Esame di Matematica per le Applicazioni Economiche
11 Gennaio 2016

— Fila A —

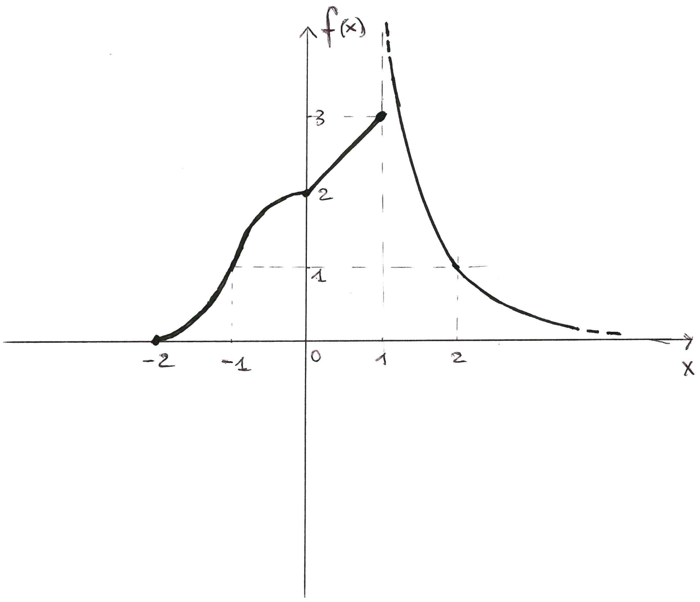
Durata della prova: 2 ore e mezzo.
NOTA: Spiegare con molta cura le risposte.
NOTAZIONE: $\log = \ln = \log_e$.

Esercizio 1 (8 punti)
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

(a) Determinare l'insieme di definizione $D(f)$ della funzione.
(b) Determinare sup e inf della funzione su $D(f)$ e dire se essi sono, rispettivamente, anche massimo e minimo.
(c) Stabilire se la funzione è pari, dispari oppure né pari né dispari.
(d) Sia $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in [0, +\infty)$ (cioè g è la restrizione di f all'insieme $[0, +\infty)$). Stabilire se g è iniettiva.

Esercizio 2 (6 punti)
Si consideri la funzione $f : [-2, +\infty) \to \mathbb{R}$ il cui grafico è rappresentato in figura (le rette $x = 1$ e $y = 0$ sono, rispettivamente, asintoto verticale e asintoto orizzontale per il grafico della funzione).



(a) Determinare gli intervalli di monotonia della funzione, specificandone la tipologia (crescente, strettamente crescente, ecc.).
(b) Determinare i punti di minimo e di massimo locale (se ve ne sono) della funzione.
(c) Sia $g : [-2, 1] \cup [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in [-2, 1] \cup [2, +\infty)$ (cioè g è la restrizione di f all'insieme $[-2, 1] \cup [2, +\infty)$). Si determini l'immagine di g (cioè l'insieme $g([-2, 1] \cup [2, +\infty))$).

Esercizio 3 (6 punti)
(a) Utilizzando la definizione di limite si verifichi che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$.
(b) Si calcoli (o si dimostri la non esistenza) di uno ed uno solo (a scelta) dei seguenti limiti:

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\log(1+\sqrt{x}))}{e^{\sqrt{x}} - 1}, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} \log(1/x).$$

Esercizio 4 (6 punti)
Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x+5}.$$

(a) Utilizzando la definizione di derivata, si verifichi che f è derivabile in ogni punto $x_0 \in (-5, +\infty)$ e si calcoli la sua derivata.
(b) Si dica se la funzione è concava in $(-5, +\infty)$.

Esercizio 5 (6 punti)
Si consideri la funzione $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{se} \quad x \in [0, 3], \\ \\ -x^2 + 10x - 18, & \text{se} \quad x \in (3, 6]. \end{cases}$$

(a) Si dica se il teorema di Lagrange è applicabile a tale funzione nell'intervallo $[0, 6]$.
(b) In caso affermativo, si determinino i punti (uno o più d'uno) interni all'intervallo $(0, 6)$ che verificano la condizione contenuta nella tesi del teorema di Lagrange.

Esercizio 6 (8 punti)
Si disegni il grafico della funzione (si trascuri lo studio della derivata seconda e della concavità/convessità)

$$f(x) = (x+1)^2 \cdot \log(x+1).$$

SOLUZIONE

Esercizio 1.
(a) L'espressione $\frac{x^2}{1+x^2}$ è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque $D(f) = \mathbb{R}$.
(b) Si noti che $0 \leq \frac{x^2}{1+x^2} < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. D'altra parte $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Se ne deduce che $\inf_{\mathbb{R}} f = 0$, $\sup_{\mathbb{R}} f = 1$ e che il primo è anche minimo di f su $\mathbb{R}$, mentre il secondo non è un massimo.
(c) Si ha $f(-x) = \frac{(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{x^2}{1+x^2} = f(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque f è pari.
(d) Occorre stabilire se, per ogni $y \in \mathbb{R}$, l'equazione $\frac{x^2}{1+x^2} = y$ ha al più una soluzione in $[0, +\infty)$. Si ha

$$\frac{x^2}{1+x^2} = y \;\Leftrightarrow\; x^2 - y - yx^2 = 0 \Leftrightarrow\; (1-y)\,x^2 = y \Leftrightarrow\; x^2 = \frac{y}{1-y}.$$

Se ne deduce che l'equazione data

- non ha nessuna soluzione nell'intervallo $[0, +\infty)$ se $y \notin [0, 1)$;
- ha l'unica soluzione $x = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$ nell'intervallo $[0, +\infty)$ se $y \in [0, 1)$.

Si conclude che g è iniettiva.

Esercizio 2.
(a) f è strettamente crescente nell'intervallo $[-2, 1]$ e strettamente decrescente nell'intervallo $(2, +\infty)$.
(b) Punti di massimo locale: nessuno. Punti di minimo locale: $x = -2$.
(c) Il grafico della funzione g interseca, almeno in un punto, tutte e sole le rette orizzontali della forma $y = k$ con $k \in [0, 3]$. Se ne deduce che $\mathrm{Im}(g) = [0, 3]$.

Esercizio 3.
(a) Occorre verificare che

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R}:\ x > M \;\Rightarrow\; \left|\frac{x^2}{1+x^2} - 1\right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Cioè, bisogna verificare che l'insieme delle soluzioni della disequazione $\left|\frac{x^2}{1+x^2} - 1\right| < \varepsilon$ contiene un intervallo della forma $[M, +\infty)$, con M (eventualmente) dipendente da ε. Si ha

$$\left|\frac{x^2}{1+x^2} - 1\right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; -\varepsilon < \frac{x^2}{1+x^2} - 1 < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; -\varepsilon < -\frac{1}{1+x^2} < \varepsilon.$$

Poiché $1 + x^2 > 0$ la precedente coppia di disuguaglianze si può riscrivere come

$$\varepsilon(1+x^2) + 1 > 0 \;\wedge\; -\varepsilon(1+x^2) + 1 < 0.$$

La prima disuguaglianza è sempre verificata; la seconda si riscrive

$$-\varepsilon - \varepsilon x^2 + 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; \varepsilon x^2 -\ 1 + \varepsilon > 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} > 0,$$

per cui è verificata ([1]) per $x > \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$. Dunque (1) resta verificata con $M = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$ ([2])
(b.i) Dividendo e moltiplicando l'espressione di cui si vuole calcolare il limite per $\sqrt{x}\log(1+\sqrt{x})$ si ottiene

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin\left(\log\left(1+\sqrt{x}\right)\right)}{e^{\sqrt{x}} - 1} = \left(\lim_{x\to0^+} \frac{\sin\left(\log\left(1+\sqrt{x}\right)\right)}{\log\left(1+\sqrt{x}\right)}\right)\left(\lim_{x\to0^+} \frac{\left(\log\left(1+\sqrt{x}\right)\right)}{\sqrt{x}}\right)\left(\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}} - 1}\right),$$

assumendo che il membro destro sia ben definito. Effettuando le sostituzioni iniettive $y = \log\left(1+\sqrt{x}\right)$ nel primo limite a membro destro e $z = \sqrt{x}$ nel secondo e nel terzo, la precedente espressione si riscrive come

$$\left(\lim_{y\to0^+} \frac{\sin y}{y}\right)\left(\lim_{z\to0^+} \frac{\left(\log\left(1+z\right)\right)}{z}\right)\left(\lim_{z\to0^+} \frac{z}{e^z - 1}\right),$$

da cui si deduce che il valore del limite da cui si era partiti è 1.

[1] Assumendo $\varepsilon \in (0, 1]$, altrimenti vale sempre.
[2] Se $\varepsilon \in (0, 1]$, altrimenti con $M = 0$. Ma si noti che la definizione di limite è significativa per ε "piccolo".

(b.ii) Con la sostituzione iniettiva (su $(0,+\infty)$) $y = 1/x$ e tenendo conto dell'ordinamento della gerarchia di infiniti si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x}\log(1/x) = \lim_{y\to+\infty} e^{-y}\log y = \lim_{y\to+\infty}\frac{\log y}{e^y} = 0.$$

Esercizio 4.

(a) Sia $x_0 \in (-5,+\infty)$. Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x_0+5}}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x_0+5}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x_0+5}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x_0+5}\right)} \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{(x+5)-(x_0+5)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x_0+5}\right)} \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x_0+5}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0+5}}.
\end{aligned}$$

Dunque f è derivabile in $(-5,+\infty)$ e, in tale intervallo, risulta $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$.

(b) Poichè $f'(x) = \frac{1}{2}(x+5)^{-\frac{1}{2}}$, si ha $f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(x+5)^{-\frac{3}{2}} < 0$ per qualsiasi $x \in (-5,+\infty)$. Dunque la funzione è (strettamente) concava.

Esercizio 5.

(a) Per l'applicabilità del teorema, occorre verificare che f sia continua in $[0,6]$ e derivabile in $(0,6)$.
Poichè le funzioni f_1, f_2 definite da $f_1(x) := x^2-2x$ e $f_2(x) := x^2+10x+18$ sono funzioni polinomiali, si ha che f è continua negli intervalli $[0,3)$ e $(3,6]$ e derivabile negli intervalli $(0,3)$ e $(3,6)$.
Restano da verificare la continuità e la derivabilità nel punto $x = 3$.
Per verificare la derivabilità (e dunque la continuità) in $x = 3$ sarà sufficiente verificare che le derivate destra e sinistra in $x = 3$ esistono finite e coincidono in tale punto. In effetti

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-\left(3^2-2\cdot 3\right)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = 4,$$

e

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{-x^2+10x-18-\left(3^2-2\cdot 3\right)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{-x^2+10x-21}{x-3} =$$

$$= -\lim_{x\to 3}\frac{x^2-10x+21}{x-3} = -\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-7)}{x-3} = 4.$$

Se ne deduce che il teorema di Lagrange è applicabile.
La continuità in $x = 3$ poteva essere verificata direttamente. Infatti

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(x^2-2x) = 3,$$

$$f(3) = 3,$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left(-x^2+10x-18\right) = 3,$$

e dunque

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3) = \lim_{x\to 3^+} f(x).$$

(b) Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-2, & \text{se} \quad x \in [0,3), \\ 4, & \text{se} \quad x = 3, \\ -2x+10, & \text{se} \quad x \in (3,6]. \end{cases}$$

Vogliamo trovare le soluzioni $x \in (0,6)$ dell'equazione

$$f'(x) = \frac{f(6)-f(0)}{6-0} = \frac{(-36+60-18)-0}{6} = 1.$$

La precedente equazione si riscrive spezzandosi in due equazioni in due diversi intervalli:

$$\begin{cases} 2x-2=1, & \text{se } x\in(0,3), \\ -2x+10=1, & \text{se } x\in(3,6)\,, \end{cases}$$

da cui si ricavano le due soluzioni $\frac{3}{2}$ e $\frac{9}{2}$. Entrambi questi punti soddisfano la condizione contenuta nella tesi del teorema di Lagrange.

Esercizio 6

1. Dominio.

dom $f=(-1,+\infty)$.

2. Segno di f.

Intanto notiamo che $f(0)=0$ e che il segno di $(x+1)^2$ è sempre positivo. D'altra parte $\log(x+1)\geq 0$ se e solo se $x+1\geq 1$ ovvero se e solo se $x\geq 0$. Dunque il segno di f è il seguente

	$x\in(-1,0)$	$x=0$	$x\in(0,+\infty)$
Segno di f	$-$	0	$+$

3. Comportamento a -1^+. Si ha

$$\lim_{x\to-1^+}(x+1)^2\cdot\log(x+1)=\text{“}0\cdot(-\infty)\text{”}.$$

Per risolvere la forma indeterminata possiamo usare il teorema di de l'Hospital:

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{\log(x+1)}{(x+1)^{-2}}=\lim_{x\to-1^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{-2(x+1)^{-3}}=\lim_{x\to-1^+}\frac{(x+1)^3}{-2(x+1)}=\lim_{x\to-1^+}\frac{(x+1)^2}{-2}=0$$

4. Comportamento a $+\infty$ ed eventuali asintoti orizzontali.

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)^2\cdot\log(x+1)=+\infty.$$

5. Derivata prima.

Utilizzando le regole di derivazione si ottiene

$$f'(x)=2(x+1)\log(x+1)+(x+1)^2\frac{1}{x+1}=2(x+1)\log(x+1)+(x+1)=(x+1)(2\log(x+1)+1)\,.$$

Poichè *dom* $f=(-1,+\infty)$, il segno di $f'(x)$ è il segno di $1+2\log(x+1)$. Si ha

$$2\log(x+1)+1\geq 0 \;\Leftrightarrow\; \log(x+1)\geq-\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x+1\geq e^{-\frac{1}{2}} \;\Leftrightarrow\; x\geq e^{-\frac{1}{2}}-1=\frac{1}{\sqrt{e}}-1=\frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$$

Si noti che $\frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}\in(-1,0)$. Si ha il seguente schema:

	$x\in(-1,\frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}})$	$x=\frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$	$x\in(\frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}},+\infty)$
Segno di f'	$-$	0	$+$
Monotonia di f	decrescente	p.to min.	crescente

Dunque f ha un punto di minimo (globale) in $x=\frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$ ed il valore della funzione in tale punto è

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-1\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-1+1\right)^2\cdot\log\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-1+1\right)=\frac{1}{e}\cdot\log\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}\right)=\frac{1}{e}\cdot\left(-\frac{1}{2}\log e\right)=-\frac{1}{2e}.$$

$f(x) = (x+1)^2 \cdot \log(x+1)$