Matematica per le Applicazioni Economiche I

FILA A

Motivate con cura le vostre risposte.

ESERCIZIO 1. (9 punti)
1) Dare la definizione di $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$, con $c, \ell \in \mathbb{R}$.
2) Enunciare e dimostrare il teorema di unicità del limite.
3) Calcolare $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3}$ e, usando la definizione data in 1), dimostrare la validità del risultato ottenuto.

ESERCIZIO 2. (5 punti) Sia

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+1, & \text{se } x \leq 1 \\ -\frac{1}{x}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

1) Determinare il campo di esistenza (o insieme di definizione) D di f e disegnare il grafico (immediato) di f.
2) Dire se f è continua su D.
3) Enunciare il teorema che lega le proprietà di derivabilità e di continuità di una funzione in un punto x_0 nel suo campo di esistenza, e dire se f è derivabile in D.

ESERCIZIO 3. (7 punti) Sia $f(x) = \frac{3x+6}{x-1}$.
1) Determinare il campo di esistenza D e, studiando solo i limiti di f agli estremi di D ed il segno della derivata prima, disegnare il grafico di f.
2) Utilizzando il grafico, determinare l'immagine I di f.
3) Dire se $f: D \to I$ è invertibile ed in caso positivo fornire l'espressione della funzione inversa.

ESERCIZIO 4. (5 punti) Sia data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{b}{12}x^4 - \frac{5}{6}bx^3 + 3bx^2 + 7x + 8,$$

con $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si studino gli intervalli di concavità di f per tutti i valori di $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ESERCIZIO 5. (7 punti) Siano date le seguenti funzioni derivabili $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tali che $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x) \in (0,1), \;\; f_1'(x) > 0,$$

$$f_2(x) > 0, \;\; f_2'(x) > 0,$$

$$f_3(x) > 0, \;\; f_3'(x) > 0.$$

e le funzioni $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite da

$$g_1(x) = f_1\left(x^3 + f_2(x)\right),$$

$$g_2(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x),$$

$$g_3(x) = \frac{\log\left(f_1(x)\right)}{f_3(x)}$$

1) Si dica se le funzioni g_1, g_2, g_3 sono derivabili;
2) Si dica se le funzioni g_1, g_2, g_3 sono crescenti.

ESERCIZIO 6. (7 punti) Una catena di alberghi vende uno stesso pasto a prezzi diversi in due diversi mercati. Siano p_1, e p_2 i prezzi e le quantità relativi ai mercati 1 e 2, rispettivamente. Una legge impone che il prezzo sia minore o uguale a 4. In ciascun mercato, le funzione di domanda, che associano a ciascun prezzo la quantità domandata, sono

$$d_1 : [0,4] \to \mathbb{R}, \quad d_1(p_1) = 8 - 2p_1$$

e

$$d_2 : [0,4] \to \mathbb{R}, \quad d_2(p_2) = 6 - p_2.$$

La funzione di costo totale della produzione di una quantità q di pasti è la stessa in entrambi i mercati ed è la seguente:

$$c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad c(q) = 1, \text{ per ogni } q \in \mathbb{R}_+.$$

Dunque la funzione di profitto totale nel mercato 1 è

$$\pi_1 : [0,4] \to \mathbb{R}, \quad \pi_1(p_1) = p_1 \cdot d_1(p) - 1,$$

e, analogamente, la funzione di profitto totale nel mercato 2 è

$$\pi_2 : [0,4] \to \mathbb{R}, \quad \pi_2(p_2) = p_2 \cdot d_2(q_2) - 1.$$

1) Si calcolino i prezzi p_1^* e p_2^* che massimizzano il profitto nel mercato 1 e nel mercato 2, rispettivamente.

Si supponga ora che l'autorità locale di politica economica discuta una nuova normativa secondo la quale la catena di alberghi è costretta a vendere il pasto allo stesso prezzo p sui due mercati. Sia $p \in [0,4]$ descritto dalla seguente funzione di domanda globale sui due mercati:

$$d : [0,4] \to \mathbb{R}, \quad d(p) = 14 - 3p.$$

In tal caso il profitto da massimizzare è il seguente:

$$\pi : [0,4] \to \mathbb{R}, \quad \pi(p) = p \cdot d(p) - 2.$$

2) Si dica se, coerentemente con l'obbiettivo di massimizzare il profitto, i responsabili della catena di alberghi sono favorevoli alla nuova normativa.

Soluzioni

ESERCIZIO 1.
1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che per ogni $x \in D(f)$ con $x \neq c$ e $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.
2) Vedi libro di testo.
3)
$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = \lim_{x \to -3} (x - 3) = -6.$$

Dato un generico $\varepsilon > 0$, vogliamo poter trovare un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \neq -3$ per cui $0 < |x + 3| < \delta$ si abbia $\left| \frac{x^2-9}{x+3} + 6 \right| < \varepsilon$. Ma
$$\left| \frac{x^2 - 9}{x + 3} + 6 \right| = |(x - 3) + 6| = |x + 3|.$$
E' dunque sufficiente prendere $\delta = \varepsilon$.

ESERCIZIO 2
2) Il campo di esistenza è $\mathbb{R}$. La funzione non è continua in 1:
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(x^2 - 1\right) = 0$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} -\frac{1}{x} = -1$$
3) Se f è derivabile in x_0 interno al suo $D(f)$ allora f è anche continua in x_0.
La funzione proposta non è continua e dunque non è derivabile.

ESERCIZIO 3.
1) $D = \{x \neq 1\}$.
2) $I = \mathbb{R} - \{3\}$.
3) Dato $y \in \mathbb{R}$, $\frac{3x+6}{x-1} = y$ sse $3x + 6 = y(x - 1)$ sse $x(3 - y) = -y - 6$. Per $y = 3$ non esiste soluzione, per $y \neq 3$ si ha $x = \frac{y+6}{y-3} = f^{-1}(y)$.
Quindi $\forall\ y \in I,\ f^{-1}(y)$ ha un solo elemento, allora $f : D \to I$ è iniettiva, quindi invertibile, e la sua funzione inversa è la $f^{-1} : I \to D$ definita da $f^{-1}(x) = \frac{x+6}{x-3}$.

ESERCIZIO 4.
$f(x) = \frac{b}{12}x^4 - \frac{5}{6}bx^3 + 3bx^2 + 7x + 8$;
$f'(x) = \frac{1}{3}bx^3 - \frac{5}{2}bx^2 + 6bx + 7$;
$f''(x) = bx^2 - 5bx + 6b = b(x - 2)(x - 3)$.

Caso 1. Se $b > 0$ si ha $f'' > 0$, ed f convessa, per valori esterni a $[2, 3]$, invece $f'' < 0$, e dunque f concava, per valori interni.

Caso 2. Se $b < 0$ si ha $f'' > 0$, ed f convessa, per valori interni a $[2, 3]$, invece $f'' < 0$, e dunque f concava, per valori esterni.

ESERCIZIO 5.
1) $x^3 + f_2$ è somma di funzioni derivabili su $\mathbb{R}$, è dunque derivabile su $\mathbb{R}$. g_1 è composizione delle due funzioni derivabili f_1 ed $x^3 + f_2$, è dunque anch'essa derivabile su $\mathbb{R}$.
g_2 è prodotto di funzioni derivabili, è dunque derivabile.
$\log(x)$ e f_1 sono derivabili, e per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f_1(x) > 0$, dunque $f_1(x) \in D(\log)$, ossia la composizione $\log(f_1)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, perciò la composizione $\log(f_1)$, di una funzione derivabile sul suo dominio con una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$, è derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre g_3 è quoziente di funzioni derivabili con denominatore sempre diverso da 0, perciò anche g_3 è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

2) $g_1'(x) = f_1'\left(x^3 + f_2(x)\right) \cdot \left(3x^2 + f_1'(x)\right) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque g_1 è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

$g_2'(x) = (f_1(x) \cdot f_2(x))' \cdot f_3(x) + f_1(x) \cdot (f_2(x) \cdot f_3(x))' = f_1'(x) f_2(x) f_3(x) + f_1(x) f_2'(x) f_3 + f_1(x) f_2(x) f_3'(x)$
> 0 per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque g_2 è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

$g_3'(x) = \frac{\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} \cdot f_3(x) - f_3'(x)\log(f_1(x))}{(f_3(x))^2}$: poiché f_1 assume solo valori in $(0,1)$ si ha $\log(f_1(x)) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque $g_3'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e allora anche g_3 è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 6.

Il profitto nel mercato 1 è dato da:

$$\pi_1(p_1) = (8 - 2p_1)\, p_1 - 1 = -2p_1^2 + 8p_1 - 1.$$

Poiché

$$\pi'(p_1) = -4p_1 + 8$$

e

$$\pi''(p_1) = -4 < 0,$$

si ha $p_1^* = \frac{8}{4} = 2$. Dunque il profitto ottimo nel mercato 1 è dato da

$$\pi_1(p_1^*) = (8 - 2p_1^*)\, p_1^* - 1 = (8 - 2 \cdot 2) \cdot 2 - 1 = 7.$$

Il profitto nel mercato 2 è dato da

$$\pi_2(p_2) = (6 - p_2)\, p_2 - 1 = -p_2^2 + 6p_2 - 1 :$$
$$\pi'(p_2) = -2p_2 + 6,$$
$$\pi''(q_1) = -2 < 0,$$

e dunque $p_2^* = \frac{6}{2} = 3$ ed il profitto ottimo nel mercato 2 è

$$\pi_2(p_2^*) = (6 - p_2^*)\, p_2^* - 1 = (6 - 3)\, 3 - 1 = 8$$

Nel caso di un unico prezzo, il profitto è

$$\pi(p) = p\,(14 - 3p) - 2 = -3p^2 + 14p - 2 :$$

$$\pi'(p) = -6p + 14,$$
$$\pi''(q) = -3 < 0,$$

e dunque $p^* = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$ e

$$\pi(p^*) = p^*(14 - 3p^*) - 2 = \frac{7}{3}\left(14 - 3\frac{7}{3}\right) - 2 = \frac{7}{3}(14 - 7) - 2 = \frac{49}{3} - 2 = \frac{43}{3} < 15.$$

Il profitto totale massimo con prezzi diversi nei due mercati (discriminazione di prezzo) è $7 + 8 = 15$, mentre nel caso di un unico prezzo, il profitto totale massimo è inferiore. Dunque i responsabili dell'impresa non sono favorevoli alla nuova legge.

Matematica per le Applicazioni Economiche I
FILA B

Motivate con cura le vostre risposte.

ESERCIZIO 1. (5 punti) Sia $f(x) = \frac{3x+6}{x-2}$.
1) Determinare il campo di esistenza D e disegnare il grafico di f.
2) Utilizzando il grafico, determinare l'immagine I di f.
3) Dire se $f : D \to I$ è invertibile ed in caso positivo fornire l'espressione della funzione inversa.

ESERCIZIO 2. (6 punti) Sia data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{a}{12}x^4 - \frac{5}{6}ax^3 + 3ax^2 + 5x + 9,$$

con $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si studino gli intervalli di concavità di f per tutti i valori di $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ESERCIZIO 3. (9 punti)
1) Dare la definizione di $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$, con $c, \ell \in \mathbb{R}$.
2) Enunciare e dimostrare il teorema di unicità del limite.
3) Calcolare $\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x+2}$ e, usando la definizione data in 1), dimostrare la validità del risultato ottenuto.

ESERCIZIO 4. (7 punti) Siano date le seguenti funzioni derivabili $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tali che $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x) \in (0,1), \; f_1'(x) > 0,$$

$$f_2(x) > 0, \; f_2'(x) > 0,$$

$$f_3(x) > 0, \; f_3'(x) > 0.$$

e le funzioni $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite da

$$g_1(x) = f_1\left(x^5 + f_3(x)\right),$$

$$g_2(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x),$$

$$g_3(x) = \frac{\log\left(f_1(x)\right)}{f_1(x)}$$

1) Si dica se le funzioni g_1, g_2, g_3 sono derivabili;
2) Si dica se le funzioni g_1, g_2, g_3 sono crescenti.

ESERCIZIO 5. (8 punti) Una catena di alberghi vende uno stesso pasto a prezzi diversi in due diversi mercati. Siano p_1, e p_2 i prezzi relativi ai mercati 1 e 2, rispettivamente. Una legge impone che il prezzo sia minore o uguale a 4. In ciascun mercato, le funzioni di domanda, che associano a ciascun prezzo la quantità domandata, sono

$$d_1 : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad d_1(p_1) = 8 - 2p_1$$

e

$$d_2 : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad d_2(p_2) = 4 - 2p_2.$$

La funzione di costo totale è la stessa in entrambi i mercati ed è la seguente:

$$c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad c(q) = 1, \text{ per ogni } q \in \mathbb{R}_+.$$

Dunque la funzione di profitto totale nel mercato 1 è

$$\pi_1 : [0,4] \to \mathbb{R}, \quad \pi_1(p_1) = p_1 \cdot d_1(p_1) - 1,$$

e, analogamente, la funzione di profitto totale nel mercato 2 è

$$\pi_2 : [0,4] \to \mathbb{R}, \quad \pi_2(p_2) = p_2 \cdot d_2(p_2) - 1.$$

1) Si calcolino i prezzi p_1^* e p_2^* che massimizzano il profitto nel mercato 1 e nel mercato 2, rispettivamente.

Si supponga ora che l'autorità locale di politica economica discuta una nuova normativa secondo la quale la catena di alberghi è costretta a vendere il pasto allo stesso prezzo p sui due mercati. Sia $p \in [0,2]$ descritto dalla seguente funzione di domanda globale sui due mercati:

$$d : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad d(p) = 12 - 4p.$$

In tal caso il profitto da massimizzare è il seguente:

$$\pi : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad \pi(p) = p \cdot d(p) - 2.$$

2) Si dica se, coerentemente con l'obbiettivo di massimizzare il profitto, i responsabili della catena di alberghi sono favorevoli alla nuova normativa.

ESERCIZIO 6. (5 punti) Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

1) Determinare il campo di esistenza (o insieme di definizione) D di f e disegnare il grafico di f.
2) Dire se f è continua su D.
3) Enunciare il teorema che lega le proprietà di derivabilità e di continuità di una funzione in un punto x_0 nel suo campo di esistenza, e dire se f è derivabile in D.

Soluzioni

ESERCIZIO 1.

1) $D = \{x \neq 2\}$. La funzione è un'iperbole con asintoto verticale $x = 2$ e asintoto orizzontale $y = 3$. Poichè $f(3) = 15 > 0$, il grafico della funzione è il seguente:
2) $I = \mathbb{R} \backslash \{3\}$.
3) Dato $y \in \mathbb{R}$, si ha $\frac{3x+6}{x-2} = y$ sse $3x + 6 = y(x-2)$ sse $x(3-y) = -2y - 6$. Per $y = 3$ non esiste soluzione, per $y \neq 3$ si ha $x = \frac{2(y+3)}{y-3}$. Quindi $\forall\ y \in I,\ f^{-1}(y)$ ha un solo elemento, allora $f : D \to I$ è iniettiva, quindi invertibile, e la sua funzione inversa è la $f^{-1} : I \to D$ definita da $f^{-1}(x) = \frac{2(x+3)}{x-3}$.

ESERCIZIO 2.

$f(x) = \frac{a}{12}x^4 - \frac{5}{6}ax^3 + 3ax^2 + 5x + 9;$
$f\,('x) = \frac{1}{3}ax^3 - \frac{5}{2}ax^2 + 6ax + 5;$
$f''(x) = ax^2 - 5ax + 6a = a(x-2)(x-3)\,.$

Caso 1. Se $a > 0$ si ha $f'' > 0$, ed f convessa, per valori esterni a $[2, 3]$, invece $f'' < 0$, e dunque f concava, per valori interni.

Caso 2. Se $a < 0$ si ha $f'' > 0$, ed f convessa, per valori interni a $[2, 3]$, invece $f'' < 0$, e dunque f concava, per valori esterni.

ESERCIZIO 3.

1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che per ogni $x \in D(f)$ con $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.
2) Vedi libro di testo.
3)

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim_{x \to -2} (x - 2) = -4.$$

Dato un generico $\varepsilon > 0$, vogliamo trovare un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \neq -2$ per cui $0 < |x + 2| < \delta$ si abbia $\left| \frac{x^2-4}{x+2} + 4 \right| < \varepsilon$. Ma

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x + 2} + 4 \right| = |(x - 2) + 4| = |x + 2|.$$

E' dunque sufficiente prendere $\delta = \varepsilon$.

ESERCIZIO 4.

1) $x^5 + f_3$ è somma di funzioni derivabili su $\mathbb{R}$, è dunque derivabile su $\mathbb{R}$. g_1 è composizione delle due funzioni derivabili f_1 ed $x^5 + f_3$, è dunque anch'essa derivabile su $\mathbb{R}$.
g_2 è prodotto di funzioni derivabili, è dunque derivabile.
$\log(x)$ e f_1 sono derivabili, e per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f_1(x) > 0$, dunque $f_1(x) \in D(\log)$, ossia la composizione $\log(f_1)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, perciò la composizione $\log(f_1)$, di una funzione derivabile sul suo dominio con una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$, è derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre g_3 è quoziente di funzioni derivabili con denominatore sempre diverso da 0, perciò anche g_3 è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

2)

$$g_1'(x) = \overset{(>0)}{f_1'\left(x^5 + f_3(x)\right)} \cdot \left(5x^4 + \overset{(>0)}{f_3'(x)}\right) > 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque g_1 è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

$$g_2'(x) = (f_1(x) \cdot f_2(x))' \cdot f_3(x) + f_1(x) \cdot (f_2(x) \cdot f_3(x))' = \overset{(>0)}{f_1'(x)}\overset{(>0)}{f_2(x)}\overset{(>0)}{f_3(x)} + \overset{(>0)}{f_1(x)}\overset{(>0)}{f_2'(x)}\overset{(>0)}{f_3(x)} + \overset{(>0)}{f_1(x)}\overset{(>0)}{f_2(x)}\overset{(>0)}{f_3'(x)} > 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque g_2 è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

$$g_3'(x) = \frac{\overset{(>0)}{\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}} \cdot f_1(x) - \overset{(>0)}{f_1'(x)} \cdot \overset{(<0)}{\log(f_1(x))}}{(f_1(x))^2} :$$

poiché f_1 assume solo valori in $(0,1)$ si ha $\log(f_1(x)) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque $g_3'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e allora anche g_3 è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 5.
Profitto nel mercato 1 :

$$\pi_1(p_1) = (8 - 2p_1)\, p_1 - 1 = -2p_1^2 + 8p_1 - 1$$
$$\pi'(p_1) = -4p_1 + 8$$
$$\pi''(p_1) = -4 < 0$$

$p_1^* = \frac{8}{4} = 2$.
Dunque il profitto ottimo nel mercato 1 è

$$\pi_1(p_1^*) = (8 - 2p_1^*)\, p_1^* - 1 = (8 - 2 \cdot 2) \cdot 2 - 1 = 7.$$

Profitto nel mercato 2 :

$$\pi_2(p_2) = (4 - 2p_2)\, p_2 - 1 = -2p_2^2 + 4p_2 - 1$$
$$\pi'(p_2) = -4p_2 + 4$$
$$\pi''(q_1) = -4 < 0$$

$p_2^* = \frac{4}{4} = 1$.
Dunque il profitto ottimo nel mercato 2 è

$$\pi_2(p_2^*) = (4 - 2p_2^*)\, p_2^* - 1 = (4 - 2)\, 1 - 1 = 1.$$

Il profitto totale con prezzi diversi nei due mercati (discriminazione di prezzo) e': $7 + 1 = 8$.
Nel caso di un unico prezzo, il profitto è

$$\pi(p) = p\,(12 - 4p) - 2 = -4p^2 + 12p - 2$$

$$\pi'(p) = -8p + 12$$

$$\pi''(q) = -8 < 0$$

$p^* = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.

$$\pi(p^*) = p^*(12 - 4p^*) - 2 = \frac{3}{2}\left(12 - 4 \cdot \frac{3}{2}\right) - 2 = \frac{3}{2}(12 - 6) - 2 = \frac{3}{2} \cdot 6 - 2 = 7.$$

Dunque i responsabili dell' impresa non sono favorevoli alla nuova legge.

ESERCIZIO 6
1) Il campo di esistenza è $\mathbb{R}$. Il grafico è
2) La funzione non è continua in 1:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(x^2 - 1\right) = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = -1$$

3) Se f è derivabile in x_0 interno a $D(f)$ allora f è anche continua in x_0.
La funzione proposta non è continua e dunque non è derivabile.

Matematica per le Applicazioni Economiche I

FILA C

Motivate con cura le vostre risposte.

ESERCIZIO 1. (7 punti) Siano date le seguenti funzioni derivabili $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tali che $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x) > 0,\ f_1'(x) > 0,$$

$$f_2'(x) < 0,$$

$$f_3(x) > 0,\ f_3'(x) > 0.$$

e le funzioni $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite da

$$g_1(x) = f_2\left(f_1(x) + x^5\right),$$

$$g_2(x) = f_2(x) - f_1(x) \cdot f_3(x),$$

$$g_3(x) = \frac{e^{f_2(x)}}{f_1(x)}$$

1) Si dica se le funzioni g_1, g_2, g_3 sono derivabili;
2) Si dica se le funzioni g_1, g_2, g_3 sono decrescenti.

ESERCIZIO 2. (7 punti) Una catena di alberghi vende uno stesso pasto a prezzi diversi in due diversi mercati. Siano p_1, e p_2 i prezzi e le quantità relativi ai mercati 1 e 2, rispettivamente. Una legge impone che il prezzo sia minore o uguale a 4. In ciascun mercato, le funzione di domanda, che associano a ciascun prezzo la quantità domandata, sono

$$d_1 : [0,5] \to \mathbb{R}, \quad d_1(p_1) = 6 - p_1$$

e

$$d_2 : [0,5] \to \mathbb{R}, \quad d_2(p_2) = 10 - 2p_2.$$

La funzione di costo totale della produzione di una quantità q di pasti è la stessa in entrambi i mercati ed è la seguente:

$$c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad c(q) = 2, \text{ per ogni } q \in \mathbb{R}_+.$$

Dunque la funzione di profitto totale nel mercato 1 è

$$\pi_1 : [0,5] \to \mathbb{R}, \quad \pi_1(p_1) = p_1 \cdot d_1(p) - 2,$$

e, analogamente, la funzione di profitto totale nel mercato 2 è

$$\pi_2 : [0,5] \to \mathbb{R}, \quad \pi_2(p_2) = p_2 \cdot d_2(q_2) - 2.$$

1) Si calcolino i prezzi p_1^* e p_2^* che massimizzano il profitto nel mercato 1 e nel mercato 2, rispettivamente.

Si supponga ora che l'autorità locale di politica economica discuta una nuova normativa secondo la quale la catena di alberghi è costretta a vendere il pasto allo stesso prezzo p sui due mercati. Sia $p \in [0,5]$ descritto dalla seguente funzione di domanda globale sui due mercati:

$$d : [0,5] \to \mathbb{R}, \quad d(p) = 16 - 3p.$$

In tal caso il profitto da massimizzare è il seguente:

$$\pi : [0,5] \to \mathbb{R}, \quad \pi(p) = p \cdot d(p) - 4.$$

2) Si dica se, coerentemente con l'obbiettivo di massimizzare il profitto, i responsabili della catena di alberghi sono favorevoli alla nuova normativa.

ESERCIZIO 3. (5 punti) Sia

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 2, & \text{se } x \leq 1 \\ -(x-2)^2 + 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

1) Determinare il campo di esistenza (o insieme di definizione) D di f e disegnare il grafico (immediato) di f.
2) Dire se f è continua su D.
3) Enunciare il teorema che lega le proprietà di derivabilità e di continuità di una funzione in un punto x_0 nel suo campo di esistenza, e dire se f è derivabile in D.

ESERCIZIO 4. (7 punti) Sia $f(x) = \frac{x-1}{3x+6}$.
1) Determinare il campo di esistenza D e, studiando solo i limiti di f agli estremi di D ed il segno della derivata prima, disegnare il grafico di f.
2) Utilizzando il grafico, determinare l'immagine I di f.
3) Dire se $f : D \to I$ è invertibile ed in caso positivo fornire l'espressione della funzione inversa.

ESERCIZIO 5. (9 punti)
1) Dare la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, con $\ell \in \mathbb{R}$.
2) Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-1}{5x^2+3}$ e, usando la definizione data in 1), dimostrare la validità del risultato ottenuto.
3) Enunciare e dimostrare il teorema di unicità del limite.

ESERCIZIO 6. (5 punti) Sia data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{c}{12}x^4 + \frac{c}{6}x^3 - cx^2 + cx + 6,$$

con $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Si studino gli intervalli di concavità di f per tutti i valori di $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Soluzioni

ESERCIZIO 1.
1) $f_1 + x^5$ è somma di funzioni derivabili su $\mathbb{R}$, è dunque derivabile su $\mathbb{R}$. g_1 è composizione delle due funzioni derivabili f_2 ed $f_1 + x^5$, è dunque anch'essa derivabile su $\mathbb{R}$.
$f_1 f_3$ è prodotto di funzioni derivabili, è dunque derivabile. g_2 è differenza di funzioni derivabili su $\mathbb{R}$ e perciò è derivabile su $\mathbb{R}$.
e^{-x} e f_2 sono derivabili su $\mathbb{R}$, quindi la composizione e^{f_2} è derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre g_3 è quoziente di funzioni derivabili con denominatore sempre diverso da 0, perciò anche g_3 è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

2) $g_1'(x) = f_2'\left(f_1(x) + x^5\right) \cdot \left(f_1'(x) + 5x^4\right) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque g_1 è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$.

$g_2'(x) = f_2'(x) - f_1'(x) f_3(x) - f_1(x) f_3'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque g_2 è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$.

$g_3'(x) = \frac{e^{f_2(x)} f_2'(x) f_1(x) - f_1'(x) e^{f_2(x)}}{f_1^2(x)} < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora anche g_3 è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 2.
1) Abbiamo

$$\pi_1(p_1) = p_1(6 - p_1) - 2 = -p_1^2 + 6p_1 - 2.$$

Il grafico di questa funzione è una parabola con la concavitá rivolta verso il basso, ed il cui vertice ha ascissa $-\frac{3}{-1} = 3$. Poiché $3 \in [0,5]$, $p_1^* = 3$ è il punto di massimo assoluto di π_1 su $[0,5]$.
Analogamente

$$\pi_2(p_2) = p_2(10 - 2p_2) - 2 = -2p_2^2 + 10p_2 - 2,$$

che ha come grafico una parabola con la concavitá rivolta verso il basso, ed il cui vertice ha ascissa $-\frac{5}{-2} = \frac{5}{2}$. Poiché $\frac{5}{2} \in [0,5]$, $p_2^* = \frac{5}{2}$ è il punto di massimo assoluto di π_2 su $[0,5]$.
2) Nel caso di un unico prezzo, abbiamo

$$\pi(p) = p(16 - 3p) - 4 = -3p^2 + 16p - 4$$

che ancora rappresenta una parabola con la concavitá rivolta verso il basso, ed il cui vertice ha ascissa $-\frac{8}{-3} = \frac{8}{3} \in [0,5]$, dunque $p^* = \frac{8}{3}$ è il punto di massimo assoluto di π su $[0,5]$.
Il profitto globale ottimo nel caso di prezzi diversi nei due mercati è dato da

$$\pi_1(p_1^*) + \pi_2(p_2^*) = \frac{35}{2},$$

mentre profitto globale ottimo nel caso di uguale prezzo nei due mercati è dato da

$$\pi(p^*) = \frac{52}{3},$$

ma si ha che $\frac{35}{2} > \frac{52}{3}$ perché $35 \cdot 3 = 105 > 104 = 52 \cdot 2$, quindi il profitto totale massimo con prezzi diversi nei due mercati è superiore, e allora i responsabili dell'impresa non sono favorevoli alla nuova legge.

ESERCIZIO 3
2) Il campo di esistenza è $\mathbb{R}$. La funzione non è continua in 1:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{-x} - 2 = e^{-1} - 2 < 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -(x-2)^2 + 1 = 0.$$

3) Se f è derivabile in x_0 interno al suo $D(f)$ allora f è anche continua in x_0.
La funzione proposta non è continua e dunque non è derivabile.

ESERCIZIO 4
1) $D = \{x : x \neq -2\}$.
2) $I = \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$.
3) Dato $y \in \mathbb{R}$, $\frac{x-1}{3x+6} = y$ sse $x - 1 = y(3x+6)$ sse $x(1-3y) = 6y+1$. Per $y = \frac{1}{3}$ non esiste soluzione, per $y \neq \frac{1}{3}$ si ha $x = \frac{6y+1}{1-3y} = f^{-1}(y)$.
Quindi $\forall\ y \in I,\ f^{-1}(y)$ ha un solo elemento, allora $f : D \to I$ è iniettiva, quindi invertibile, e la sua funzione inversa è la $f^{-1} : I \to D$ definita da $f^{-1}(x) = \frac{6x+1}{1-3x}$.

ESERCIZIO 5
1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in D(f)$ con $x > K \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.
2) Vedi libro di testo.
3)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-1}{5x^2+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{1}{x^2}}{5+\frac{3}{x^2}} = \frac{2}{5}.$$

Dato un generico $\varepsilon > 0$, vogliamo poter trovare un $K \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x > K$ si abbia $\left|\frac{2x^2-1}{5x^2+3} - \frac{2}{5}\right| < \varepsilon$. Risolvendo la disuguaglianza si ottiene

$$\left|\frac{5(2x^2-1) - 2(5x^2+3)}{5(5x^2+3)}\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{-11}{5(5x^2+3)}\right| < \varepsilon, \quad \frac{11}{5(5x^2+3)} < \varepsilon,$$

$$5x^2 + 3 > \frac{11}{5\varepsilon}, \quad x^2 > \frac{1}{5}\left(\frac{11}{5\varepsilon} - 3\right).$$

Se $\frac{11}{5\varepsilon} - 3 < 0$ (ossia ε è grande) la disuguaglianza è verificata da ogni $x \in \mathbb{R}$. Ma se $\frac{11}{5\varepsilon} - 3 > 0$ (ossia ε è piccolo), allora possiamo estrarre la sua radice quadrata e la disuguaglianza è sicuramente verifcata da tutti gli $x > \sqrt{\frac{1}{5}\left(\frac{11}{5\varepsilon} - 3\right)}$, quindi abbiamo trovato un K, $K = \sqrt{\frac{1}{5}\left(\frac{11}{5\varepsilon} - 3\right)}$, per cui la definizione di limite data è verificata.

ESERCIZIO 6
$f(x) = \frac{c}{12}x^4 + \frac{c}{6}x^3 - cx^2 + cx + 6;$
$f'(x) = c\frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2} - 2cx + c;$
$f''(x) = c(x^2 + x - 2) = c(x-1)(x+2)$.

Caso 1. Se $c > 0$ si ha $f'' > 0$, ed f convessa, per valori esterni a $[-2, 1]$, invece $f'' < 0$, e dunque f concava, per valori interni.

Caso 2. Se $c < 0$ si ha $f'' > 0$, ed f convessa, per valori interni a $[-2, 1]$, invece $f'' < 0$, e dunque f concava, per valori esterni.

Matematica per le Applicazioni Economiche I

FILA A 9 febbraio 2015

1. **(6 punti)**

a. Si diano le definizioni di funzione strettamente crescente e di punto di massimo globale per una funzione. Date le funzioni
$$f(x) = x^2 + 3, \qquad g(x) = 1 \ (costante),$$
usando la definizione fornita sopra e dunque senza usare il concetto di derivata, si dica se

b1. f è strettamente crescente su $[0, +\infty)$; **b2.** f ha un punto di massimo globale in 1 per $x \in [0, +\infty)$.

c1. g è strettamente crescente su $\mathbb{R}$; **c2.** g ha un punto di massimo globale in 1 per $x \in \mathbb{R}$.

2. **(6 punti)**

a. Si formuli e si dimostri Teorema di Rolle.

b. Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e tale che esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà: $a < b < c$ e $f(a) = f(b) = f(c) = 1$. Si dimostri cha la derivata seconda di f si annulla in almeno un punto dell'intervallo (a, c).

Suggerimento: si applichi il Teorema di Rolle a f su $[a, b]$ e, anche, a f su $[b, c]$.

3. **(6 punti)**

Si calcolino i seguenti limiti:
$$\textbf{a.} \lim_{x \to 1} \frac{e^{\sqrt{x}} - e}{\ln x}; \qquad \textbf{b.} \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + e^{2x}}{x^3 + \ln(-x)}.$$

4. **(8 punti)**

Sia data la funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e definita come segue
$$f(x) = xe^{-x/2}.$$

a. Si disegni il grafico di f per $x \geq 0$;

b. Si determinino l'immagine, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f.

c. Si dia la definizione di funzioni dispari;

d. Consideriamo ora la funzione g definita su tutto $\mathbb{R}$, che coincide con f per $x \geq 0$ e che risulta essere dispari.

e. Utilizzando i risultati del punto a) si disegni il grafico di g e si determinino l'immagine, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di g.

f. Si dica se g e' continua in $\mathbb{R}$ e se g e' derivabile in $\mathbb{R}$.

5. **(6 punti)**

a. Dato un numero naturale n si scriva la formula di Taylor per una funzione f specificando le proprietà del resto;

b. Siano date la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $g(0) = g'(0) = 1$ e tale che $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$, e la funzione
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \ln(1 + g(x)).$$
Utilizzando la regola di derivata della funzione composta si calcoli la derivata della funzione f e si scriva il polinomio di Taylor di grado 1 per f in $x = 0$.

6. **(8 punti)**

Un individuo coltiva un orto nel quale lavora per x ore al giorno con $x \in [0,8]$. L'individuo ottiene un solo bene dall'orto, la cui quantità è descritta dalla seguente funzione

$$g : [0,8] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 32\sqrt{x}.$$

L'individuo vuole massimizzare la propria utilità $v(x)$ e tale utilità è data dalla quantità del bene meno il quadrato del tempo trascorso al lavoro nell'orto (con specifici coefficienti di proporzionalità), ovvero la funzione di utilità dell'individuo è

$$v : [0,8] \to \mathbb{R}, \qquad v(x) = 32\sqrt{x} - x^2.$$

a. Possiamo affermare che certamente esiste un punto di massimo globale per la funzione di utilità?
b. Calcolare la quantità di lavoro che massimizza la funzione di utilità $v(x)$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I
FILA B 9 febbraio 2015

1. **(6 punti)**

   a. Si diano le definizioni di funzione strettamente decrescente e di punto di minimo globale per una funzione.

   Date le funzioni
   $$f(x) = -x^2 - 3, \qquad g(x) = 1 \ (costante),$$
   usando la definizione fornita sopra e dunque senza usare il concetto di derivata, si dica se

   b1. f è strettamente decrescente su $[0, +\infty)$; **b2.** f ha un punto di minimo globale in 1 per $x \in [0, +\infty)$.

   c1. g è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$; **c2.** g ha un punto di minimo globale in 1 per $x \in \mathbb{R}$.

2. **(6 punti)**

   a. Si formuli e si dimostri Teorema di Rolle.

   b. Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e tale che esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà: $a < b < c$ e $f(a) = f(b) = f(c) = -1$. Si dimostri che la derivata seconda di f si annulla in almeno un punto dell'intervallo (a, c).

   Suggerimento: si applichi il Teorema di Rolle a f su $[a, b]$ e anche a f su $[b, c]$.

3. **(6 punti)**

   Si calcolino i seguenti limiti:
   $$\textbf{a.} \lim_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x)}{1 - x^2}; \qquad \textbf{b.} \lim_{x \to -\infty} \frac{6x^2 + 7\ln(-x)}{2x + e^{-x}}.$$

4. **(8 punti)**

   Sia data la funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e definita come segue
   $$f(x) = -2xe^{x}.$$

   a. Si disegni il grafico di f per $x \geq 0$;

   b. Si determinino l'immagine, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f.

   c. Si dia la definizione di funzioni dispari;

   d. Consideriamo ora la funzione g definita su tutto $\mathbb{R}$, che coincide con f per $x \geq 0$ e che risulta essere dispari.

   e. Utilizzando i risultati del punto a) si disegni il grafico di g e si determinino l'immagine, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di g.

   f. Si dica se g e' continua in $\mathbb{R}$ e se g e' derivabile in $\mathbb{R}$.

5. **(6 punti)**

   a. Dato un numero naturale n si scriva la formula di Taylor per una funzione f specificando le proprietà del resto;

   b. Siano date le funzioni

   $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $g(0) = g'(0) = 2$ e tale che $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$, e

   la funzione
   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \ln(1 + g(x)).$$

   Utilizzando la regola di derivata della funzione composta si calcoli la derivata della funzione f e si scriva il polinomio di Taylor di grado 1 per f in $x = 0$

6. **(8 punti)**

Un individuo coltiva un orto nel quale lavora per x ore al giorno $xin[0,8]$. L'individuo ottiene un solo bene dall'orto, la cui quantità è descritta dalla seguente funzione

$$g : [0, 8] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 64\sqrt{x}.$$

L'individuo vuole massimizzare la propria utilità $v(x)$ e tale utilità è data dalla quantità del bene meno il quadrato del tempo trascorso al lavoro nell'orto (con specifici coefficienti di proporzionalità). Ovvero la funzione di utilità dell'individuo è:

$$v : [0, 8] \to \mathbb{R}, \qquad v(x) = 64\sqrt{x} - 2x^2.$$

a. Possiamo affermare che certamente esiste un punto di massimo globale per la funzione di utilità?
b. Calcolare la quantità di lavoro che massimizza la funzione di utilità $v(x)$..

Matematica per le Applicazioni Economiche I
FILA C — 9 febbraio 2015

1. **(6 punti)**

   a. Si diano le definizioni di funzione strettamente crescente e di punto di massimo globale per una funzione. Date le funzioni
   $$f(x) = x^2, \qquad g(x) = 1 \ (costante),$$
   usando la definizione fornita sopra e dunque senza usare il concetto di derivata, si dica se

   b1. f è strettamente crescente su $[0, +\infty)$; **b2.** f ha un punto di massimo globale in 2 per $x \in [0, +\infty)$.

   c1. g è strettamente crescente su $\mathbb{R}$; **c2.** g ha un punto di massimo globale in 2 per $x \in \mathbb{R}$.

2. **(6 punti)**

   a. Si formuli e si dimostri Teorema di Rolle.

   b. Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e tale che esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà: $a < b < c$ e $f(a) = f(b) = f(c) = 2$. Si dimostri cha la derivata seconda f'' di f si annulla in almeno un punto dell'intervallo (a, c).

   Suggerimento: si applichi il Teorema di Rolle a f su $[a, b]$ e anche a f su $[b, c]$.

3. **(6 punti)**

   Si calcolino i seguenti limiti:
   $$\textbf{a. } \lim_{x \to 4} \frac{8 - \frac{x^2}{2}}{e^{\sqrt{x}} - e^2}; \qquad \textbf{b. } \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + e^{-2x}}{-x^2 + e^x}.$$

4. **(8 punti)**

   Sia data la funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e definita come segue
   $$f(x) = -xe^{\cancel{x}}.$$

   a. Si disegni il grafico di f per $x \geq 0$;

   b. Si determinino l'immagine, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f.

   c. Si dia la definizione di funzioni dispari;

   d. Consideriamo ora la funzione g definita su tutto $\mathbb{R}$, che coincide con f per $x \geq 0$ e che risulta essere dispari.

   e. Utilizzando i risultati del punto a) si disegni il grafico di g e si determinino l'immagine, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di g.

   f. Si dica se g e' continua in $\mathbb{R}$ e se g e' derivabile in $\mathbb{R}$.

5. **(6 punti)**

   a. Dato un numero naturale n si scriva la formula di Taylor per una funzione f specificando le proprietà del resto;

   b. Siano date le funzioni

   $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $g(0) = g'(0) = g''(0) = 1$ e tale che $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$, e

   la funzione
   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \ln(1 + g(x)).$$

   Utilizzando la regola di derivata della funzione composta si calcoli la derivata della funzione f e si scriva il polinomio di Taylor di grado 1 per f in $x = 0$.

6. **(8 punti)**

Un individuo coltiva un orto nel quale lavora per x ore al giorno $xin[0,8]$. L'individuo ottiene un solo bene dall'orto, la cui quantità è descritta dalla seguente funzione

$$g : [0, 8] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 96\sqrt{x}.$$

L'individuo vuole massimizzare la propria utilità $v(x)$ e tale utilità è data dalla quantità del bene meno il quadrato del tempo trascorso al lavoro nell'orto (con specifici coefficienti di proporzionalità). Ovvero la funzione di utilità dell'individuo è:

$$v : [0, 8] \to \mathbb{R}, \qquad v(x) = 96\sqrt{x} - 3x^2.$$

a. Possiamo affermare che certamente esiste un punto di massimo globale per la funzione di utilità?
b. Calcolare la quantità di lavoro che massimizza la funzione di utilità $v(x)$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I
Testo d'esame A, 11 giugno 2015

Cognome:_________________ Nome:______________ Numero di matricola:________

1. **(6 punti)** Si consideri l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{4^x - 4}{x^2 - 5x - 6} \geq 0\}$. Si scriva A come unione finita di intervalli disgiunti, e si determinino (se esistono) $\sup A, \inf A, \max A, \min A$.

2. **(8 punti)** (a) Si enunci il teorema di Lagrange.

   (b) Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(2x)$, e dati a e b in $\mathbb{R}$ tali che $a < b$, si applichi il teorema di Lagrange a f relativamente all'intervallo $[a, b]$, e si dimostri che $|\cos(2b) - \cos(2a)| \leq 2(b - a)$.

3. **(6 punti)** Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} \ln(1 + 2x)}{3x \ln(2 + x)}; \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{5 + x - 2^x - x^5}{x^4 - 7x}$$

4. **(7 punti)** Si studi la funzione (senza studiare il segno della derivata seconda)

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 1}$$

5. **(6 punti)** Date le due funzioni $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln(2 + x)$, per ciascuna delle due seguenti funzioni composte si scriva esplicitamente l'espressione, e poi si determinino il dominio e l'immagine:

$$h_1(x) = f(g(x)), \qquad h_2(x) = g(f(x))$$

6. **(7 punti)** Un'impresa deve fabbricare 16 unità del prodotto che l'impresa stessa mette in vendita. L'impresa dispone di due impianti: l'impianto 1 e l'impianto 2. Con $x_1 \geq 0$ si indica la quantita' di prodotto fabbricata dall'impianto 1, e sia $48\sqrt{x_1}$ il costo per produrre tale quantita'; analogamente sia $x_2 \geq 0$ la quantita' di prodotto fabbricata dall'impianto 2, e sia $5x_2$ il costo per produrre tale quantita'. L'impresa vuole determinare x_1 e x_2, tali che $x_1 + x_2 = 16$ (ovvero $x_2 = 16 - x_1$), in modo da minimizzare il costo totale, $48\sqrt{x_1} + 5x_2$.

   (a) Si scriva il problema di minimizzazione del costo totale in funzione della variabile x_1 e si dica se è possibile affermare immediatamente che tale problema ammette soluzione.

   (b) Si individui il valore di x_1 che minimizza il costo totale e si ricavi (di conseguenza) il valore di x_2.

Matematica per le Applicazioni Economiche I
Soluzioni al Testo d'esame A, 11 giugno 2015

1. Risulta che (i) $4^x - 4 < 0$ per $x < 1$, $4^x - 4 = 0$ per $x = 1$, $4^x - 4 > 0$ per $x > 1$; (ii) $x^2 - 5x - 6 < 0$ per $x \in (-1, 6)$ (cioe' per x interno alle soluzioni dell'equazione di secondo grado), $x^2 - 5x - 6 = 0$ per $x = -1$ e per $x = 6$, $x^2 - 5x - 6 > 0$ per $x < -1$ e per $x > 6$ (cioe' per x esterno alle soluzioni dell'equazione di secondo grado). Quindi $A = (-1, 1] \cup (6, +\infty)$, e $\sup A = +\infty$, $\inf A = -1$, $\max A$ non esiste, $\min A$ non esiste.

2. (a) Si veda il libro di testo

   (b) Applicando il teorema di Lagrange a $f(x) = \cos(2x)$ relativamente all'intervallo $[a, b]$ si conclude che esiste un $c \in (a, b)$ tale che $\cos(2b) - \cos(2a) = -2\sin(2c)(b - a)$, dunque, dato che $b - a > 0$, si ha $|\cos(2b) - \cos(2a)| = |-2\sin(2c)(b - a)| = 2|\sin(2c)|(b - a) \leq 2(b - a)$.

3.

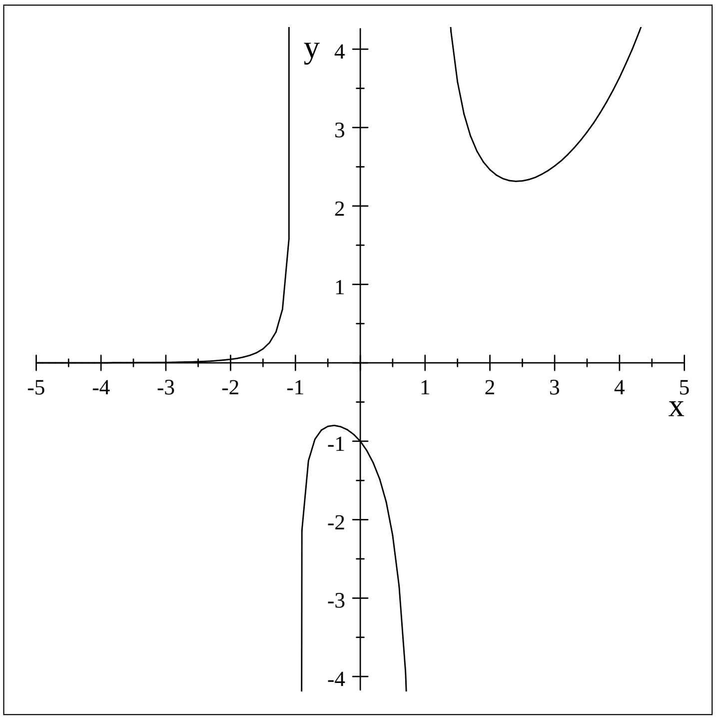
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}\ln(1+2x)}{3x\ln(2+x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{3x} \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}}{\ln(2+x)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\ln 2} \\
\lim_{x\to-\infty} \frac{5 + x - 2^x - x^5}{x^4 - 7x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^5}{x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{1} = +\infty
\end{aligned}$$

4. Il dominio naturale di f e' l'insieme $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1 + \infty)$, e f non e' ne' pari ne' dispari. Per ogni $x \in D$, il segno di $f(x)$ coincide con il segno del denominatore di $f(x)$, dunque $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -1)$, $f(x) < 0$ per $x \in (-1, 1)$, $f(x) > 0$ per $x \in (1, +\infty)$.

   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0^+}{+\infty}$, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$, quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ per confronto tra infiniti.

   $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{e^{-1}}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{e^{-1}}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{e}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{e}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$. Dunque $\lim_{x\to-1} f(x)$ e $\lim_{x\to1} f(x)$ non esistono.

   $f'(x) = \frac{e^x(x^2-1)-2xe^x}{(x^2-1)^2} = \frac{e^x\left(x^2-2x-1\right)}{(x^2-1)^2}$ e, per ogni $x \in D$, il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di x^2-2x-1. Pertanto $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -1)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (-1, -\sqrt{2}+1)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-\sqrt{2}+1, 1)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (1, \sqrt{2}+1)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (\sqrt{2}+1, +\infty)$. Dunque f e' strettamente crescente negli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(-1, -\sqrt{2}+1)$, e' strettamente decrescente negli intervalli $(-\sqrt{2}+1, 1)$ e $(1, \sqrt{2}+1)$, e' strettamente crescente nell'intervallo $(\sqrt{2}+1, +\infty)$. Combinando queste informazioni con quelle ricavate dallo studio del segno di f e dei limiti di f si ottiene il seguente grafico



Per questa funzione, $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$; non esiste alcun punto di max globale ne' di min globale; $x = -\sqrt{2} + 1$ e' punto di max locale, $x = \sqrt{2} + 1$ e' un punto di min locale.

5. Poiche' $h_1(x) = (\ln(2 + x))^2$, si deduce che il dominio di h_1 e' $(-2, +\infty)$, dato che $2 + x > 0$ se e solo se $x > -2$. L'immagine di h_1 si puo' ottenere osservando che l'equazione $(\ln(2 + x))^2 = y$ non ha soluzioni se $y < 0$, e per ogni $y \geq 0$ una soluzione all'equazione e' data da $x = e^{\sqrt{y}} - 2$ (che appartiene al dominio di h_1). Pertanto l'immagine di h_1 e' l'intervallo $(0, +\infty)$.

   Poiche' $h_2(x) = \ln(2 + x^2)$, si deduce che il dominio di h_2 e' $\mathbb{R}$, dato che $2 + x^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. L'immagine di h_2 si puo' ottenere osservando che l'equazione $\ln(2 + x^2) = y$ equivale a $x^2 = e^y - 2$, che possiede almeno una soluzione (in $\mathbb{R}$) se e solo se $e^y - 2 \geq 0$, cioe' se e solo se $y \geq \ln 2$. Pertanto l'immagine di h_2 e' l'intervallo $(\ln 2, +\infty)$.

6. (a) Utilizzando $x_2 = 16 - x_1$, e' possibile scrivere il costo totale come $48\sqrt{x_1} + 5(16 - x_1) = 48\sqrt{x_1} - 5x_1 + 80$. Pertanto dobbiamo minimizzare la funzione $f(x_1) = 48\sqrt{x_1} - 5x_1 + 80$ rispetto a x_1, tenendo conto del fatto che l'insieme dei valori possibili per x_1 e' dato dall'intervallo $[0, 16]$. Un punto di minimo globale per f certamente esiste perche' f e' una funzione continua, e l'intervallo $[0, 16]$ e' chiuso e limitato; dunque e' possibile applicare il teorema di Weierstrass.

   (b) Risulta $f'(x_1) = \frac{24}{\sqrt{x_1}} - 5$, e per ogni $x_1 \in (0, 16]$ si ha che $f'(x_1) > 0$. Questo rivela che f e' monotona strettamente crescente in $[0, 16]$, e quindi $x_1 = 0$ e' (l'unico) punto di minimo globale per f. La minimizzazione del costo totale si raggiunge quindi scegliendo $x_1 = 0$, $x_2 = 16$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I
Testo d'esame B, 11 giugno 2015

Cognome:_________________ Nome:______________ Numero di matricola:________

1. **(6 punti)** Si consideri l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{3^x - 9}{x^2 - 6x + 5} \geq 0\}$. Si scriva A come unione finita di intervalli disgiunti, e si determinino (se esistono) $\sup A, \inf A, \max A, \min A$.

2. **(8 punti)** (a) Si enunci il teorema di Lagrange.

   (b) Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(3x)$, e dati a e b in $\mathbb{R}$ tali che $a < b$, si applichi il teorema di Lagrange a f relativamente all'intervallo $[a, b]$, e si dimostri che $|\cos(3b) - \cos(3a)| \leq 3(b - a)$.

3. **(6 punti)** Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} \ln(1 + 3x)}{4x \ln(3 + x)}; \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2 + 4x - 3^x - x^7}{x^6 - 5x}$$

4. **(7 punti)** Si studi la funzione (senza studiare il segno della derivata seconda)

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 4}$$

5. **(6 punti)** Date le due funzioni $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln(3 + x)$, per ciascuna delle due seguenti funzioni composte si scriva esplicitamente l'espressione, e poi si determinino il dominio e l'immagine:

$$h_1(x) = f(g(x)), \qquad h_2(x) = g(f(x))$$

6. **(7 punti)** Un'impresa deve fabbricare 25 unità del prodotto che l'impresa stessa mette in vendita. L'impresa dispone di due impianti: l'impianto 1 e l'impianto 2. Con $x_1 \geq 0$ si indica la quantita' di prodotto fabbricata dall'impianto 1, e sia $50\sqrt{x_1}$ il costo per produrre tale quantita'; analogamente sia $x_2 \geq 0$ la quantita' di prodotto fabbricata dall'impianto 2, e sia $4x_2$ il costo per produrre tale quantita'. L'impresa vuole determinare x_1 e x_2, tali che $x_1 + x_2 = 25$ (ovvero $x_2 = 25 - x_1$), in modo da minimizzare il costo totale, $50\sqrt{x_1} + 4x_2$.

   (a) Si scriva il problema di minimizzazione del costo totale in funzione della variabile x_1 e si dica se è possibile affermare immediatamente che tale problema ammette soluzione.

   (b) Si individui il valore di x_1 che minimizza il costo totale e si ricavi (di conseguenza) il valore di x_2.

Matematica per le Applicazioni Economiche I
Soluzioni al Testo d'esame B, 11 giugno 2015

1. Risulta che (i) $3^x - 9 < 0$ per $x < 2$, $3^x - 9 = 0$ per $x = 2$, $3^x - 9 > 0$ per $x > 2$; (ii) $x^2 - 6x + 5 < 0$ per $x \in (1, 5)$ (cioe' per x interno alle soluzioni dell'equazione di secondo grado), $x^2 - 6x + 5 = 0$ per $x = 1$ e per $x = 5$, $x^2 - 6x + 5 > 0$ per $x < 1$ e per $x > 5$ (cioe' per x esterno alle soluzioni dell'equazione di secondo grado). Quindi $A = (1, 2] \cup (5, +\infty)$, e $\sup A = +\infty$, $\inf A = 1$, $\max A$ non esiste, $\min A$ non esiste.

2. (a) Si veda il libro di testo

   (b) Applicando il teorema di Lagrange a $f(x) = \cos(3x)$ relativamente all'intervallo $[a, b]$ si conclude che esiste un $c \in (a, b)$ tale che $\cos(3b) - \cos(3a) = -3\sin(3c)(b - a)$, dunque, dato che $b - a > 0$, si ha $|\cos(3b) - \cos(3a)| = |-3\sin(3c)(b - a)| = 3|\sin(3c)|(b - a) \leq 3(b - a)$.

3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}\ln(1 + 3x)}{4x\ln(3 + x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{4x} \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}}{\ln(3 + x)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\ln 3}$$

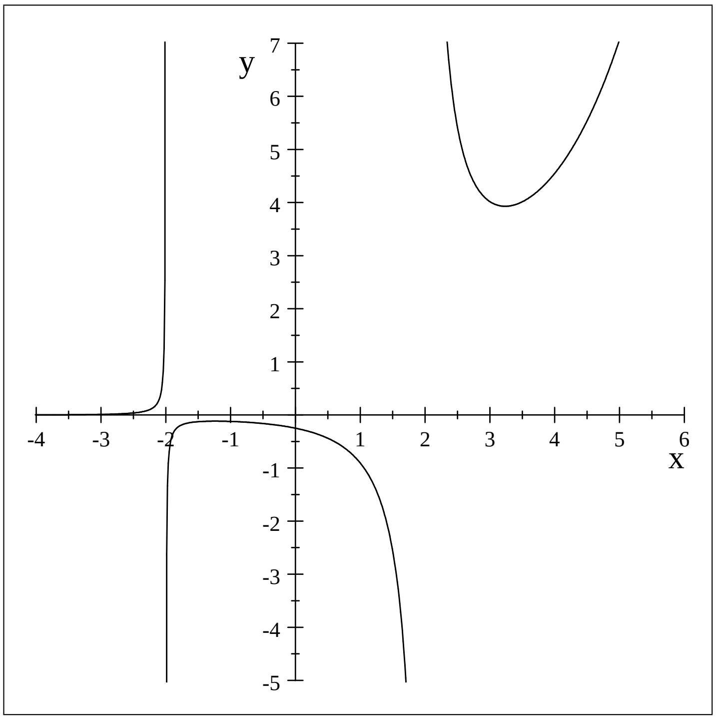
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2 + 4x - 3^x - x^7}{x^6 - 5x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^7}{x^6} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{1} = +\infty$$

4. Il dominio naturale di f e' l'insieme $D = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2 + \infty)$, e f non e' ne' pari ne' dispari. Per ogni $x \in D$, il segno di $f(x)$ coincide con il segno del denominatore di $f(x)$, dunque $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -2)$, $f(x) < 0$ per $x \in (-2, 2)$, $f(x) > 0$ per $x \in (2, +\infty)$.

   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0^+}{+\infty}$, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$, quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ per confronto tra infiniti.

   $\lim_{x\to-2^-} f(x) = \frac{e^{-2}}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-2^+} f(x) = \frac{e^{-2}}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{e^2}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to2^+} f(x) = \frac{e^2}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty$. Dunque $\lim_{x\to-2} f(x)$ e $\lim_{x\to2} f(x)$ non esistono.

   $f'(x) = \frac{e^x(x^2-4)-2xe^x}{(x^2-4)^2} = \frac{e^x\left(x^2-2x-4\right)}{(x^2-4)^2}$ e, per ogni $x \in D$, il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di x^2-2x-4. Pertanto $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -2)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (-2, -\sqrt{5} + 1)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-\sqrt{5} + 1, 2)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (2, \sqrt{5} + 1)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (\sqrt{5} + 1, +\infty)$. Dunque f e' strettamente crescente negli intervalli $(-\infty, -2)$ e $(-2, -\sqrt{5}+1)$, e' strettamente decrescente negli intervalli $(-\sqrt{5}+1, 2)$ e $(2, \sqrt{5}+1)$, e' strettamente crescente nell'intervallo $(\sqrt{5}+1, +\infty)$. Combinando queste informazioni con quelle ricavate dallo studio del segno di f e dei limiti di f si ottiene il seguente grafico



Per questa funzione, $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$; non esiste alcun punto di max globale ne' di min globale; $x = -\sqrt{5} + 1$ e' punto di max locale, $x = \sqrt{5} + 1$ e' un punto di min locale.

5. Poiche' $h_1(x) = (\ln(3 + x))^2$, si deduce che il dominio di h_1 e' $(-3, +\infty)$, dato che $3 + x > 0$ se e solo se $x > -3$. L'immagine di h_1 si puo' ottenere osservando che l'equazione $(\ln(3 + x))^2 = y$ non ha soluzioni se $y < 0$, e per ogni $y \geq 0$ una soluzione all'equazione e' data da $x = e^{\sqrt{y}} - 3$ (che appartiene al dominio di h_1). Pertanto l'immagine di h_1 e' l'intervallo $(0, +\infty)$.

   Poiche' $h_2(x) = \ln(3 + x^2)$, si deduce che il dominio di h_2 e' $\mathbb{R}$, dato che $3 + x^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. L'immagine di h_2 si puo' ottenere osservando che l'equazione $\ln(3 + x^2) = y$ equivale a $x^2 = e^y - 3$, che possiede almeno una soluzione (in $\mathbb{R}$) se e solo se $e^y - 3 \geq 0$, cioe' se e solo se $y \geq \ln 3$. Pertanto l'immagine di h_2 e' l'intervallo $(\ln 3, +\infty)$.

6. (a) Utilizzando $x_2 = 25 - x_1$, e' possibile scrivere il costo totale come $50\sqrt{x_1} + 4(25 - x_1) = 50\sqrt{x_1} - 4x_1 + 100$. Pertanto dobbiamo minimizzare la funzione $f(x_1) = 50\sqrt{x_1} - 4x_1 + 100$ rispetto a x_1, tenendo conto del fatto che l'insieme dei valori possibili per x_1 e' dato dall'intervallo $[0, 25]$. Un punto di minimo globale per f certamente esiste perche' f e' una funzione continua, e l'intervallo $[0, 25]$ e' chiuso e limitato; dunque e' possibile applicare il teorema di Weierstrass.

   (b) Risulta $f'(x_1) = \frac{25}{\sqrt{x_1}} - 4$, e per ogni $x_1 \in (0, 25]$ si ha che $f'(x_1) > 0$. Questo rivela che f e' monotona strettamente crescente in $[0, 25]$, e quindi $x_1 = 0$ e' (l'unico) punto di minimo globale per f. La minimizzazione del costo totale si raggiunge quindi scegliendo $x_1 = 0$, $x_2 = 25$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I

Testo d'esame C, 11 giugno 2015

Cognome:_________________ Nome:______________ Numero di matricola:________

1. **(6 punti)** Si consideri l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{2^x - 8}{x^2 - 5x + 4} \geq 0\}$. Si scriva A come unione finita di intervalli disgiunti, e si determinino (se esistono) $\sup A, \inf A, \max A, \min A$.

2. **(8 punti)** (a) Si enunci il teorema di Lagrange.

   (b) Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(4x)$, e dati a e b in $\mathbb{R}$ tali che $a < b$, si applichi il teorema di Lagrange a f relativamente all'intervallo $[a, b]$, e si dimostri che $|\cos(4b) - \cos(4a)| \leq 4(b - a)$.

3. **(6 punti)** Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x} \ln(1 + 4x)}{5x \ln(4 + x)}; \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{1 + 5x - 4^x - x^9}{x^8 - 2x}$$

4. **(7 punti)** Si studi la funzione (senza studiare il segno della derivata seconda)

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 9}$$

5. **(6 punti)** Date le due funzioni $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln(4 + x)$, per ciascuna delle due seguenti funzioni composte si scriva esplicitamente l'espressione, e poi si determinino il dominio e l'immagine:

$$h_1(x) = f(g(x)), \qquad h_2(x) = g(f(x))$$

6. **(7 punti)** Un'impresa deve fabbricare 36 unità del prodotto che l'impresa stessa mette in vendita. L'impresa dispone di due impianti: l'impianto 1 e l'impianto 2. Con $x_1 \geq 0$ si indica la quantita' di prodotto fabbricata dall'impianto 1, e sia $40\sqrt{x_1}$ il costo per produrre tale quantita'; analogamente sia $x_2 \geq 0$ la quantita' di prodotto fabbricata dall'impianto 2, e sia $3x_2$ il costo per produrre tale quantita'. L'impresa vuole determinare x_1 e x_2, tali che $x_1 + x_2 = 36$ (ovvero $x_2 = 36 - x_1$), in modo da minimizzare il costo totale, $40\sqrt{x_1} + 3x_2$.

   (a) Si scriva il problema di minimizzazione del costo totale in funzione della variabile x_1 e si dica se è possibile affermare immediatamente che tale problema ammette soluzione.

   (b) Si individui il valore di x_1 che minimizza il costo totale e si ricavi (di conseguenza) il valore di x_2

Matematica per le Applicazioni Economiche I
Soluzioni al Testo d'esame C, 11 giugno 2015

1. Risulta che (i) $2^x - 8 < 0$ per $x < 3$, $2^x - 8 = 0$ per $x = 3$, $2^x - 8 > 0$ per $x > 3$; (ii) $x^2 - 5x + 4 < 0$ per $x \in (1, 4)$ (cioe' per x interno alle soluzioni dell'equazione di secondo grado), $x^2 - 5x + 4 = 0$ per $x = 1$ e per $x = 4$, $x^2 - 5x + 4 > 0$ per $x < 1$ e per $x > 4$. (cioe' per x esterno alle soluzioni dell'equazione di secondo grado). Quindi $A = (1, 3] \cup (4, +\infty)$, e $\sup A = +\infty$, $\inf A = 1$, $\max A$ non esiste, $\min A$ non esiste.

2. (a) Si veda il libro di testo

   (b) Applicando il teorema di Lagrange a $f(x) = \cos(4x)$ relativamente all'intervallo $[a, b]$ si conclude che esiste un $c \in (a, b)$ tale che $\cos(4b) - \cos(4a) = -4\sin(4c)(b - a)$, dunque, dato che $b - a > 0$, si ha $|\cos(4b) - \cos(4a)| = | - 4\sin(4c)(b - a)| = 4|\sin(4c)|(b - a) \leq 4(b - a)$.

3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x}\ln(1 + 4x)}{5x\ln(4 + x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 4x)}{5x} \lim_{x\to 0} \frac{e^{4x}}{\ln(4 + x)} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\ln 4}$$

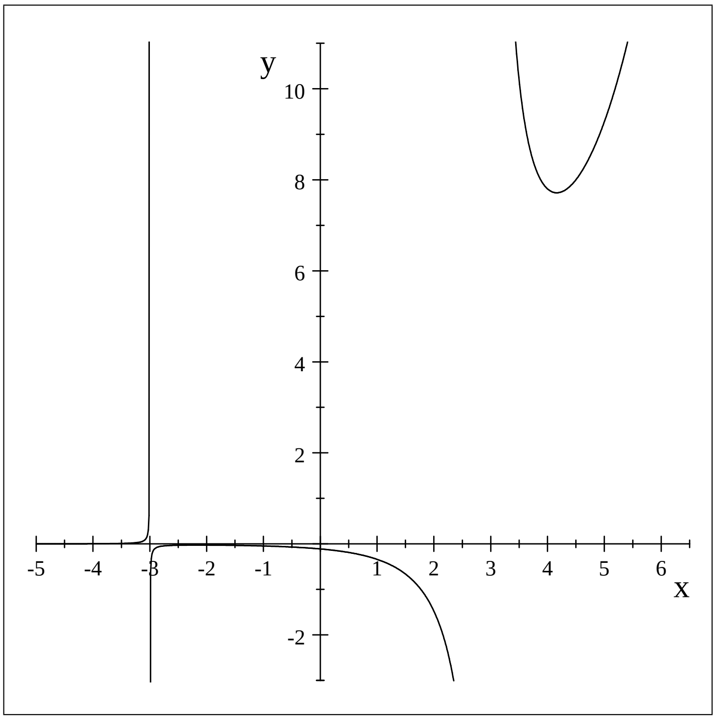
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1 + 5x - 4^x - x^9}{x^8 - 2x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^9}{x^8} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{1} = +\infty$$

4. Il dominio naturale di f e' l'insieme $D = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3 + \infty)$, e f non e' ne' pari ne' dispari. Per ogni $x \in D$, il segno di $f(x)$ coincide con il segno del denominatore di $f(x)$, dunque $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -3)$, $f(x) < 0$ per $x \in (-3, 3)$, $f(x) > 0$ per $x \in (3, +\infty)$.

   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0^+}{+\infty}$, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$, quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ per confronto tra infiniti.

   $\lim_{x\to-3^-} f(x) = \frac{e^{-3}}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to-3^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-3^+} f(x) = \frac{e^{-3}}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to-3^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to3^-} f(x) = \frac{e^3}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to3^+} f(x) = \frac{e^3}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty$. Dunque $\lim_{x\to-3} f(x)$ e $\lim_{x\to3} f(x)$ non esistono.

   $f'(x) = \frac{e^x(x^2-9)-2xe^x}{(x^2-9)^2} = \frac{e^x\left(x^2-2x-9\right)}{(x^2-9)^2}$ e, per ogni $x \in D$, il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di x^2-2x-9. Pertanto $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -3)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (-3, -\sqrt{10}+1)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-\sqrt{10}+1, 3)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (3, \sqrt{10} + 1)$, $f'(x) > 0$ per $x \in (\sqrt{10} + 1, +\infty)$. Dunque f e' strettamente crescente negli intervalli $(-\infty, -3)$ e $(-3, -\sqrt{10} + 1)$, e' strettamente decrescente negli intervalli $(-\sqrt{10} + 1, 3)$ e $(3, \sqrt{10} + 1)$, e' strettamente crescente nell'intervallo $(\sqrt{10} + 1, +\infty)$. Combinando queste informazioni con quelle ricavate dallo studio del segno di f e dei limiti di f si ottiene il seguente grafico



Per questa funzione, $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$; non esiste alcun punto di max globale ne' di min globale; $x = -\sqrt{10} + 1$ e' punto di max locale, $x = \sqrt{10} + 1$ e' un punto di min locale.

5. Poiche' $h_1(x) = (\ln(4 + x))^2$, si deduce che il dominio di h_1 e' $(-4, +\infty)$, dato che $4 + x > 0$ se e solo se $x > -4$. L'immagine di h_1 si puo' ottenere osservando che l'equazione $(\ln(4 + x))^2 = y$ non ha soluzioni se $y < 0$, e per ogni $y \geq 0$ una soluzione all'equazione e' data da $x = e^{\sqrt{y}} - 4$ (che appartiene al dominio di h_1). Pertanto l'immagine di h_1 e' l'intervallo $(0, +\infty)$.

   Poiche' $h_2(x) = \ln(4 + x^2)$, si deduce che il dominio di h_2 e' $\mathbb{R}$, dato che $4 + x^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. L'immagine di h_2 si puo' ottenere osservando che l'equazione $\ln(4 + x^2) = y$ equivale a $x^2 = e^y - 4$, che possiede almeno una soluzione (in $\mathbb{R}$) se e solo se $e^y - 4 \geq 0$, cioe' se e solo se $y \geq \ln 4$. Pertanto l'immagine di h_2 e' l'intervallo $(\ln 4, +\infty)$.

6. (a) Utilizzando $x_2 = 36 - x_1$, e' possibile scrivere il costo totale come $40\sqrt{x_1} + 3(36 - x_1) = 40\sqrt{x_1} - 3x_1 + 108$. Pertanto dobbiamo minimizzare la funzione $f(x_1) = 40\sqrt{x_1} - 3x_1 + 108$ rispetto a x_1, tenendo conto del fatto che l'insieme dei valori possibili per x_1 e' dato dall'intervallo $[0, 36]$. Un punto di minimo globale per f certamente esiste perche' f e' una funzione continua, e l'intervallo $[0, 36]$ e' chiuso e limitato; dunque e' possibile applicare il teorema di Weierstrass.

   (b) Risulta $f'(x_1) = \frac{20}{\sqrt{x_1}} - 3$, e per ogni $x_1 \in (0, 36]$ si ha che $f'(x_1) > 0$. Questo rivela che f e' monotona strettamente crescente in $[0, 36]$, e quindi $x_1 = 0$ e' (l'unico) punto di minimo globale per f. La minimizzazione del costo totale si raggiunge quindi scegliendo $x_1 = 0$, $x_2 = 36$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I

Appello del 13/7/2015 **FILA A**

ESERCIZIO 1. (7 punti) Un'azienda deve decidere quante pagine x_1 e x_2 acquistare su due riviste, per pubblicizzare un nuovo prodotto. Ogni pagina costa $p_1 = 1$ Euro sulla prima rivista, $p_2 = 2$ Euro sulla seconda. L'azienda desidera massimizzare il volume delle vendite

$$x_1 + 10x_2 + x_1x_2,$$

spendendo la sua dotazione di 50 Euro.
1) Determinare la spesa che l'azienda sostiene se compra x_1 pagine sulla prima rivista e x_2 pagine sulla seconda. Imponendo che la spesa debba essere pari a 50 (vincolo di budget), ricavare x_1 in termini di x_2.
2) Imponendo che $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ (vincoli di positività), ricavare l'intervallo in cui x_2 deve variare.
3) Riscrivere il volume delle vendite in funzione della sola variabile x_2 e formulare il problema di massimizzazione di tale funzione, includendo i vincoli di positività espressi solo in termini di x_2.
4) Determinare il punto $\hat{x}_2$ che risolve il problema di massimizzazione espresso in termini di x_2. Determinare poi il valore $\hat{x}_1$ corrispondente, e dire dunque quante pagine è ottimale per l'azienda comprare su ciascuna rivista.

ESERCIZIO 2. (7 punti). Sia data $f(x) = e^x - \log(1 + 2x)$.
1) Si determini il polinomio P_1 di Taylor di f di grado 1 che approssima f intorno al punto $x_0 = 0$. Si descriva la proprietà del resto.
2) Si determini il polinomio P_2 di Taylor di f di grado 2 che approssima f intorno al punto $x_0 = 0$. Si descriva la proprietà del resto.
3) Si dica quale polinomio, tra P_1 e P_2, fornisce una migliore approssimazione dei valori di f, per quali x e perché.

ESERCIZIO 3. (5 punti)
1) Per una funzione f ed un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, dare la definizione di $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$.
2) Sulla base della definizione appena data, verificare che $\lim_{x\to 4^+} \frac{1}{\sqrt{x}-2} = +\infty$.

ESERCIZIO 4. (5 punti)
a. Per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si diano le definizioni di punto di minimo locale (o relativo) e di punto di massimo locale.
b. Data una funzione f che possiede un minimo locale nel punto x_0, si dimostri, **usando la definizione fornita sopra**, che x_0 é un punto di massimo locale per la funzione $g(x) = e^{-3f(x)}$.

ESERCIZIO 5. (6 punti)
Si determinino i valori dei parametri reali a, b che rendono la seguente funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}$, GIUSTIFICANDO:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \leq 0; \\ (a+2)e^{-bx}, & x > 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6. (10 punti)
a. Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x-1},$$

GIUSTIFICANDO I PASSAGGI E LE RISPOSTE, e se ne disegni il grafico; si tralasci lo studio della derivata seconda, ma si verifichi la derivabilitá di f in $x_0 = 0$.
b. Utilizzando il grafico, si determinino l'immagine, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f.

Matematica per le Applicazioni Economiche I

Appello del 13/7/2015 **FILA B**

ESERCIZIO 1. (7 punti) Un'azienda deve decidere quante pagine x_1 e x_2 acquistare su due riviste, per pubblicizzare un nuovo prodotto. Ogni pagina costa $p_1 = 1$ Euro sulla prima rivista, $p_2 = 2$ Euro sulla seconda. L'azienda desidera massimizzare il volume delle vendite

$$x_1 + 22x_2 + x_1 x_2,$$

spendendo la sua dotazione di 50 Euro.
1) Determinare la spesa che l'azienda sostiene se compra x_1 pagine sulla prima rivista e x_2 pagine sulla seconda. Imponendo che la spesa debba essere pari a 50 (vincolo di budget), ricavare x_1 in termini di x_2.
2) Imponendo che $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ (vincoli di positività), ricavare l'intervallo in cui x_2 deve variare.
3) Riscrivere il volume delle vendite in funzione della sola variabile x_2 e formulare il problema di massimizzazione di tale funzione, includendo i vincoli di positività espressi solo in termini di x_2.
4) Determinare il punto $\hat{x}_2$ che risolve il problema di massimizzazione espresso in termini di x_2. Determinare poi il valore $\hat{x}_1$ corrispondente, e dire dunque quante pagine è ottimale per l'azienda comprare su ciascuna rivista.

ESERCIZIO 2. (7 punti) Sia data $f(x) = e^x - \log(1 + 3x)$.
1) Si determini il polinomio P_1 di Taylor di f di grado 1 che approssima f intorno al punto $x_0 = 0$. Si descriva la proprietà del resto.
2) Si determini il polinomio P_2 di Taylor di f di grado 2 che approssima f intorno al punto $x_0 = 0$. Si descriva la proprietà del resto.
3) Si dica quale polinomio, tra P_1 e P_2, fornisce una migliore approssimazione dei valori di f, per quali x e perché.

ESERCIZIO 3. (5 punti)
1) Per una funzione f ed un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, dare la definizione di $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$.
2) Sulla base della definizione appena data, verificare che $\lim_{x \to 9^+} \frac{1}{\sqrt{x}-3} = +\infty$.

ESERCIZIO 4. (5 punti)
a. Per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si diano le definizioni di punto di minimo locale (o relativo) e di punto di massimo locale.
b. Data una funzione f che possiede un minimo locale nel punto x_0, si dimostri, **usando la definizione fornita sopra**, che x_0 é un punto di massimo locale per la funzione $g(x) = e^{-2f(x)}$.

ESERCIZIO 5. (6 punti)
Si determinino i valori dei parametri reali a, b che rendono la seguente funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}$, GIUSTIFICANDO:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - b, & x \leq 0; \\ (a+2)e^{bx}, & x > 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6. (10 punti)
a. Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x+1},$$

GIUSTIFICANDO I PASSAGGI E LE RISPOSTE, e se ne disegni il grafico; si tralasci lo studio della derivata seconda, ma si verifichi la derivabilitá di f in $x_0 = 0$.
b. Utilizzando il grafico, si determinino l'immagine, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f.

Matematica per le Applicazioni Economiche I

Appello del 13/7/2015 **FILA C**

ESERCIZIO 1. (7 punti) Un'azienda deve decidere quante pagine x_1 e x_2 acquistare su due riviste, per pubblicizzare un nuovo prodotto. Ogni pagina costa $p_1 = 1$ Euro sulla prima rivista, $p_2 = 2$ Euro sulla seconda. L'azienda desidera massimizzare il volume delle vendite

$$2x_1 + 42x_2 + 2x_1x_2,$$

spendendo la sua dotazione di 50 Euro.
1) Determinare la spesa che l'azienda sostiene se compra x_1 pagine sulla prima rivista e x_2 pagine sulla seconda. Imponendo che la spesa debba essere pari a 50 (vincolo di budget), ricavare x_1 in termini di x_2.
2) Imponendo che $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ (vincoli di positività), ricavare l'intervallo in cui x_2 deve variare.
3) Riscrivere il volume delle vendite in funzione della sola variabile x_2 e formulare il problema di massimizzazione di tale funzione, includendo i vincoli di positività espressi solo in termini di x_2.
4) Determinare il punto $\hat{x}_2$ che risolve il problema di massimizzazione espresso in termini di x_2. Determinare poi il valore $\hat{x}_1$ corrispondente, e dire dunque quante pagine è ottimale per l'azienda comprare su ciascuna rivista.

ESERCIZIO 2. (7 punti) Sia data $f(x) = e^{2x} - \log(1 + x)$.
1) Si determini il polinomio P_1 di Taylor di f di grado 1 che approssima f intorno al punto $x_0 = 0$. Si descriva la proprietà del resto.
2) Si determini il polinomio P_2 di Taylor di f di grado 2 che approssima f intorno al punto $x_0 = 0$. Si descriva la proprietà del resto.
3) Si dica quale polinomio, tra P_1 e P_2, fornisce una migliore approssimazione dei valori di f, per quali x e perché.

ESERCIZIO 3. (5 punti)
1) Per una funzione f ed un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, dare la definizione di $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$.
2) Sulla base della definizione appena data, verificare che $\lim_{x\to 4^+} \frac{1}{\sqrt{4x-4}} = +\infty$.

ESERCIZIO 4. (5 punti)
a. Per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si diano le definizioni di punto di minimo locale (o relativo) e di punto di massimo locale.
b. Data una funzione f che possiede un minimo locale nel punto x_0, si dimostri, **usando la definizione fornita sopra**, che x_0 é un punto di massimo locale per la funzione $g(x) = e^{-f(x)}$.

ESERCIZIO 5. (6 punti)
Si determinino i valori dei parametri reali a, b che rendono la seguente funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}$, GIUSTIFICANDO:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax - b, & x \leq 0; \\ (2-a)e^{bx}, & x > 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6. (10 punti)
a. Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x-2},$$

GIUSTIFICANDO I PASSAGGI E LE RISPOSTE, e se ne disegni il grafico; si tralasci lo studio della derivata seconda, ma si verifichi la derivabilitá di f in $x_0 = 0$.
b. Utilizzando il grafico, si determinino l'immagine, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f.

SOLUZIONI FILA A

EX1.

1) vincolo di budget: $x_1 + 2x_2 = 50$, quindi $x_1 = 50 - 2x_2$.
2) $x_2 \geq 0$; $x_1 \geq 0 \Rightarrow 50 - 2x_2 \geq 0$, ossia $x_2 \leq 25$. Quindi $x_2 \in [0, 25]$.
3) $V = 50 - 2x_2 + 10x_2 + (50 - 2x_2)x_2 = -2x_2^2 + 58x_2 + 50$.
Si cerca $\max_{x_2 \in [0,25]} -2x_2^2 + 58x_2 + 50$.
Si pone $f(x_2) = -2x_2^2+58x_2+50$, f è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, si studia il segno di f': $f'(x_2) = -4x_2+58$, quindi f' è positiva strettamente per ogni $x_2 < 58/4 = 14.5$, e negativa per $x > 14.5$, quindi il massimo assoluto di f su $[0, 25]$ è raggiunto in $\hat{x}_2 = 14.5$ [1] . Di conseguenza $\hat{x}_1 = 50 - 2\hat{x}_2 = 21$.

EX2.

1) $P_1(x) = f(0) + f'(0)x$: $f(0) = 1$, $f'(x) = e^x - \frac{2}{1+2x}$, quindi $f'(0) = -1$, e $P_1(x) = 1 - x$. Il resto $R_1(x) = f(x) - P_1(x)$ tende a zero più velocemente di x, per $x \to 0$, ossia $R_1(x)$ è più piccolo di x: $\lim_{x\to 0} \frac{R_1(x)}{x} = 0$.
2) $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2}$: $f''(x) = e^x + \frac{4}{(1+2x)^2}$, quindi $f''(0) = 5$ e $P_2(x) = 1 - x + 5\frac{x^2}{2}$. Il resto $R_2(x) = f(x) - P_2(x)$ tende a zero più velocemente di x^2, per $x \to 0$, ossia $R_2(x)$ è più piccolo di x^2: $\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0$.
3) P_2 dà di f una approssimazione migliore rispetto a P_1, perché lo scarto tra f e P_2 è più piccolo di x^2, che, per x in un intorno di zero in cui sia $|x| < 1$, è più piccolo di x, che è il termine di paragone per R_1. In altre parole, per x vixini a zero si ha $x < x^2$, e, mentre $\frac{R_1}{x} \to 0$, non è garantito che sia $\frac{R_1}{x^2} \to 0$, ossia che si abbia $R_1 < x^2$, invece di sicuro $R_2 < x^2$.

EX3.

1) Vale che $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ quando $\forall\, M > 0$ si riesce a trovare un $\delta > 0$ per cui per tutti gli $x \in (x_0, x_0+\delta)$ succede che $f(x) > M$.
2) $\frac{1}{\sqrt{x}-2}$ è definita per $x \geq 0$ e $x \neq 4$. Prendiamo un $M > 0$ e verifichiamo che tra le soluzioni di $\frac{1}{\sqrt{x}-2} > M$ si trovino tutti gli x di un intorno destro (da determinare) $(4, 4 + \delta)$ di 4. Siamo dunque interessati ai soli $x > 4$ Per $x > 4$, in $\frac{1}{\sqrt{x}-2} > M$ entrambi i membri sono positivi, se si passa ai reciproci, allora, il segno di disuguaglianza si inverte: $\frac{1}{\sqrt{x}-2} > M$ sse $\sqrt{x}-2 < \frac{1}{M}$. Quest'ultima disuguaglianza equivale a $\sqrt{x} < \frac{1}{M}+2$: anche in questo caso entrambi i membri sono positivi, perciò se si elevano entrambi al quadrato la disuguaglianza resta nello stesso verso: $\sqrt{x} < \frac{1}{M} + 2$ sse $x < \left(\frac{1}{M} + 2\right)^2 = 4 + \frac{4}{M} + \frac{1}{M^2}$. Le soluzioni $x > 4$ di $\frac{1}{\sqrt{x}-2} > M$ sono le $x \in (4, 4 + \frac{4}{M} + \frac{1}{M^2})$, che è un intorno destro di 4. Ponendo $\delta = \frac{4}{M} + \frac{1}{M^2} > 0$ si può riscrivere quanto trovato come segue: qualunque sia $M > 0$ si è in grado di esibire un $\delta > 0$ per cui tutte le $x \in (4, 4 + \delta)$ risolvono $\frac{1}{\sqrt{x}-2} > M$. Il limite è dunque verificato.

EX4.

a) x_0 è punto di minimo locale per f su $\mathbb{R}$ se esiste un intorno B di x_0 per cui per tutti gli $x \in B$ si ha $f(x_0) \leq f(x)$.
x_0 è punto di massimo locale per f su $\mathbb{R}$ se esiste un intorno B di x_0 per cui per tutti gli $x \in B$ si ha $f(x_0) \geq f(x)$.
b) Se f ha un minimo locale in x_0, allora esiste un intorno B di x_0 per cui per tutti gli $x \in B$ si ha $f(x_0) \leq f(x)$, allora $-3f(x_0) \geq -3f(x)$, e, poiché e^x è una funzione crescente in $\mathbb{R}$, si ha che $e^{-3f(x_0)} \geq e^{-3f(x)}$, e quindi $g(x_0) \geq g(x)$. Abbiamo ottenuto quindi che per tutti gli $x \in B$, con B intorno di x_0, si ha $g(x_0) \geq g(x)$, ma allora x_0 per g è un punto di massimo locale.

EX5.

Continuità. f è continua su $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ perché su tali 2 insiemi coincide con funzioni elementari (rispettivamente polinomio ed esponenziale moltiplicato per una costante) che un teorema ci dice essere continue. Controlliamo la continuità in 0. Siano $f_1(x) = x^2 + ax + b$ ed $f_2(x) = (a+2)e^{-bx}$, entrambi continue in 0, allora $\lim_{x\to 0^-} f = \lim_{x\to 0^-} f_1(x) = f_1(0) = b$. $\lim_{x\to 0^+} f = \lim_{x\to 0^+} f_2 = f_2(0) = a + 2$. Perciò f è continua in 0 sse $b = a + 2$. In questo caso $f(0) = f_1(0) = f_2(0)$.
Derivabilità. f è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ perché su tali 2 intervalli coincide con le rispettive funzioni elementari $f_1(x), f_2)(x)$ che un teorema ci dice essere derivabili ovunque.

Controlliamo la derivabilitá in 0. La derivata sinistra di f coincide con $f_1'(0) = (2x + a)|_{x=0} = a$. Dallo

[1] ed é uguale a 470.5

studio di continuitá $f(0) = f_2(0)$ e quindi la derivata destra $f'(0+) = f_2'(0) = -b(a+2)$.

Quindi f è derivabile in 0 sse $\begin{cases} a = -b(a+2) \\ a+2 = b. \end{cases}$

Dalla seconda equazione otteniamo $a = b-2$, e sostituendo a nella prima otteniamo $b^2+b-2 = 0$. Quest'ultima equazione di secondo grado in b ha $\Delta = 9$ e radici $b_1 = 1, b_2 = -2$, che corrispondono rispettivamente ad $a_1 = b_1 - 2 = -1$ ed $a_2 = b_2 - 1 = -4$. Quindi f è continua e derivabile per $a = -1$ e $b = 1$ oppure per $a = -4$ e $b = -2$.

EX6.

a) Dominio: $x \neq 1$, il dominio non è simmetrico rispetto all'origine, quindi f non può essere pari né dispari.
Segno e intersezione con gli assi: $f(0) = 0$; $f = 0$ sse il numeratore fa 0, ossia $x = 0$.
Poiché $\sqrt{|x|} \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, $f \geq 0$ sse $x > 1$.
Limiti. $\lim_{x\to+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-1}$: sia numeratore che denominatore di f tendono a $+\infty$, ma $\sqrt{x} = x^{1/2}$ è una potenza di x inferiore ad 1, quindi tende a ∞ più lentamente, ed il quoziente tende a 0^+.
$\lim_{x\to-\infty} f = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-x}}{x-1}$: il numeratore di f tende a $+\infty$ mentre il denominatore tende a $-\infty$, e anche questa volta il numeratore diverge più lentamente, perciò il quoziente tende a 0^-.
$\lim_{x\to1} f$: possiamo assumere $x > 0$, visto che x si deve avvicinare ad 1. $\lim_{x\to1^+} f = \lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x}}{x-1}$: il numeratore tende a 1, ed il denominatore a 0^+, perciò il quoziente tende a $+\infty$.
$\lim_{x\to1^-} f = \lim_{x\to1^-} \frac{\sqrt{x}}{x-1}$: il numeratore tende a 1, ed il denominatore a 0^-, perciò il quoziente tende a $-\infty$.
Derivata prima. Distinguiamo i casi $x > 0, x = 0, x < 0$. Per $x > 0, x \neq 1$ si ha

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) - \sqrt{x}}{(x-1)^2} = \frac{-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0,$$

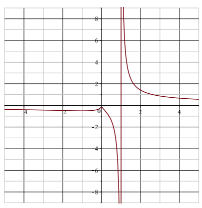
quindi f è decrescente sugli intervalli $(0,1)$ e $(1,+\infty)$.
Per $x < 0$ si ha

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{-x}}{x-1}\right)' = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{-x}}(x-1) - \sqrt{-x}}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{2\sqrt{-x}(x-1)^2}$$

(ricordando che $\sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x} = -x$). Si ha che $f' \geq 0$ sse $x \geq -1$: quindi f è strettamente decrescente su $(-\infty,-1)$ mentre è strettamente crescente su $(-1,0)$. Si hanno allora: un punto di minimo locale in -1, in cui $f(-1) = -\frac{1}{2}$, ed un punto di massimo locale in 0, dove f fa 0.
In $x = 0$: verifichiamo se il limite del rapporto incrementale in 0 esista finito.

$$\lim_{h\to0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to0^+} \frac{\frac{\sqrt{h}}{h-1}}{h} = \lim_{h\to0^+} \frac{1}{(h-1)\sqrt{h}} = -\infty :$$

già solo il limite destro del rapporto incrementale non è finito, f dunque non può essere derivabile in 0.



fila A.pdf

b) $Im(f) = (-\infty,0] \cup (0,+\infty) = \mathbb{R}$, $\inf(f) = -\infty$, $\sup(f) = +\infty$.

SOLUZIONI FILA B

EX1.

1) vincolo di budget: $x_1 + 2x_2 = 50$, quindi $x_1 = 50 - 2x_2$.
2) $x_2 \geq 0$; $x_1 \geq 0 \Rightarrow 50 - 2x_2 \geq 0$, ossia $x_2 \leq 25$. Quindi $x_2 \in [0, 25]$.
3) $V = 50 - 2x_2 + 22x_2 + (50 - 2x_2)x_2 = -2x_2^2 + 70x_2 + 50$.
Si cerca $\max_{x_2 \in [0,25]} -2x_2^2 + 70x_2 + 50$.
Si pone $f(x_2) = -2x_2^2+70x_2+50$, f è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, si studia il segno di f': $f'(x_2) = -4x_2+70$, quindi f' è positiva per $x_2 < 70/4 = 17.5$ e negativa per ogni $x_2 > 17.5$, quindi il massimo assoluto di f su $[0, 25]$[1] è raggiunto in $\hat{x}_2 = 17.5$. Di conseguenza $\hat{x}_1 = 50 - 2\hat{x}_2 = 15$.

EX2.

1) $P_1(x) = f(0) + f'(0)x$: $f(0) = 1$, $f'(x) = e^x - \frac{3}{1+3x}$, quindi $f'(0) = -2$, e $P_1(x) = 1 - 2x$. Il resto $R_1(x) = f(x) - P_1(x)$ tende a zero più velocemente di x, per $x \to 0$, ossia: $\lim_{x\to 0} \frac{R_1(x)}{x} = 0$.
2) $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2}$: $f''(x) = e^x + \frac{9}{(1+3x)^2}$, quindi $f''(0) = 10$ e $P_2(x) = 1 - 2x + 5x^2$. Il resto $R_2(x) = f(x) - P_2(x)$ tende a zero più velocemente di x^2, per $x \to 0$, ossia: $\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0$.
3) P_2 dà di f una approssimazione migliore rispetto a P_1, perché lo scarto tra f e P_2 è più piccolo di x^2, che, per x in un intorno di zero in cui sia $|x| < 1$, è più piccolo di x, che è il termine di paragone per R_1. In altre parole, per x vicini a zero si ha $x < x^2$, e, mentre $\frac{R_1}{x} \to 0$, non è garantito che sia $\frac{R_1}{x^2} \to 0$, ossia che si abbia $R_1 < x^2$, invece di sicuro $R_2 < x^2$.

EX3.

1) Vale che $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ quando $\forall\ M > 0$ si riesce a trovare un $\delta > 0$ per cui per tutti gli $x \in (x_0, x_0+\delta)$ succede che $f(x) > M$.
2) $\frac{1}{\sqrt{x}-3}$ è definita per $x \geq 0$ e $x \neq 9$. Prendiamo un $M > 0$ e verifichiamo che tra le soluzioni di $\frac{1}{\sqrt{x}-3} > M$ si trovino tutti gli x di un intorno destro (da determinare) $(9, 9 + \delta)$ di 4. Siamo dunque interessati ai soli $x > 9$
Per $x > 9$, in disuguaglianza $\frac{1}{\sqrt{x}-3} > M$ entrambi i membri sono positivi, se si passa ai reciproci, allora, il segno di disuguaglianza si inverte: $\frac{1}{\sqrt{x}-3} > M$ sse $\sqrt{x} - 3 < \frac{1}{M}$. Quest'ultima disuguaglianza equivale a $\sqrt{x} < 3 + \frac{1}{M}$: anche in questo caso entrambi i membri sono positivi, perciò se si elevano entrambi al quadrato la disuguaglianza resta nello stesso verso: $\sqrt{x} < 3 + \frac{1}{M}$ sse $x < \left(3 + \frac{1}{M}\right)^2 = 9 + \frac{6}{M} + \frac{1}{M^2}$. Le soluzioni $x > 9$ di $\frac{1}{\sqrt{x}-3} > M$ sono le $x \in (9, 9 + \frac{6}{M} + \frac{1}{M^2})$, che è un intorno destro di 9. Ponendo $\delta = \frac{6}{M} + \frac{1}{M^2} > 0$ si può riscrivere quanto trovato come segue: qualunque sia $M > 0$ si è in grado di esibire un $\delta > 0$ per cui tutte le $x \in (9, 9 + \delta)$ risolvono $\frac{1}{\sqrt{x}-3} > M$. Il limite è dunque verificato.

EX4.

a) x_0 è punto di minimo locale per f su $\mathbb{R}$ se esiste un intorno B di x_0 per cui per tutti gli $x \in B$ si ha $f(x_0) \leq f(x)$.
x_0 è punto di massimo locale per f su $\mathbb{R}$ se esiste un intorno B di x_0 per cui per tutti gli $x \in B$ si ha $f(x_0) \geq f(x)$.
b) Se f ha un minimo locale in x_0, allora esiste un intorno B di x_0 per cui per tutti gli $x \in B$ si ha $f(x_0) \leq f(x)$, allora $-2f(x_0) \geq -2f(x)$ in B, e, poiché e^x è una funzione crescente in $\mathbb{R}$, si ha che $e^{-2f(x_0)} \geq e^{-2f(x)}$, e quindi $g(x_0) \geq g(x)$ in B. Abbiamo ottenuto quindi che per tutti gli $x \in B$, con B intorno di x_0, si ha $g(x_0) \geq g(x)$, ma allora x_0 per g è un punto di massimo locale.

EX5.

Continuità. f è continua su $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ perché su tali 2 insiemi coincide con funzioni elementari (rispettivamente polinomio ed esponenziale moltiplicato per una costante) che un teorema ci dice essere continue. Controlliamo la continuità in 0. Siano $f_1(x) = x^2 + ax - b$ ed $f_2(x) = (a+2)e^{bx}$, entrambi continue in 0, allora $\lim_{x\to 0^-} f = \lim_{x\to 0^-} f_1(x) = f_1(0) = -b$: poiché $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in 0, si ha $\lim_{x\to 0^-} f_1(x) = f_1(0) = b$.
$\lim_{x\to 0^+} f = \lim_{x\to 0^+} f_2$: poiché $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in 0, si ha $\lim_{x\to 0^+} f_2(x) = f_2(0) = a + 2$. Perciò f è continua in 0 sse $-b = a + 2$. In questo caso $f(0) = f_1(0) = f_2(0)$.
Derivabilità. f è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ perché su tali 2 intervalli coincide con le rispettive funzioni elementari $f_1(x), f_2(x)$, che un teorema ci dice essere derivabili ovunque.

Controlliamo la derivabilità in 0. La derivata sinistra di f coincide con $f_1'(0) = (2x + a)|_{x=0} = a$. Dallo studio di continuitá $f(0) = f_2(0)$ e quindi la derivata destra $f'(0+) = f_2'(0) = (a + 2)b$.

[1] uguale a 662.5

Quindi f è derivabile in sse $\begin{cases} a = b(a+2) \\ a+2 = -b. \end{cases}$

Dalla seconda equazione otteniamo $b = -a-2$, e sostituendo b nella prima otteniamo $a = -(a+2)^2 \Leftrightarrow a^2+5a+4=0$. Quest'ultima equazione ha ha le radici $a_1 = -1, a_2 = -4$, che corrispondono rispettivamente ad $b_1 = -a_1 - 2 = -1$ ed $b_2 = -a_2 - 2 = 2$. Quindi f é continua e derivabile per $a = -1$ e $b = 1$ oppure per $a = -4$ e $b = 2$.

EX6.

a) Dominio: $x \neq -1$, il dominio non è simmetrico rispetto all'origine, quindi f non può essere pari né dispari.
Segno e intersezione con gli assi: $f(0) = 0$; $f = 0$ sse il numeratore fa 0, ossia $x = 0$.
Poiché $\sqrt{|x|} \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, $f \geq 0$ sse $x > -1$.
Limiti. $\lim_{x\to+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1}$: sia numeratore che denominatore di f tendono a $+\infty$, ma $\sqrt{x} = x^{1/2}$ è una potenza di x inferiore ad 1, quindi tende a ∞ più lentamente, ed il quoziente tende a 0^+.
$\lim_{x\to-\infty} f = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-x}}{x+1}$: il numeratore di f tende a $+\infty$ mentre il denominatore tende a $-\infty$, e anche questa volta il numeratore diverge più lentamente, perciò il quoziente tende a 0^-.
$\lim_{x\to-1} f$: possiamo assumere $x < 0$, visto che x si deve avvicinare ad -1. $\lim_{x\to-1^+} f = \lim_{x\to-1^+} \frac{\sqrt{|x|}}{x+1}$: il numeratore tende a 1, ed il denominatore a 0^+, perciò il quoziente tende a $+\infty$.
$\lim_{x\to-1^-} f = \lim_{x\to-1^-} \frac{\sqrt{|x|}}{x+1}$: il numeratore tende a 1, ed il denominatore a 0^-, perciò il quoziente tende a $-\infty$.
Derivata prima. Distinguiamo i casi $x > 0, x = 0, x < 0$. Per $x > 0$ si ha

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2},$$

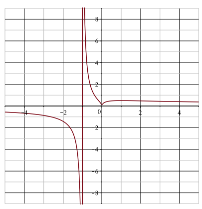
quindi $f' \geq 0$ sse $-x+1 \geq 0$: la funzione è crescente sul $(0,1)$ e decrescente strettamente sul $(1,+\infty)$. Si ha un punto di massimo locale $x = 1$, $f(1) = 1/2$.
Per $x < 0, x \neq -1$, si ha

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{-x}}{x+1}\right)' = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{-x}}(x+1) - \sqrt{-x}}{(x+1)^2} = \frac{-1+x}{\frac{1}{2\sqrt{-x}}(x+1)^2} < 0 :$$

quindi f è strettamente decrescente su $(-\infty,-1)$ e su $(-1,0)$. Si hanno allora: un punto di minimo locale in 0, dove f fa 0.
In $x = 0$: verifichiamo se il limite del rapporto incrementale in 0 esista finito.

$$\lim_{h\to0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to0^+} \frac{\frac{\sqrt{h}}{h+1}}{h} = \lim_{h\to0^+} \frac{1}{(h+1)\sqrt{h}} = +\infty :$$

già solo il limite destro del rapporto incrementale non è finito, f dunque non può essere derivabile in 0.



fila B.pdf

b) $Im(f) = (-\infty,0] \cup (0,+\infty) = \mathbb{R}$, $\inf(f) = -\infty$, $\sup(f) = +\infty$.

SOLUZIONI FILA C

EX1.

1) vincolo di budget: $x_1 + 2x_2 = 50$, quindi $x_1 = 50 - 2x_2$.
2) $x_2 \geq 0$; $x_1 \geq 0 \Rightarrow 50 - 2x_2 \geq 0$, ossia $x_2 \leq 25$. Quindi $x_2 \in [0, 25]$.
3) $V = 50 - 2x_2 + 42x_2 + (50 - 2x_2)x_2 = -2x_2^2 + 90x_2 + 50$.
Si cerca $\max_{x_2 \in [0,25]} -2x_2^2 + 90x_2 + 50$.
Si pone $f(x_2) = -2x_2^2+90x_2+50$, f è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, si studia il segno di f': $f'(x_2) = -4x_2+90$, quindi f' è positiva per $x_2 < 90/4 = 22.5$ e negativa per ogni $x_2 > 22.5$, quindi il massimo assoluto di f su $[0, 25]$ è raggiunto in $\hat{x}_2 = 22.5$. [1]Di conseguenza $\hat{x}_1 = 50 - 2\hat{x}_2 = 5$.

EX2.

1) $P_1(x) = f(0) + f'(0)x$: $f(0) = 1$, $f'(x) = 2e^{2x} - \frac{1}{1+x}$, quindi $f'(0) = 1$, e $P_1(x) = 1 + x$. Il resto $R_1(x) = f(x) - P_1(x)$ tende a zero più velocemente di x, per $x \to 0$, ossia: $\lim_{x\to 0} \frac{R_1(x)}{x} = 0$.
2) $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2}$: $f''(x) = 4e^{2x} + \frac{1}{(1+x)^2}$, quindi $f''(0) = 5$ e $P_2(x) = 1 + x + \frac{5}{2}x^2$. Il resto $R_2(x) = f(x) - P_2(x)$ tende a zero più velocemente di x^2, per $x \to 0$, ossia: $\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0$.
3) P_2 dà di f una approssimazione migliore rispetto a P_1, perché lo scarto tra f e P_2 è più piccolo di x^2, che, per x in un intorno di zero in cui sia $|x| < 1$, è più piccolo di x, che è il termine di paragone per R_1. In altre parole, per x vicini a zero si ha $x < x^2$, e, mentre $\frac{R_1}{x} \to 0$, non è garantito che sia $\frac{R_1}{x^2} \to 0$, ossia che si abbia $R_1 < x^2$, invece di sicuro $R_2 < x^2$.

EX3.

1) Vale che $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ quando $\forall\ M > 0$ si riesce a trovare un $\delta > 0$ per cui per tutti gli $x \in (x_0, x_0+\delta)$ succede che $f(x) > M$.
2) $\frac{1}{\sqrt{4x}-4}$ è definita per $x \geq 0$ e $x \neq 4$. Prendiamo un $M > 0$ e verifichiamo che tra le soluzioni di $\frac{1}{\sqrt{4x}-4} > M$ si trovino tutti gli x di un intorno destro (da determinare) $(4, 4 + \delta)$ di 4. Siamo dunque interessati ai soli $x > 4$ Per $x > 4$, in disuguaglianza $\frac{1}{\sqrt{4x}-4} > M$ entrambi i membri sono positivi, se si passa ai reciproci, allora, il segno di disuguaglianza si inverte: $\frac{1}{\sqrt{4x}-4} > M$ sse $\sqrt{4x} - 4 < \frac{1}{M}$. Quest'ultima disuguaglianza equivale a $\sqrt{4x} < 4 + \frac{1}{M}$: anche in questo caso entrambi i membri sono positivi, perciò se si elevano entrambi al quadrato la disuguaglianza resta nello stesso verso: $\sqrt{4x} < 4+\frac{1}{M}$ sse $4x < \left(4 + \frac{1}{M}\right)^2 = 16+\frac{8}{M} + \frac{1}{M^2} \Leftrightarrow x < 4+\frac{2}{M} + \frac{1}{4M^2}$. Le soluzioni sono le $x \in (4, 4 + \frac{2}{M} + \frac{1}{4M^2})$, che è un intorno destro di 4. Ponendo $\delta = \frac{2}{M} + \frac{1}{4M^2} > 0$ si può riscrivere quanto trovato come segue: qualunque sia $M > 0$ si è in grado di esibire un $\delta > 0$ per cui tutte le $x \in (4, 4 + \delta)$ risolvono $\frac{1}{\sqrt{4x}-4} > M$. Il limite è dunque verificato.

EX4.

a) x_0 è punto di minimo locale per f su $\mathbb{R}$ se esiste un intorno B di x_0 per cui per tutti gli $x \in B$ si ha $f(x_0) \leq f(x)$.
x_0 è punto di massimo locale per f su $\mathbb{R}$ se esiste un intorno B di x_0 per cui per tutti gli $x \in B$ si ha $f(x_0) \geq f(x)$.
b) Se f ha un minimo locale in x_0, allora esiste un intorno B di x_0 per cui per tutti gli $x \in B$ si ha $f(x_0) \leq f(x)$, allora $-2(x_0) \geq -f(x)$ in B, e, poiché e^x è una funzione crescente in $\mathbb{R}$, si ha che $e^{-f(x_0)} \geq e^{-f(x)}$, e quindi $g(x_0) \geq g(x)$ in B. Abbiamo ottenuto quindi che per tutti gli $x \in B$, con B intorno di x_0, si ha $g(x_0) \geq g(x)$, ma allora x_0 per g è un punto di massimo locale.

EX5.

Continuità. f è continua su $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ perché su tali 2 insiemi coincide con funzioni elementari (rispettivamente polinomio ed esponenziale moltiplicato per una costante) che un teorema ci dice essere continue. Controlliamo la continuità in 0. Siano $f_1(x) = x^2 + ax - b$ ed $f_2(x) = (2 - a)e^{bx}$, entrambi continue in 0, allora $\lim_{x\to 0^-} f = \lim_{x\to 0^-} f_1(x) = f_1(0) = -b$: poiché $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in 0, si ha $\lim_{x\to 0^-} f_1(x) = f_1(0) = -b$. $\lim_{x\to 0^+} f = \lim_{x\to 0^+} f_2$: poiché $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in 0, si ha $\lim_{x\to 0^+} f_2(x) = f_2(0) = 2 - a$. Perciò f è continua in 0 sse $b = a - 2$. In questo caso $f(0) = f_1(0) = f_2(0)$.
Derivabilità. f è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ perché su tali 2 intervalli coincide con le rispettive funzioni elementari $f_1(x), f_2(x)$, che un teorema ci dice essere derivabili ovunque.

Controlliamo la derivabilità in 0. La derivata sinistra di f coincide con $f_1'(0) = (2x - a)|_{x=0} = -a$. Dallo studio di continuitá $f(0) = f_2(0)$ e quindi la derivata destra $f'(0+) = f_2'(0) = (2 - a)b$.

[1] ed è uguale 1062.5

Quindi f è derivabile in 0 sse $\begin{cases} -a = b(2-a) \\ a-2 = b. \end{cases}$
Dalla seconda equazione otteniamo $b = a-2$, e sostituendo b nella prima otteniamo $-a = -(a-2)^2 \Leftrightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$. Quest'ultima equazione ha ha le radici $a_1 = 1, a_2 = 4$, che corrispondono rispettivamente ad $b_1 = -1$ ed $b_2 = 2$. Quindi f é continua e derivabile per $a = 1$ e $b = -1$ oppure per $a = 4$ e $b = 2$.

EX6.

a) Dominio: $x \neq 2$, il dominio non è simmetrico rispetto all'origine, quindi f non può essere pari né dispari.
Segno e intersezione con gli assi: $f(0) = 0$; $f = 0$ sse il numeratore fa 0, ossia $x = 0$.
Poiché $\sqrt{|x|} \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, $f \geq 0$ sse $x > 2$.
Limiti. $\lim_{x\to+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-2}$: sia numeratore che denominatore di f tendono a $+\infty$, ma $\sqrt{x} = x^{1/2}$ è una potenza di x inferiore ad 1, quindi tende a ∞ più lentamente, ed il quoziente tende a 0^+.
$\lim_{x\to-\infty} f = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-x}}{x-2}$: il numeratore di f tende a $+\infty$ mentre il denominatore tende a $-\infty$, e anche questa volta il numeratore diverge più lentamente, perciò il quoziente tende a 0^-.
$\lim_{x\to 2} f$: possiamo assumere $x > 0$, visto che x si deve avvicinare a 2. $\lim_{x\to 2^+} f = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{|x|}}{x-2}$: il numeratore tende a $\sqrt{2}$, ed il denominatore a 0^+, perciò il quoziente tende a $+\infty$.
$\lim_{x\to 2^-} f = \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{|x|}}{x-2}$: il numeratore tende a $\sqrt{2}$, ed il denominatore a 0^-, perciò il quoziente tende a $-\infty$.
Derivata prima. Distinguiamo i casi $x > 0, x = 0, x < 0$. Per $x > 0, x \neq 2$ si ha

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-2}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-2) - \sqrt{x}}{(x-2)^2} = \frac{-2-x}{2\sqrt{x}(x-2)^2} < 0,$$

quindi la funzione è decrescente sugli intervalli $(0,2)$ e $(2,+\infty)$.

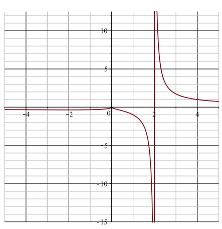
Per $x < 0$ si ha

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{-x}}{x-2}\right)' = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{-x}}(x-2) - \sqrt{-x}}{(x-2)^2} = \frac{2+x}{(x-2)^2}.$$

Si ha che $f' \leq 0$ sse $x \in (-\infty,-2)$ e $f' \geq 0$ se $x \in (-2,0)$: quindi f è strettamente decrescente su $(-\infty,-2)$ ed è crescente su $(-2,0)$. Si hanno allora: un punto di minimo locale in -2, $f(-2) = -\sqrt{2}/4$ e un punto di massimo locale in $x = 0$.
In $x = 0$: verifichiamo se il limite del rapporto incrementale in 0 esista finito.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{\sqrt{h}}{h-2}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{(h-2)\sqrt{h}} = +\infty :$$

già solo il limite destro del rapporto incrementale non è finito, f dunque non può essere derivabile in 0.



fila C.pdf

b) $Im(f) = (-\infty,0] \cup (0,+\infty) = \mathbb{R}$, $\inf(f) = -\infty$, $\sup(f) = +\infty$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I

Appello del 9/9/2015 **FILA A**

ESERCIZIO 1. (punti 7)

a) Si formuli (senza dimostrazione) il teorema di Weierstrass per le funzioni continue.
b) Data una funzione continua su $[0, 2]$ e tale che $f(0) = 2,\ f(1) = 0,\ f(2) = 1$, si dimostri che almeno uno degli estremi (massimo o minimo) assoluti di f e' raggiunto in un punto interno di $[0, 2]$.
c) Si formuli e si dimostri teorema di Fermat, che descrive la relazione tra punti di estremo e punti critici (stazionari) per le funzioni derivabili.
d) Si dimostri che se la funzione $f(x)$ del punto **b)** è derivabile, la sua derivata $f'(x)$ si annulla almeno in un punto $z \in (0, 2)$.

ESERCIZIO 2. (punti 9)

Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2},$$

e se ne disegni il grafico.

ESERCIZIO 3. (punti 6)

a) Usando la definizione di limite, si dimostri che se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

allora

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k) = +\infty.$$

b) Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + x^4}{e^{2x} + x} \cdot x \cdot \log\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

ESERCIZIO 4. (punti 6).

Un genitore deve decidere la eredità da lasciare ai suoi due figli. L'eredità ammonta a 1 milione di euro e il genitore vuole rendere più grande possibile la somma della soddisfazione (utilità) che ciascun figlio ricava dalla eredità. Detta x la eredità lasciata al figlio 1 e y la eredità lasciata al figlio 2, siano

$$u_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{4}\log(2 + x) \qquad \text{e} \qquad u_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \frac{1}{5}\log(1 + y)$$

le utilita' del figlio 1 e 2, rispettivamente. Si assuma che il genitore lasci tutto il milione ai suoi figli, ovvero, sia $x + y = 1$.
a) si scriva il problema di massimo che il genitore vuole risolvere;
b) senza calcolare la soluzione, si dica se il problema ammette soluzione;
c) si calcoli la soluzione.

ESERCIZIO 5. (punti 5)

a) Per una funzione f ed un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, scrivere la definizione di derivata prima di f in x_0.
b) Sulla base della definizione appena data, e ricordando i limiti notevoli, determinare la derivata prima di $f(x) = \log(x + 1)$ nel generico punto $x_0 \in D(f)$.

ESERCIZIO 6. (punti 7)

Siano date

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \in [0, 2]; \\ -x + 7 & \text{se } x \in (2, 4]. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \in [0, 2]; \\ x + 3 & \text{se } x \in (2, 4]. \end{cases}$$

a) Disegnare i grafici di f e g e dire quale delle due funzioni è invertibile dal suo dominio alla sua immagine.
b) Tenendo conto del suo grafico, determinare l'immagine di f e calcolare algebricamente le controimmagini $f^{-1}(2), f^{-1}(4), f^{-1}(6)$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I

Appello del 9/9/2015 **FILA B**

ESERCIZIO 1. (punti 7)
a) Si formuli (senza dimostrazione) il teorema di Weierstrass per le funzioni continue.
b) Data una funzione continua su $[-1,1]$ e tale che $f(-1)=1,\ f(0)=3,\ f(1)=2$, si dimostri che almeno uno degli estremi (massimo o minimo) assoluti di f e' raggiunto in un punto interno di $[-1,1]$.
c) Si formuli e si dimostri teorema di Fermat, che descrive la relazione tra punti di estremo e punti critici (stazionari) per le funzioni derivabili.
d) Si dimostri che se la funzione $f(x)$ del punto **b)** è derivabile, la sua derivata $f'(x)$ si annulla almeno in un punto $z \in (-1,1)$.

ESERCIZIO 2. (punti 9)
Si studi la funzione
$$f(x)=\frac{2x^2}{1-x^2},$$
e se ne disegni il grafico.

ESERCIZIO 3. (punti 6)
a) Usando la definizione di limite, si dimostri che se
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,$$
allora
$$\forall k \in \mathbb{R},\quad \lim_{x\to+\infty} (f(x)+k) = -\infty.$$
b) Si calcoli il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+x^4}{e^{4x}+x}\cdot x\cdot \log\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

ESERCIZIO 4. (punti 6).
Un genitore deve decidere la eredità da lasciare ai suoi due figli. L'eredità ammonta a 1 milione di euro e il genitore vuole rendere più grande possibile la somma della soddisfazione (utilità) che ciascun figlio ricava dalla eredità. Detta x la eredità lasciata al figlio 1 e y la eredità lasciata al figlio 2, siano
$$u_1:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\quad x\mapsto \frac{1}{2}\log(2+x) \qquad \text{e} \qquad u_2:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\quad y\mapsto\frac{1}{3}\log(1+y)$$
le utilita' del figlio 1 e 2, rispettivamente. Si assuma che il genitore lasci tutto il milione ai suoi figli, ovvero, sia $x+y=1$.
a) si scriva il problema di massimo che il genitore vuole risolvere;
b) senza calcolare la soluzione, si dica se il problema ammette soluzione;
c) si calcoli la soluzione.

ESERCIZIO 5. (punti 5)
a) Per una funzione f ed un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, scrivere la definizione di derivata prima di f in x_0.
b) Sulla base della definizione appena data, e ricordando i limiti notevoli, determinare la derivata prima di $f(x)=\log(2+x)$ nel generico punto $x_0 \in D(f)$.

ESERCIZIO 6. (punti 7)
Siano date
$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{se } x\in[0,2];\\ -\frac{5}{2}x+9 & \text{se } x\in(2,4].\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x+2 & \text{se } x\in[0,2];\\ \frac{x}{2}+3 & \text{se } x\in(2,4].\end{cases}$$
a) Disegnare i grafici di f e g e dire quale delle due funzioni è invertibile dal suo dominio alla sua immagine.
b) Tenendo conto del suo grafico, determinare l'immagine di f e calcolare algebricamente le controimmagini $f^{-1}(1), f^{-1}(3), f^{-1}(5)$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I

Appello del 9/9/2015 **FILA C**

ESERCIZIO 1. (punti 7)

a) Si formuli (senza dimostrazione) il teorema di Weierstrass per le funzioni continue.
b) Data una funzione continua su $[-2, 1]$ e tale che $f(-2) = 1,\ f(0) = -2,\ f(1) = -1$, si dimostri che almeno uno degli estremi (massimo o minimo) assoluti di f e' raggiunto in un punto interno di $[-2, 1]$.
c) Si formuli e si dimostri teorema di Fermat, che descrive la relazione tra punti di estremo e punti critici (stazionari) per le funzioni derivabili.
d) Si dimostri che se la funzione $f(x)$ del punto **b)** è derivabile, la sua derivata $f'(x)$ si annulla almeno in un punto $z \in (-2, 1)$.

ESERCIZIO 2. (punti 9)

Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9},$$

e se ne disegni il grafico.

ESERCIZIO 3. (punti 6)

a) Usando la definizione di limite, si dimostri che se

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$$

allora

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) + k) = +\infty.$$

b) Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + x^5}{e^{2x} + x^3} \cdot x \cdot \log\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

ESERCIZIO 4. (punti 6).

Un genitore deve decidere la eredità da lasciare ai suoi due figli. L'eredità ammonta a 1 milione di euro e il genitore vuole rendere più grande possibile la somma della soddisfazione (utilità) che ciascun figlio ricava dalla eredità. Detta x la eredità lasciata al figlio 1 e y la eredità lasciata al figlio 2, siano

$$u_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}\log(2 + x) \qquad \text{e} \qquad u_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \frac{1}{3}\log(1 + y)$$

le utilita' del figlio 1 e 2, rispettivamente. Si assuma che il genitore lasci tutto il milione ai suoi figli, ovvero, sia $x + y = 1$.
a) si scriva il problema di massimo che il genitore vuole risolvere;
b) senza calcolare la soluzione, si dica se il problema ammette soluzione;
c) si calcoli la soluzione.

ESERCIZIO 5. (punti 5)

a) Per una funzione f ed un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, scrivere la definizione di derivata prima di f in x_0.
b) Sulla base della definizione appena data, e ricordando i limiti notevoli, determinare la derivata prima di $f(x) = \log(2x + 1)$ nel generico punto $x_0 \in D(f)$.

ESERCIZIO 6. (punti 7)

Siano date

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{se } x \in [0, 2]; \\ x + 2 & \text{se } x \in (2, 4]. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{se } x \in [0, 2]; \\ -\frac{x}{2} + 1 & \text{se } x \in (2, 4]. \end{cases}$$

a) Disegnare i grafici di f e g e dire quale delle due funzioni è invertibile dal suo dominio alla sua immagine.
b) Tenendo conto del suo grafico, determinare l'immagine di f e calcolare algebricamente le controimmagini $f^{-1}(1), f^{-1}(3), f^{-1}(5)$.

Compito A del 11 Dicembre 2015

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte. Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):**

$1-\square,\ 2-\square,\ 3-\square,\ 4-\square,\ 5-\square,\ 6-\square$

Esercizio 1. (8 punti)
Si studi la funzione (dominio, limiti, asintoti, continuità, derivabilità)

$$f(x)=\sqrt[3]{(x+1)x}=(x^2+x)^{\frac{1}{3}}$$

e se ne disegni il grafico. Nello studio della funzione non è richiesto il calcolo della derivata seconda.

Esercizio 2. (7 punti)
Siano date le funzioni f, g definite come segue:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1-x & \text{se } x\le 1\\ 1-\frac{4}{x+3} & \text{se } x>1\end{cases}\qquad g:[0,2]\to\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases}1-x & \text{se } x\in[0,\,1]\\ 1-\frac{4}{x+3} & \text{se } x\in(1,\,2]\end{cases}$$

(a) Si determinino gli estremi superiore e inferiore di f e si dica se sono il massimo e il minimo di f.
(b) Si determinino gli estremi superiore e inferiore di g e si dica se sono il massimo e il minimo di g (g ha la stessa espressione di f, ma è definita solo nell'intervallo $[0,2]$).

Esercizio 3. (6 punti)
Si enunci il teorema di Taylor, specificando con precisione la proprietà del resto. Per la funzione $f(x)=\mathrm{e}^{x^2+1}$ si calcolino la derivata prima e seconda in zero e si scriva il polinomio di Taylor di grado due nel punto $x_0=0$. Si calcoli il

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2+1}-\mathrm{e}}{x^2},$$

possibilmente usando il polinomio di Taylor con resto.

Esercizio 4. (6 punti)
Si enunci e dimostri il teorema di Rolle.
Si consideri la funzione $f:\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}x+\frac{5}{4} & se \quad x\le -\frac{1}{2}\\ 1-x^2 & se \quad x>-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Si verifichi che: (i) f è continua in $\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; (ii) f è derivabile in $\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; (iii) f soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Esercizio 5. (7 punti)
Un impresa produce un bene in quantità y usando un input x. La funzione di produzione è

$$y=f(x):=-x^2+4\,x+10 \qquad x\in[0,2]\,.$$

Il prezzo unitario di vendita del prodotto y è 1 e la funzione di costo è $c(x)=x$. L'impresa agisce massimizzando il profitto al netto dell'imposta $t(x)$

$$P\,(x)=1\cdot f\,(x)-c\,(x)-t(x)=f\,(x)-c\,(x)-t(x).$$

Il Governo tassa l'input usato dall'impresa con una delle due imposte descritte dalle funzioni:

$$t_1(x)=x \quad \text{o} \quad t_2(x)=\frac{x^2}{2}+2\,x.$$

All'impresa verrà comunicata quale sarà l'imposta e quindi massimizzerà il suo profitto di conseguenza. Quale delle due imposte massimizza le entrate per il Governo?

Esercizio 6. (6 punti)
Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{e^{2\,x^2}-1}; \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{\left|x^3+2x-1\right|+2\,x^2}{|x^2-1|-2x^3-x}.$$

Soluzioni Compito A

Soluzione esercizio 1. Il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)x} = \sqrt[3]{x^2+x},$$

è $\mathbb{R}$, poiché f è la composizione di due funzioni (il radicale $\sqrt[3]{y}$ ed il polinomio x^2+x), definite ovunque.
La funzione f è continua in $\mathbb{R}$ e non è né pari né dispari,
I limiti della funzione $f(x)$ all'infinito sono

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2+x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty.$$

La funzione f è definita e continua in $\mathbb{R}$ e quindi il suo grafico non ha asintoti verticali.
Per calcolare gli eventuali asintoti obliqui $y = k_\pm x + \ell_\pm$ calcoliamo prima

$$k_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1/x + 1/x^2} = 0,$$

e dunque non ci sono asintoti obliqui.
Calcoliamo la derivata della funzione $f(x)$:

$$\begin{aligned} D(f)(x) = f'(x) &= \frac{1}{3}(x^2+x)^{-2/3} D\left[x^2+x\right] = \\ &= \frac{2x+1}{3(x^2+x)^{2/3}} = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x)^2}}. \end{aligned}$$

Vediamo che il denominatore è sempre non-negativo ma si annulla nei due punti $x=0$ e $x=-1$ che sono pertanto due punti di non derivabilità. Se calcoliamo i due limiti

$$\lim_{x\to 0} D(f)(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to -1} D(f)(x) = -\infty$$

vediamo che si tratta di due punti con tangente verticale.

Il segno della derivata è determinato dal segno del numeratore che è un polinomio di primo grado la cui radice è $x = -1/2$.
La derivata $D(f)(x)$ prende valori negativi per $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,-1/2)$, positivi per $x \in (-1/2, 0) \cup (0,+\infty)$. Pertanto la funzione $f(x)$ decresce in $(-\infty,-1/2)$, cresce in $(-1/2,+\infty)$.
Il punto $x_0 = -1/2$ è un punto di minimo locale che è anche globale.
Il valore del minimo è $f(-1/2) = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.
Il grafico della funzione è in Figura **??**

Soluzione esercizio 2.

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } x \le 1 \\ 1 - \frac{4}{x+3} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

La funzione è composta da un tratto di retta e da un tratto di iperbole, la funzione è continua nel punto $x = 1$ poiché abbiamo

$$f(1) = 0 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Possiamo quindi facilmente disegnare il grafico di f, vedi Figura **??** Da questo grafico deduciamo che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f = +\infty, \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0,$$

in quanto

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1, \quad f(1) = 0$$

(notate come il punto di minimo locale e globale sia in un punto di non derivabilità, punto angoloso); l'immagine della funzione è $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$ e $\max_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ non esiste, mentre $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ esiste.
(b)

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \in [0,\, 1] \\ 1 - \frac{4}{x+3} & \text{se } x \in (1,\, 2] \end{cases}$$

Il grafico di g è in Figura **??**.
Dal grafico deduciamo che

$$\sup_{x\in[0,\,2]} g(x) = g(0) = 1, \qquad \inf_{x\in[0,\,2]} g(x) = g(1) = 0,$$

che sono anche massimo e minimo globali

$$\max_{x\in[0,\,2]} g(x) = 1,\ \min_{x\in[0,\,2]} g(x) = 0.$$

Soluzione esercizio 3.
Vedere libro di testo.
Il polinomio di Taylor fino al grado due di f nell'origine si può scrivere come

$$f\,(0) + \mathrm{D}(f)\,(0)\,x + \frac{D^2(f)(0)}{2!}x^2 + \frac{D^3(f)(\theta)}{3!}x^3, \quad \theta \text{ fra } 0 \text{ e } x$$

oppure

$$f\,(0) + \mathrm{D}(f)\,(0)\,x + \frac{D^2(f)(0)}{2!}x^2 + R_2(x)$$

dove

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0.$$

Per la nostra funzione abbiamo che

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2+1},\ D(f)(x) = 2\,x\,\mathrm{e}^{x^2+1},\ D^2(f)(x) = 2\,\mathrm{e}^{x^2+1}\left(1 + 2\,x^2\right)$$

$$f(0) = \mathrm{e},\ D(f)(0) = 0,\ D^2(f)(0) = 2\,\mathrm{e}$$

e quindi

$$f(x) = \mathrm{e} + \mathrm{e}\,x^2 + R_2(x)$$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2+1} - e}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \mathrm{e}}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}x^2 + R_2(x)}{x^2} = \\ &= \mathrm{e} + \lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = \mathrm{e}. \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 4. Data la continuità e derivabilità delle funzioni polinomio è sufficiente studiare la continuità e la derivabilità di f nel punto $-\frac{1}{2}$. Dato che la derivabilità implica la continuità è sufficiente verificare la derivabilità di f in quel punto. Notando che abbiamo che $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ calcoliamo il limite destro e sinistro del rapporto incrementale

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} \frac{(1 - x^2) - \frac{3}{4}}{x + \frac{1}{2}} = 1$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-} \frac{(x + \frac{5}{4}) - \frac{3}{4}}{x + \frac{1}{2}} = 1.$$

La funzione è quindi derivabile (e continua) anche in $-\frac{1}{2}$, dunque f è continua in $\left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ e derivabile in $\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Poiché $f(-1) = 1/4 = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ le ipotesi del teorema di Rolle sono verificate.

Soluzione esercizio 5. Il profitto (lordo) dell'impresa prima della tassazione è

$$P(x) = -x^2 + 4\,x + 10 - x = -x^2 + 3\,x + 10$$

Con la tassazione $t_1(x)$ (notate che è specificato che la tassazione è sull'input utilizzato) il profitto dell'impresa al netto della tassazione è

$$P_1(x) = P(x) - t_1(x) = -x^2 + 3\,x + 10 - x = -x^2 + 2\,x + 10.$$

Per trovare il massimo del profitto netto P_1 calcoliamo la derivata

$$D[P]_1(x) = -2\,x + 2.$$

Abbiamo che $D[P]_1(x) > 0$ in $[0, 1)$, mentre $D[P]_1(x) < 0$ in $(1, +\infty)$. Quindi il profitto netto P_1 cresce in $[0, 1)$ e decresce $(1, +\infty)$. Allora $x_1 = 1$ è un punto di massimo globale per P_1 ed è la scelta ottima dell'impresa in questo caso.
Il valore ottimo del profitto (non era richiesto) è

$$f(1) = 11$$

Il gettito della tassazione per $x = 1$ è uguale a $t_1(1) = 1$.
In modo analogo calcoliamo il profitto al netto della tassazione $t_2(x)$ ottenendo:

$$P_2(x) = P(x) - t_2(x) = -x^2 + 3\,x + 10 - \left(\frac{x^2}{2} + 2\,x\right) = -\frac{3\,x^2}{2} + x + 10$$

Calcolando di nuovo la derivata

$$P_2'(x) = -3\,x + 1,$$

e studiandola per $x \in [0, +\infty)$, troviamo che $P_2'(x) > 0$ in $[0, 1/3)$, $P_2'(x) < 0$ in $(1/3, +\infty)$. Quindi il profitto netto P_2 cresce in $[0, 1/3)$ e decresce $(1/3, +\infty)$. Allora $x_2 = 1/3$ è il punto di massimo globale per $P_2(x)$ ed è la scelta ottima dell'impresa sotto questa politica di tassazione. Il valore ottimo del profitto è

$$f(1/3) = 61/6$$

Il gettito della tassazione per $x_2 = 1/3$ è $t_2(1/3) = \frac{13}{18}$.
Vediamo che

$$t_1(x_1) > t_2(x_2)$$

quindi la miglior scelta di tassazione per l'autorità economica è t_1.

Soluzione esercizio 6. Utilizzando alcuni limiti notevoli possiamo calcolare il primo limite come

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{e^{2x^2} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x^2)}{x^2}\,x^2}{\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}\,2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Per quanto riguarda il secondo limite possiamo utilizzare il fatto che conosciamo il segno del polinomio quando x tende a meno infinito per eliminare i valori assoluti

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\left|x^3 + 2x - 1\right| + 2\,x^2}{|x^2 - 1| - 2x^3 - x}. = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^3 - 2\,x + 1 + 2\,x^2}{x^2 - 1 - 2x^3 - x} = \frac{1}{2}.$$

Compito B del 11 Dicembre 2015

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte. Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):**

$1-\square,\ 2-\square,\ 3-\square,\ 4-\square,\ 5-\square,\ 6-\square$

Esercizio 1. (8 punti)
Si studi la funzione (dominio, limiti, asintoti, continuità, derivabilità)

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)x} = (x^2 - 2\,x)^{\frac{1}{3}}$$

e se ne disegni il grafico. Nello studio della funzione non è richiesto il calcolo della derivata seconda.

Esercizio 2. (7 punti)
Siano date le funzioni f, g definite come segue:

$$f : (-\infty, 3) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \in (-\infty,\, 1] \\ 1 + \dfrac{2}{x-3} & \text{se } x \in (1,\, 3) \end{cases} \qquad g : [0, 2] \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \in [0,\, 1] \\ 1 + \dfrac{2}{x-3} & \text{se } x \in (1,\, 2] \end{cases}$$

(a) Si determinino gli estremi superiore e inferiore di f e si dica se sono il massimo e il minimo di f.
(b) Si determinino gli estremi superiore e inferiore di g e si dica se sono il massimo e il minimo di g (g ha la stessa espressione di f, ma è definita solo nell'intervallo $[0, 2]$).

Esercizio 3. (6 punti)
Si enunci il teorema di Taylor, specificando con precisione la proprietà del resto. Per la funzione $f(x) = \log(x^2 + \mathrm{e})$ si calcolino la derivata prima e seconda in zero e si scriva il polinomio di Taylor nel punto $x_0 = 0$ fino al grado due. Si calcoli il

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x^2 + \mathrm{e}) - 1}{x^2},$$

possibilmente usando il polinomio di Taylor con resto.
Esercizio 4. (6 punti)
Si enunci e dimostri il teorema di Rolle.
Si consideri la funzione $f : \left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x - \frac{5}{4} & se \quad x \leq -\frac{1}{2} \\ x^2 - 1 & se \quad x > -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Si verifichi che: (i) f è continua in $\left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; (ii) f è derivabile in $\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; (iii) f soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $\left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.
Esercizio 5. (7 punti)
Un impresa produce un bene in quantità y usando un input x. La funzione di produzione è

$$y = f(x) := -x^2 + 5\,x + 7 \quad x \in [0,\, 5/2]$$

Il prezzo unitario di vendita del prodotto y è 1 e la funzione di costo è $c(x) = x$. L'impresa agisce massimizzando il profitto al netto dell'imposta $t(x)$

$$P\,(x) = 1 \cdot f\,(x) - c\,(x) - t(x) = f\,(x) - c\,(x) - t(x).$$

Il Governo può tassare l'input usato dall'impresa con una delle due imposte descritte dalle funzioni:

$$t_1(x) = x \quad \text{o} \quad t_2(x) = \frac{x^2}{2} + x.$$

All'impresa verrà comunicata quale sarà l'imposta e quindi massimizzerà il suo profitto di conseguenza. Quale delle due imposte massimizza le entrate per il Governo

Esercizio 6. (6 punti)
Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{e^{2\,x^2}-1}; \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{\left|x^2+2x-1\right|+2\,x^3}{|x^3-1|-2x^2-x}.$$

Soluzioni Compito B

Soluzione esercizio 1. Il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)x} = \sqrt[3]{x^2 - 2\,x} = (x^2 - 2\,x)^{1/3},$$

è $\mathbb{R}$, poiché f è la composizione di due funzioni (il radicale $\sqrt[3]{y}$ ed il polinomio $x^2 - 2\,x$), definite ovunque.
La funzione f è continua in $\mathbb{R}$ e non è né pari né dispari,
I limiti della funzione $f(x)$ all'infinito sono

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2 - 2\,x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty.$$

La funzione f è definita e continua in $\mathbb{R}$ e quindi il suo grafico non ha asintoti verticali.
Per calcolare gli eventuali asintoti obliqui $y = k_\pm x + \ell_\pm$ calcoliamo prima

$$k_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2\,x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1/x - 2/x^2} = 0,$$

e dunque non ci sono asintoti obliqui.
Calcoliamo la derivata della funzione $f(x)$:

$$D(f)(x) = f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 2\,x)^{-2/3} D\left[x^2 - 2\,x\right] =$$
$$= \frac{2x-2}{3(x^2 - 2\,x)^{2/3}} = \frac{2x-2}{3\,\sqrt[3]{(x^2 - 2\,x)^2}}.$$

Vediamo che il denominatore è sempre non-negativo ma si annulla nei due punti $x = 0$ e $x = 2$ che sono pertanto due punti di non derivabilità. Se calcoliamo i due limiti

$$\lim_{x\to 0} D(f)(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 2} D(f)(x) = +\infty$$

vediamo che si tratta di due punti con tangente verticale.

Il segno della derivata è determinato dal segno del numeratore che è un polinomio di primo grado la cui radice è $x = 1$.
La derivata $D(f)(x)$ prende valori negativi per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, positivi per $x \in (1, 2) \cup (2, +\infty)$. Pertanto la funzione $f(x)$ decresce in $(-\infty, 1)$, cresce in $(1, +\infty)$.
Il punto $x_0 = 1$ è un punto di minimo locale che è anche globale.
Il valore della funzione nel punto di minimo è $f(1) = -1$.
Il grafico della funzione è in Figura **??**

Soluzione esercizio 2.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \in (-\infty,\, 1] \\ 1 + \dfrac{2}{x-3} & \text{se } x \in (1,\, 3) \end{cases}$$

La funzione è composta da un tratto di retta e da un tratto di iperbole ed è continua in quanto nel punto $x = 1$ abbiamo che

$$f(1) = 0 = \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

Il punto $x = 3$ è un asintoto verticale poiché

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty.$$

Possiamo quindi facilmente disegnare il grafico di f, vedi Figura **??**.
Da questo grafico deduciamo che

$$\inf_{x\in(-\infty,\,3)} f(x) = -\infty, \quad \sup_{x\in(-\infty,\,3)} f(x) = \max_{x\in(-\infty,\,3)} f(x) = 0$$

in quanto

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \ \lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty, \quad f(1) = 0$$

(notate come il punto di massimo locale e globale sia in un punto di non derivabilità, punto angoloso); l'immagine della funzione è $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 0]$ e $\min_{x\in(-\infty,\,3} f(x)$ non esiste, mentre $\max_{x\in(-\infty,\,3} f(x)$ esiste.
(b)

$$g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \in [0,\,1] \\ 1+\dfrac{2}{x-3} & \text{se } x \in (1,\,2] \end{cases}$$

Il grafico di g è in Figura **??** .
Dal grafico deduciamo che

$$\sup_{x\in[0,\,2]} g(x) = g(1) = 0, \ \inf_{x\in[0,\,2]} g(x) = g(0) = -1 = g(2),$$

che sono anche massimo e minimo globali

$$\max_{x\in[0,\,2]} g(x) = 0, \ \min_{x\in[0,\,2]} g(x) = -1.$$

Soluzione esercizio 3.
a) Vedere libro di testo.
b) Lo sviluppo di Taylor fino al grado due di f nell'origine si può scrivere come

$$f\,(0) + \mathrm{D}(f)\,(0)\,x + \frac{D^2(f)(0)}{2!}x^2 + \frac{D^3(f)(\theta)}{3!}x^3, \quad \theta \text{ fra } 0 \text{ e } x$$

oppure

$$f\,(0) + \mathrm{D}(f)\,(0)\,x + \frac{D^2(f)(0)}{2!}x^2 + R_2(x)$$

dove

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0.$$

Per la nostra funzione abbiamo che

$$f(x) = \log(x^2+\mathrm{e}), \ D(f(x)) = 2\,\frac{x}{x^2+\mathrm{e}}, \ D^2(f)(x) = 2\,\frac{-x^2+\mathrm{e}}{(x^2+\mathrm{e})^2}$$

$$f(0) = 1, \ D(f)(0) = 0, \ D^2(f)(0) = \frac{2}{\mathrm{e}}$$

e quindi

$$f(x) = 1 + \frac{1}{\mathrm{e}}\,x^2 + R_2(x)$$

c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\log(x^2+\mathrm{e})-1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\mathrm{e}}\,x^2 + R_2(x)}{x^2} = \\ &= 1/\mathrm{e} + \lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = \frac{1}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 4. Data la continuità e derivabilità delle funzioni polinomio è sufficiente studiare la continuità e la derivabilità di f nel punto $-\frac{1}{2}$. Dato che la derivabilità implica la continuità è sufficiente verificare la derivabilità di f in quel punto. Notando che abbiamo che $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$ calcoliamo il limite destro e sinistro del rapporto incrementale

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} \frac{(x^2-1)+\frac{3}{4}}{x+\frac{1}{2}} = -1$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} \frac{(-x-\frac{5}{4})+\frac{3}{4}}{x+\frac{1}{2}} = -1.$$

La funzione è quindi derivabile (e continua) anche in $-\frac{1}{2}$, dunque f è continua in $\left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ e derivabile in $\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Poiché $f(-1) = -1/4 = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ le ipotesi del teorema di Rolle sono verificate.

Soluzione esercizio 5. Il profitto (lordo) dell'impresa è

$$P(x) = -x^2 + 5\,x + 7 - x = -x^2 + 4\,x + 7 - t(x)$$

dove la tassazione non è ancora stata scelta. Con la tassazione $t_1(x)$ (notate che è specificato che la tassazione è sull'input utilizzato) il profitto dell'impresa al netto della tassazione è

$$P_1(x) = P(x) - t_1(x) = -x^2 + 4\,x + 7 - x = -x^2 + 3\,x + 7.$$

Per trovare il massimo del profitto netto P_1 calcoliamo la derivata

$$D[P]_1(x) = -2\,x + 3.$$

Abbiamo che $D[P]_1(x) > 0$ in $[0, 3/2)$, mentre $D[P]_1(x) < 0$ in $(3/2, +\infty)$. Quindi il profitto netto P_1 cresce in $[0, 3/2)$ e decresce $(3/2, +\infty)$. Allora $x_1 = 3/2$ è un punto di massimo globale per P_1 ed è la scelta ottima dell'impresa in questo caso.
Il valore ottimo del profitto (non era richiesto) è

$$P_1(3/2) = 37/4$$

Il gettito della tassazione per $x = 1$ è uguale a $t_1(3/2) = 3/2$.
In modo analogo calcoliamo il profitto al netto della tassazione $t_2(x)$ ottenendo:

$$P_2(x) = P(x) - t_2(x) = -x^2 + 4\,x + 7 - \left(\frac{x^2}{2} + x\right) = -\frac{3\,x^2}{2} + 3\,x + 7$$

Calcolando di nuovo la derivata

$$P_2'(x) = -3\,x + 3,$$

e studiandola per $x \in [0, +\infty)$, troviamo che $P_2'(x) > 0$ in $[0, 1)$, $P_2'(x) < 0$ in $(1, +\infty)$. Quindi il profitto netto P_2 cresce in $[0, 1)$ e decresce $(1, +\infty)$. Allora $x_2 = 1$ è il punto di massimo globale per $P_2(x)$ ed è la scelta ottima dell'impresa sotto questa politica di tassazione. Il valore ottimo del profitto è

$$P_2(1) = 17/2$$

Il gettito della tassazione per $x_2 = 1$ è $t_2(1) = \frac{3}{2}$.
Vediamo che

$$t_1(x_1) = t_2(x_2)$$

quindi entrambe le scelte portano lo stesso risultato per il Governo.

Soluzione esercizio 6. Utilizzando alcuni limiti notevoli possiamo calcolare il primo limite come

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(x)}{e^{2x^2} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1-cos(x)}{x^2/2}\, x^2/2}{\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2} 2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2/2}{2x^2} = \frac{1}{4}.$$

Per quanto riguarda il secondo limite possiamo utilizzare il fatto che conosciamo il segno del polinomio quando x tende a meno infinito per eliminare i valori assoluti

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\left|x^2 + 2x - 1\right| + 2\,x^3}{|x^3 - 1| - 2x^2 - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 2\,x - 1 + 2\,x^3}{-x^3 + 1 - 2x^2 - x} = -2$$

Compito C del 11 Dicembre 2015

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte. Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):**

$$\boxed{1-\square,\ 2-\square,\ 3-\square,\ 4-\square,\ 5-\square,\ 6-\square}$$

Esercizio 1. (8 punti)
Si studi la funzione (dominio, limiti, asintoti, continuità, derivabilità)

$$f(x)=\sqrt[3]{(x+1)x}=(x^2+x)^{\frac{1}{3}}$$

e se ne disegni il grafico. Nello studio della funzione non è richiesto il calcolo della derivata seconda.

Esercizio 2. (7 punti)
Siano date le funzioni f, g definite come segue:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1-x & \text{se } x\le 1\\ 1-\frac{4}{x+3} & \text{se } x>1\end{cases}\qquad g:[0,2]\to\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases}1-x & \text{se } x\in[0,\,1]\\ 1-\frac{4}{x+3} & \text{se } x\in(1,\,2]\end{cases}$$

(a) Si determinino gli estremi superiore e inferiore di f e si dica se sono il massimo e il minimo di f.
(b) Si determinino gli estremi superiore e inferiore di g e si dica se sono il massimo e il minimo di g (g ha la stessa espressione di f, ma è definita solo nell'intervallo $[0,2]$).

Esercizio 3. (6 punti)
Si enunci il teorema di Taylor, specificando con precisione la proprietà del resto. Per la funzione $f(x)=e^{x^2+1}$ si calcolino la derivata prima e seconda in zero e si scriva il polinomio di Taylor di grado due nel punto $x_0=0$. Si calcoli il

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2+1}-e}{x^2},$$

possibilmente usando il polinomio di Taylor con resto.

Esercizio 4. (6 punti)
Si enunci e dimostri il teorema di Rolle.
Si consideri la funzione $f:\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}-x-\frac{5}{4} & se \quad x\le -\frac{1}{2}\\ x^2-1 & se \quad x>-\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Si verifichi che: (i) f è continua in $\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; (ii) f è derivabile in $\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; (iii) f soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Esercizio 5. (7 punti)
Un impresa produce un bene in quantità y usando un input x. La funzione di produzione è

$$y=f(x):=-x^2+5\,x+7\qquad x\in[0,\,5/2]$$

Il prezzo unitario di vendita del prodotto y è 1 e la funzione di costo è $c(x)=x$. L'impresa agisce massimizzando il profitto al netto dell'imposta $t(x)$

$$P\,(x)=1\cdot f\,(x)-c\,(x)-t(x)=f\,(x)-c\,(x)-t(x).$$

Il Governo può tassare l'input usato dall'impresa con una delle due imposte descritte dalle funzioni:

$$t_1(x)=x\quad \text{o}\quad t_2(x)=\frac{x^2}{2}+x.$$

All'impresa verrà comunicata quale sarà l'imposta e quindi massimizzerà il suo profitto di conseguenza. Quale delle due imposte massimizza le entrate per il Governo

Esercizio 6. (6 punti)
Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{e^{2\,x^2}-1}; \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{\left|x^2+2x-1\right| + 2\,x^3}{|x^3-1| - 2x^2 - x}.$$