+}{+\infty} \right] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{e^{-x}}{x^2 - 4} &= \left[\frac{e^2}{0^+} \right] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{e^{-x}}{x^2 - 4} = \left[\frac{e^2}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{-x}}{x^2 - 4} &= \left[\frac{e^{-2}}{0^-} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{-x}}{x^2 - 4} = \left[\frac{e^{-2}}{0^+} \right] = +\infty \end{aligned}$$

Il primo limite è una conseguenza del confronto fra infiniti, il secondo non è una forma indeterminata e tutti gli altri sono del tipo $\left[\frac{\text{numero}}{0^\pm} \right]$. Abbiamo quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per x che tende a più infinito e due asintoti verticali di equazioni $x = -2, x = 2$.

Derivata Prima Si tratta di una funzione derivabile dove è definita in quanto ottenuta per composizione, somma e quoziente di funzioni elementari derivabili. La derivata prima è

$$D[g](x) = -\frac{e^{-x}(x^2 - 4 + 2x)}{(x^2 - 4)^2}$$

Poiché il denominatore e l'esponentiale sono sempre positivi ci limitiamo a studiare il segno e gli zeri di $-(x^2 - 4 + 2x)$. Si tratta di un polinomio di secondo grado che si annulla per

$$x = -1 - \sqrt{5} \approx -1 - 2 = -3, \quad x = -1 + \sqrt{5} \approx -1 + 2 = 1.$$

La derivata prima è dunque positiva negli intervalli $(-1 - \sqrt{5}, -2)$, $(-2, -1 + \sqrt{5})$ dove la funzione g risulta quindi crescente, ed è negativa altrimenti, cioè in $(-\infty, -1 - \sqrt{5})$, $(-1 + \sqrt{5}, 2)$ e $(2, +\infty)$ dove la funzione g risulta quindi decrescente.

Estremi relativi Abbiamo individuato quindi due estremi locali

$$x = -1 - \sqrt{5}, \text{ punto di minimo locale e, } x = -1 + \sqrt{5}, \text{ punto di massimo locale}$$

Derivata seconda Il calcolo della derivata seconda non era richiesto ma se volete provare a calcolarla il calcolo risulta leggermente più complicato e si ottiene

$$D^2[g](x) = \frac{e^{-x}(x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 16x + 24)}{(x^2 - 4)^3}$$

Il calcolo dei punti di flesso è da escludere.

Grafico Mettendo insieme tutte le informazioni che abbiamo ottenuto, il grafico della funzione g è in Fig. 1. Per ottenere il grafico della funzione f dobbiamo soltanto ribaltare la

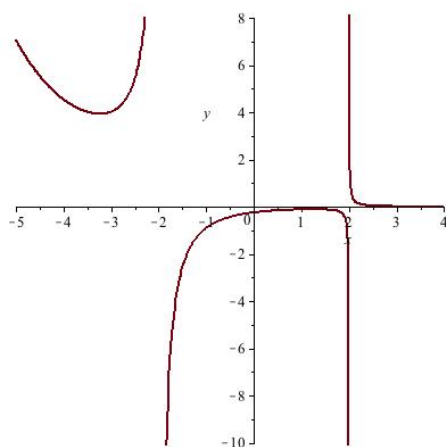


Figure 1: Grafico di $g(x)$

parte sotto l'asse delle x ottenendo il grafico in Figura 2

Soluzione esercizio 3.

a) Vedi libro di testo.

b) La funzione $f(x) = x^5 + 3x - 1$ è continua nell'intervallo $[0, 1]$ ed agli estremi assume valori di segno opposto, poiché $f(0) \cdot f(1) = -1 \cdot 3 = -3$. Sono verificate quindi le ipotesi del Teorema degli zeri che ci garantisce l'esistenza di almeno una soluzione per l'equazione $f(x) = 0$ in $[0, 1]$.

c) L'intervallo di incertezza iniziale ha lunghezza $1 - 0 = 1$, cerchiamo n tale che

$$\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{100} :$$

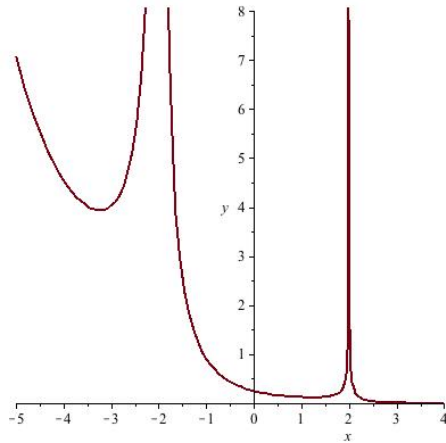


Figure 2: Grafico di $f(x)$

la disuguaglianza è soddisfatta per $n = 6$ ($2^7 = 128$), dunque sono necessarie 6 iterazioni per far sì che l'errore di approssimazione sia inferiore a $1/100$.

d) Calcoliamo $f(\frac{1}{2}) = \frac{17}{32} > 0$: il nuovo intervallo di incertezza ai cui estremi la funzione cambia di segno è quindi

$$\left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Soluzione esercizio 4. Affinché la funzione sia continua deve essere

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

che nel nostro caso vuol dire

$$2 = 2 = a - b$$

mentre per la derivabilità dobbiamo considerare i due rapporti incrementali destro e sinistro o le due derivate destra e sinistra

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ D[x^2 + 3x - 2]_{|x=1} &= D[ax - b]_{|x=1} \\ 5 &= a. \end{aligned}$$

In conclusione la funzione è continua e derivabile per $a = 5$, $b = 3$.

Soluzione esercizio 5. a) La funzione profitto è data da

$$f(p) := p d(p) = 3p + 10 - p^2,$$

dobbiamo determinare

$$\max_{p \in (0, 3]} 3p + 10 - p^2.$$

Non è possibile stabilire a priori se il problema ammetta soluzione o meno: il teorema di Weierstrass in questo caso non è applicabile.

b) Si tratta di studiare una parabola con la concavità rivolta verso il basso, che ha il suo massimo globale nel punto p tale che

$$D[f](p) = -2p + 3 = 0$$

ovvero in $p = \frac{3}{2}$, dove la funzione vale $f(\frac{3}{2}) = \frac{49}{4}$. Poiché

$$0 < \frac{3}{2} < 3,$$

$p = 3/2$ è in effetti il punto di massimo globale della funzione su $(0, +\infty)$. Poiché per $x > \frac{3}{2}$ la funzione è decrescente, la cancellazione della legge che impone la limitazione superiore $p \leq 3$ non fa crescere il massimo profitto dell'impresa.

Soluzione esercizio 6.

a) F si dice derivabile in x_0 se esiste ed è finito il

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - 3(x_0 + h) - x_0^2 + 3x_0}{h}.$$

Per dimostrare quanto richiesto dobbiamo calcolare il limite appena scritto: abbiamo

$$\frac{(x_0 + h)^2 - 3(x_0 + h) - x_0^2 + 3x_0}{h} = \frac{2x_0h + h^2 - 3h}{h} = 2x_0 - 3 + h \rightarrow 2x_0 - 3.$$

b)

$$\begin{aligned} D[f(x)^2] &= 2f(x) D[f](x) \\ D[\cos(2f(x))] &= -2 \sin(2f(x)) D[f](x) \\ D[\log(\sin(2x^2))] &= \frac{4x \cos(2x^2)}{\sin(2x^2)} \end{aligned}$$

Matematica per le Applicazioni Economiche I
FILA A 9 dicembre 2014

Nome, Cognome _____

Matricola _____

1. **(8 punti)** Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x) = \begin{cases} -2 + \frac{1}{3}x & \text{se } x \leq 1 \\ 2^x & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Si disegni il grafico di f e si determinino l'immagine di f , l'estremo superiore di f , e l'estremo inferiore di f . Si dica se f è continua in $\mathbb{R}$. Si dica se f è invertibile, e nel caso che si ritenga f invertibile, si calcoli $f^{-1}(8)$.

2. **(5 punti)** Data la funzione $g(x) = x^3$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si consideri la funzione composta $h(x) = g(f(x))$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, in cui f è la funzione dell'esercizio 1.

Si calcolino $h(0)$, $h(2)$, e si dica se esiste un $x_0 \in (0, 2)$ tale che $h(x_0) = 0$. Si calcoli $h'(2)$.

3. **(6 punti)** Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\sin x} - 1}{x} + \frac{x^2}{\ln(1 + 3x^2)} \right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + x - e^x - x^3}{x^2 - 7x}$$

4. **(8 punti)** (a) Si enunci e si dimostri il teorema di Lagrange.

(b) Data la funzione $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, e dati x_1 e x_2 in $(0, +\infty)$ tali che $x_1 < x_2$, si applichi il teorema di Lagrange a f relativamente all'intervallo $[x_1, x_2]$, e si dimostri che $\ln x_2 - \ln x_1 > \frac{1}{x_2}(x_2 - x_1)$.

5. **(7 punti)** Si studi la funzione.

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

6. **(6 punti)** Si consideri un'impresa che produce un solo bene; l'impresa deve decidere la quantità, $x \geq 0$, di bene da produrre e mettere in vendita. Il prezzo di vendita unitario del bene è 9, e dunque produrre la quantità x genera un ricavo pari a $9x$. Per produrre la quantità x , l'impresa sostiene un costo pari a $5x + \frac{1}{27}x^3$, e quindi il profitto dell'impresa dal produrre la quantità x è

$$\pi(x) = 9x - \left(5x + \frac{1}{27}x^3 \right)$$

L'obiettivo dell'impresa è individuare un punto di massimo globale per la funzione π , che è definita nell'intervallo $[0, +\infty)$.

(a) Si determini un punto di massimo globale per la funzione π .

(b) Si determini il punto di massimo globale per la funzione di profitto nel caso che il costo sostenuto dall'impresa per produrre la quantità x non sia $5x + \frac{1}{27}x^3$, ma $10x + \frac{1}{27}x^3$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I
FILA B 9 dicembre 2014

Nome, Cognome _____

Matricola _____

1. **(8 punti)** Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \frac{1}{2}x & \text{se } x \leq 1 \\ 3^x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Si disegni il grafico di f e si determinino l'immagine di f , l'estremo superiore di f , e l'estremo inferiore di f . Si dica se f e' continua in $\mathbb{R}$. Si dica se f e' invertibile, e nel caso che si ritenga f invertibile, si calcoli $f^{-1}(9)$.

2. **(5 punti)** Data la funzione $g(x) = x^3$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si consideri la funzione composta $h(x) = g(f(x))$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, in cui f e' la funzione dell'esercizio 1.

Si calcolino $h(0)$, $h(2)$, e si dica se esiste un $x_0 \in (0, 2)$ tale che $h(x_0) = 0$. Si calcoli $h'(2)$.

3. **(6 punti)** Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + 3 \sin x)}{x} + \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - \ln x}{2x^4 + e^x - x^{10}}$$

4. **(8 punti)** (a) Si enunci e si dimostri il teorema di Lagrange.

(b) Data la funzione $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, e dati x_1 e x_2 in $(0, +\infty)$ tali che $x_1 < x_2$, si applichi il teorema di Lagrange a f relativamente all'intervallo $[x_1, x_2]$, e si dimostri che $\ln x_2 - \ln x_1 < \frac{1}{x_1}(x_2 - x_1)$.

5. **(7 punti)** Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

6. **(6 punti)** Si consideri un'impresa che produce un solo bene; l'impresa deve decidere la quantita', $x \geq 0$, di bene da produrre e mettere in vendita. Il prezzo di vendita unitario del bene e' 6, e dunque produrre la quantita' x genera un ricavo pari a $6x$. Per produrre la quantita' x , l'impresa sostiene un costo pari a $2x + \frac{1}{27}x^3$, e quindi il profitto dell'impresa dal produrre la quantita' x e'

$$\pi(x) = 6x - \left(2x + \frac{1}{27}x^3 \right)$$

L'obiettivo dell'impresa e' individuare un punto di massimo globale per la funzione π , che e' definita nell'intervallo $[0, +\infty)$.

(a) Si determini un punto di massimo globale per la funzione π .

(b) Si determini il punto di massimo globale per la funzione di profitto nel caso che il costo sostenuto dall'impresa per produrre la quantita' x non sia $2x + \frac{1}{27}x^3$, ma $7x + \frac{1}{27}x^3$.