ESAME DI MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE
14 GIUGNO 2016
— FILA A —

Durata della prova: 2 ore e mezza.

NOTA: Spiegare con molta cura le risposte.

NOTAZIONE: $\log = \ln = \log_e$.

Esercizio 1 (5 punti)

Sia $a \in \mathbb{R}$ e si consideri la seguente funzione definita a tratti.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{se } x < 0, \\ \sin x, & \text{se } x \in [0, \pi], \\ x - a, & \text{se } x > \pi. \end{cases}$$

(a) Si determini, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'insieme di definizione di f.

(b) Si stabilisca per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ (se esistono) la funzione è continua nel punto di ascissa $x = \pi$.

(c) Si tracci il grafico della funzione quando $a = 1$.

Esercizio 2 (6 punti)

(a) Si enunci il teorema di Weirstrass.

(b) Si dimostri, con un controesempio, che la tesi del teorema non è in generale verificata se si elimina l'ipotesi di continuità.

(c) Si fornisca l'espressione analitica (anche definita a tratti) di una funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ che sia discontinua in $x = 0$ e che ammette massimo e minimo sull'intervallo $[-1, 1]$.

Esercizio 3 (4 punti)

(a) Si determini l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = (\log x) \sin\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

(b) Si calcoli (se esiste) $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Esercizio 4 (12 punti)

Si consideri la funzione

$$f(x) = |x|\, e^{-\frac{1}{x}}.$$

(a) Se ne disegni il grafico, studiandone dominio, segno, limiti (giustificati opportunamente), monotonia. Si tralasci lo studio della convessità/concavità.

(b) Si determinino gli estremi superiore ed inferiore della funzione sul suo dominio di definizione $D(f)$ e si dica se essi sono, rispettivamente, anche massimo e minimo globali.

(c) Si dia la definizione di funzione iniettiva e si dica se f è iniettiva tramite l'analisi del grafico.

Esercizio 5 (5 punti)

(a) Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dia la definizione di

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

(b) Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x + x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Esercizio 6 (8 punti)

(a) Si diano le definizioni di

(i) funzione crescente in $\mathbb{R}$

(ii) funzione derivabile in $\mathbb{R}$.

(b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando la risposta con una dimostrazione o un controesempio (la risposta "vero" o "falso" senza spiegazione dà zero punti anche se coretta).

(i) Se la funzione f è derivabile in $\mathbb{R}$, allora f è continua in $\mathbb{R}$.

(ii) Se la funzione f è continua in $\mathbb{R}$, allora f è derivabile in $\mathbb{R}$.

(iii) Se la funzione f è crescente in $\mathbb{R}$, allora per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$.

(iv) Se la funzione f è derivabile in $\mathbb{R}$ ed esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di massimo locale per f o di minimo locale per f.

ESAME DI MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE
14 GIUGNO 2016
— FILA B —

Durata della prova: 2 ore e mezza.

NOTA: Spiegare con molta cura le risposte.

NOTAZIONE: $\log = \ln = \log_e$.

Esercizio 1 (5 punti)

Sia $a \in \mathbb{R}$ e si consideri la seguente funzione definita a tratti.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } x < 0, \\ -\sin x, & \text{se } x \in [0, \pi], \\ x - a, & \text{se } x > \pi. \end{cases}$$

(a) Si determini, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'insieme di definizione di f.

(b) Si stabilisca per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ (se esistono) la funzione è continua nel punto di ascissa $x = \pi$.

(c) Si tracci il grafico della funzione quando $a = 1$.

Esercizio 2 (6 punti)

(a) Si enunci il teorema di Weirstrass.

(b) Si dimostri, con un controesempio, che la tesi del teorema non è in generale verificata se si elimina l'ipotesi di continuità.

(c) Si fornisca l'espressione analitica (anche definita a tratti) di una funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua che ammette minimo ma non massimo sull'intervallo $[0, +\infty)$.

Esercizio 3 (4 punti)

(a) Si determini l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = (\log(x-1)) \sin\left(\frac{1}{\log(x-1)}\right).$$

(b) Si calcoli (se esiste) $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Esercizio 4 (12 punti)

Si consideri la funzione
$$f(x) = |x|\, e^{-\frac{1}{x}}.$$

(a) Se ne disegni il grafico, studiandone dominio, segno, limiti (giustificati opportunamente), monotonia. Si tralasci lo studio della convessità/concavità.

(b) Si determinino gli estremi superiore ed inferiore della funzione sul suo dominio di definizione $D(f)$ e si dica se essi sono, rispettivamente, anche massimo e minimo globali.

(c) Si dia la definizione di funzione iniettiva e si dica se f è iniettiva tramite l'analisi del grafico.

Esercizio 5 (5 punti)

(a) Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dia la definizione di
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

(b) Si calcoli il seguente limite
$$\lim_{x\to0^+} \left(x + x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Esercizio 6 (8 punti)

(a) Si diano le definizioni di

  (i) funzione crescente in $\mathbb{R}$

  (ii) funzione derivabile in $\mathbb{R}$.

(b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando la risposta con una dimostrazione o un controesempio (la risposta "vero" o "falso" senza spiegazione dà zero punti anche se coretta).

  (i) Se la funzione f è derivabile in $\mathbb{R}$, allora f è continua in $\mathbb{R}$.

  (ii) Se la funzione f è continua in $\mathbb{R}$, allora f è derivabile in $\mathbb{R}$.

  (iii) Se la funzione f è crescente in $\mathbb{R}$, allora per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$.

  (iv) Siano $a, b \in \mathbb{R}$. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ è derivabile in $\mathbb{R}$ e se $b > 0$ allora f è crescente.

Esame di Matematica per le Applicazioni Economiche
14 Giugno 2016
— Fila C —

Durata della prova: 2 ore e mezza.

NOTA: Spiegare con molta cura le risposte.

NOTAZIONE: $\log = \ln = \log_e$.

Esercizio 1 (5 punti)

Sia $a \in \mathbb{R}$ e si consideri la seguente funzione definita a tratti.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } x < 0, \\ \cos x, & \text{se } x \in [0, \pi], \\ x + a, & \text{se } x > \pi. \end{cases}$$

(a) Si determini, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'insieme di definizione di f.

(b) Si stabilisca per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ (se esistono) la funzione è continua nel punto di ascissa $x = \pi$.

(c) Si tracci il grafico della funzione quando $a = 1$.

Esercizio 2 (6 punti)

(a) Si enunci il teorema di Weirstrass.

(b) Si dimostri, con un controesempio, che la tesi del teorema non è in generale verificata se si elimina l'ipotesi di continuità.

(c) Si fornisca l'espressione analitica (anche definita a tratti) di una funzione

$$f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$$

che sia continua e che ammette massimo e minimo sull'intervallo $(-\infty, 0)$.

Esercizio 3 (4 punti)

(a) Si determini l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = (\log(x+1)) \sin\left(\frac{1}{\log(x+1)}\right).$$

(b) Si calcoli (se esiste) $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Esercizio 4 (12 punti)

Si consideri la funzione
$$f(x) = |x|\, e^{-\frac{1}{x}}.$$

(a) Se ne disegni il grafico, studiandone dominio, segno, limiti (giustificati opportunamente), monotonia. Si tralasci lo studio della convessità/concavità.

(b) Si determinino gli estremi superiore ed inferiore della funzione sul suo dominio di definizione $D(f)$ e si dica se essi sono, rispettivamente, anche massimo e minimo globali.

(c) Si dia la definizione di funzione iniettiva e si dica se f è iniettiva tramite l'analisi del grafico.

Esercizio 5 (5 punti)

(a) Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dia la definizione di
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

(b) Si calcoli il seguente limite
$$\lim_{x \to 0^+} \left(x + x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Esercizio 6 (8 punti)

(a) Si diano le definizioni di

  (i) funzione decrescente in $\mathbb{R}$
  (ii) funzione derivabile in $\mathbb{R}$.

(b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando la risposta con una dimostrazione o un controesempio (la risposta "vero" o "falso" senza spiegazione dà zero punti anche se coretta).

  (i) Se la funzione f è derivabile in $\mathbb{R}$, allora f è continua in $\mathbb{R}$.
  (ii) Se la funzione f è continua in $\mathbb{R}$, allora f è derivabile in $\mathbb{R}$.
  (iii) Se la funzione f è decrescente in $\mathbb{R}$, allora per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \leq 0$.
  (iv) Siano $a, b \in \mathbb{R}$. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ è derivabile in $\mathbb{R}$ e se $b < 0$ allora f è decrescente.

SOLUZIONI FILA A

Esercizio 1.

(a) L'insieme di definizione è $\mathbb{R}$ per ogni valore del parametro $a \in \mathbb{R}$.

(b) Si ha

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} \sin x = \sin\pi = 0, \qquad \lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} (x-a) = \pi - a.$$

Dunque la condizione di continuità porta ad imporre $0 = \pi - a$. Se ne deduce che f è continua in $x = \pi$ se e solo se $a = \pi$.

(c) `FARE GRAFICO`

Esercizio 2.

(a) Si veda il libro.

(b) La funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0, \\ x, & \text{se } x \in (0,1], \end{cases}$$

non ammette minimo in $[0,1]$.

(c) La funzione $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & \text{se } x \in [-1,0), \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ x+1, & \text{se } x \in (0,1], \end{cases}$$

è discontinua in $x = 0$, ma ammette massimo (valore 2 ottenuto per $x = \pm 1$) e minimo (valore 0 ottenuto in $x = 0$).

Esercizio 3.

(a) Si deve imporre la condizione per l'esistenza del logaritmo, cioè $x > 0$, e la condizione di non annullamento del denominatore, cioè $x \neq 1$. Dunque l'insieme di definizione della funzione è l'insieme $(0,1) \cup (1,+\infty)$.

(b) La quantità $\sin(\frac{1}{\log x})$ è limitata e $\lim_{x\to 1} \log x = 0$. Per un ben noto risultato, corollario del teorema del confronto o dei due carabinieri, si deduce che il limite richiesto esiste ed è uguale a 0.

Esercizio 4.

(a) Dominio. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Segno di f. Poichè $|x| > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in D(f).$$

Comportamento nei punti di discontinuità. Si ha

$$\lim_{x \to 0^-} |x| \, e^{-\frac{1}{x}} \overset{y := -\frac{1}{x}}{=} \lim_{y \to +\infty} \left| -\frac{1}{y} \right| e^y = +\infty.$$

$$\lim_{x \to 0^+} |x| \, e^{-\frac{1}{x}} = \text{“}0 \cdot e^{-\infty}\text{”} = 0.$$

Dunque l'asse delle ordinate è un asintoto verticale per il grafico della funzione a sinistra di 0.

Comportamento a $\pm\infty$ ed eventuali asintoti orizzontali. Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} |x| \, e^{-\frac{1}{x}} = \text{“}(+\infty) \cdot e^{0}\text{”} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} |x| \, e^{-\frac{1}{x}} = \text{“}(+\infty) \cdot e^{0}\text{”} = +\infty.$$

Dunque non ci sono asintoti orizzontali.

Calcolo di f' e studio del suo segno. Si osservi che

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x}} & se \quad x > 0 \\ -xe^{-\frac{1}{x}} & se \quad x < 0 \end{cases}$$

ovvero, definita $g(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$,

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & se \quad x > 0 \\ -g(x) & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Si ha inoltre

$$g'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + x\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

e dunque

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right) & se \quad x > 0 \\ -e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right) & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Dunque si ha:

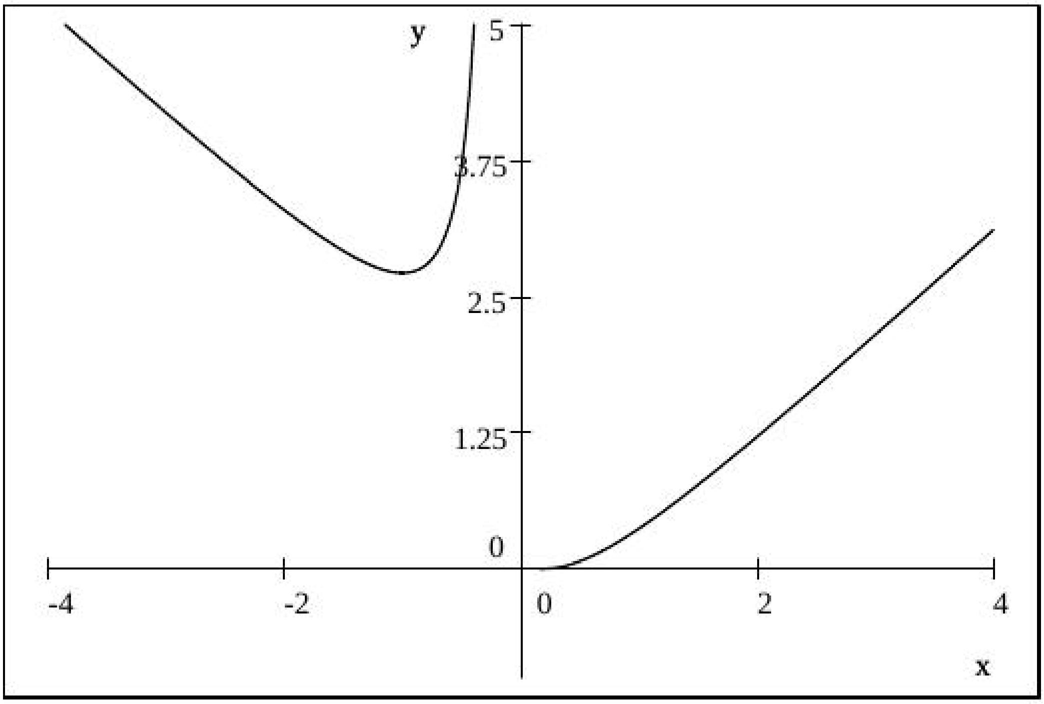
- $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$;

- Poichè $-\left(1+\frac{1}{x}\right)>0 \Leftrightarrow -\frac{x+1}{x}>0 \Leftrightarrow x \in (-1,0)$,

$$f'(x) = \begin{cases} >0, & \text{se } x \in (-1,0), \\ =0, & \text{se } x=-1, \\ <0, & \text{se } x<-1. \end{cases}$$

Monotonia di f. Dallo studio del segno della f' si deduce che

- f è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty,-1]$;
- f ha un minimo locale in $x=-1$;
- f è strettamente crescente (separatamente) negli intervalli $[-1,0)$ e $(0,+\infty)$.



(b) Poichè $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si ha $\sup_{D(f)} f = +\infty$; chiaramente, tale valore non è un massimo. Poichè $f>0$ ovunque e $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$, risulta $\inf_{D(f)} f = 0$ e tale valore non è un minimo.

(c) Definizione: Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ si dice iniettiva se vale l'implicazione

$$f(x') = f(x'') \Rightarrow x' = x'', \quad \forall x', x'' \in A.$$

La funzione studiata sopra non è iniettiva su $D(f)$: infatti, dall'analisi del grafico, si ricava che per ogni $y \geq e$, l' equazione $f(x)=y$ nella incognita x ha tre soluzioni.

Esercizio 5.

(a) La definizione di
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$
è la seguente:
$$\forall K > 0,\ \exists a \in \mathbb{R} : \forall x < a,\ \text{risulta } f(x) > K.$$

(b) Si ha
$$\lim_{x\to 0^+} \left(x + x^2\right)^{\frac{1}{x^2}} = \text{``}\left(0^+\right)^{\frac{1}{0^+}}\text{''} = \text{``}\left(0^+\right)^{+\infty}\text{''} = \text{``}e^{+\infty\cdot\log 0^+}\text{''} = \text{``}e^{-\infty}\text{''} = 0.$$

Esercizio 6.

(a) (i) Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice crescente se
$$x' < x'' \Rightarrow f(x') \le f(x''), \quad \forall x', x'' \in \mathbb{R}.$$

(ii) Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice derivabile in $\mathbb{R}$ se per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ il seguente limite esiste ed è finito
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

(b) (i) Vero. Si veda il libro di testo.

(ii) Falso. Controesempio: la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ è continua ma non derivabile in $x = 0$.

(iii) Falso. Non è detto che una funzione crescente sia derivabile dappertutto (quindi non ha senso l'espressione $f'(x) \ge 0$): per esempio la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \le 0, \\ 0, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$
è crescente in $\mathbb{R}$, ma $f'(0)$ non esiste.

(iv) Falso. Contresempio: la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ è una funzione derivabile in $\mathbb{R}$, con derivata $f'(x) = 3x^2$; dunque $f'(0) = 0$ e tuttavia $x_0 = 0$ non è né un punto di massimo locale, né un punto di minimo locale, poichè la funzione è strettamente crescente, come è immediato verificare. Si tratta infatti di un punto stazionario di tipo flesso a tangente orizzontale.

SOLUZIONI FILA B

Esercizio 1.

(a) L'insieme di definizione è $\mathbb{R}$ per ogni valore del parametro $a \in \mathbb{R}$.

(b) Si ha

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} (-\sin x) = -\sin\pi = 0, \qquad \lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} (x-a) = \pi - a.$$

Dunque la condizione di continuità porta ad imporre $0 = \pi - a$. Se ne deduce che f è continua in $x = \pi$ se e solo se $a = \pi$.

(c) `FARE GRAFICO`

Esercizio 2.

(a) Si veda il libro.

(b) La funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0, \\ x, & \text{se } x \in (0,1], \end{cases}$$

non ammette minimo in $[0,1]$.

(c) La funzione $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ è continua in $[0,+\infty)$, ammette minimo in $x = 0$, ma non ammette massimo (infatti $\sup_{[0,+\infty)} f = +\infty$).

Esercizio 3.

(a) Si deve imporre la condizione per l'esistenza del logaritmo, cioè $x-1>0$, e la condizione di non annullamento del denominatore, cioè $x-1 \neq 1$. Dunque l'insieme di definizione della funzione è l'insieme $(1,2)\cup(2,+\infty)$.

(b) La quantità $\sin(\frac{1}{\log(x-1)})$ è limitata e $\lim_{x\to 2}\log(x-1) = 0$. Per un ben noto risultato, corollario del teorema del confronto o dei due carabinieri, si deduce che il limite richiesto esiste ed è uguale a 0.

Esercizio 4.

(a) Dominio. $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Segno di f. Poichè $|x| > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(x) > 0, \ \ \forall x \in D(f).$$

Comportamento nei punti di discontinuità. Si ha

$$\lim_{x\to 0^-} |x|\, e^{-\frac{1}{x}} \overset{y:=-\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to+\infty} \left|-\frac{1}{y}\right| e^y = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^+} |x|\, e^{-\frac{1}{x}} = \text{“}0 \cdot e^{-\infty}\text{”} = 0.$$

Dunque l'asse delle ordinate è un asintoto verticale per il grafico della funzione a sinistra di 0.

Comportamento a $\pm\infty$ ed eventuali asintoti orizzontali. Si ha

$$\lim_{x\to -\infty} |x|\, e^{-\frac{1}{x}} = \text{“}(+\infty) \cdot e^{0}\text{”} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to +\infty} |x|\, e^{-\frac{1}{x}} = \text{“}(+\infty) \cdot e^{0}\text{”} = +\infty.$$

Dunque non ci sono asintoti orizzontali.

Calcolo di f' e studio del suo segno. Si osservi che

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x}} & se \quad x > 0 \\ \\ -xe^{-\frac{1}{x}} & se \quad x < 0 \end{cases}$$

ovvero, definita $g(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$,

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & se \quad x > 0 \\ \\ -g(x) & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Si ha inoltre

$$g'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + x\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

e dunque

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right) & se \quad x > 0 \\ \\ -e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right) & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Dunque si ha:

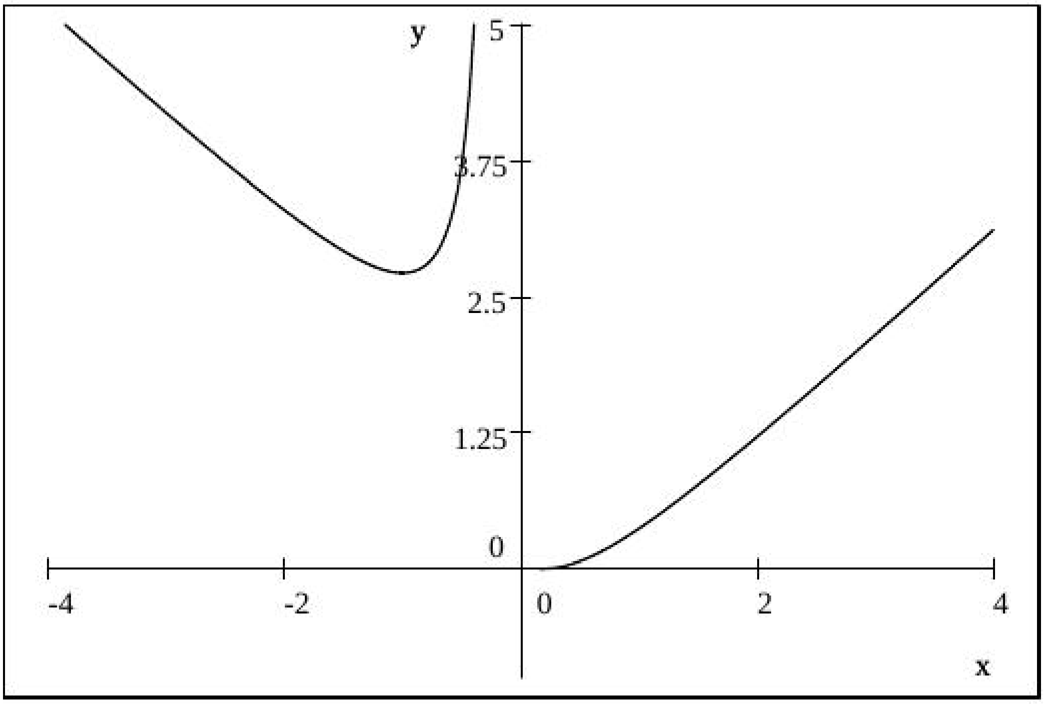
- $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$;
- Poichè $-\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0 \Leftrightarrow -\frac{x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0)$,

$$f'(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in (-1, 0), \\ = 0, & \text{se } x = -1, \\ < 0, & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

Monotonia di f. Dallo studio del segno della f' si deduce che

- f è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty, -1]$;
- f ha un minimo locale in $x = -1$;

- f è strettamente crescente (separatamente) negli intervalli $[-1,0)$ e $(0,+\infty)$.



(b) Poichè $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si ha $\sup_{D(f)} f = +\infty$; chiaramente, tale valore non è un massimo. Poichè $f > 0$ ovunque e $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$, risulta $\inf_{D(f)} f = 0$ e tale valore non è un minimo.

(c) Definizione: Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice iniettiva se vale l'implicazione

$$f(x') = f(x'') \Rightarrow x' = x'', \quad \forall x', x'' \in A.$$

La funzione studiata sopra non è iniettiva su $D(f)$: infatti, dall'analisi del grafico, si ricava che per ogni $y \geq e$, l' equazione $f(x) = y$ nella incognita x ha tre soluzioni.

Esercizio 5.

(a) La definizione di

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

è la seguente:

$$\forall K < 0, \ \exists a \in \mathbb{R} : \forall x < a, \text{ risulta } f(x) < K.$$

(b) Si ha

$$\lim_{x\to0^+} \left(x + x^2\right)^{\frac{1}{x^2}} = \text{“}\left(0^+\right)^{\frac{1}{0^+}}\text{”} = \text{“}\left(0^+\right)^{+\infty}\text{”} = \text{“}e^{+\infty\cdot\log 0^+}\text{”} = \text{“}e^{-\infty}\text{”} = 0.$$

Esercizio 6.

(a) (i) Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice crescente se

$$x' < x'' \Rightarrow f(x') \leq f(x''), \quad \forall x', x'' \in \mathbb{R}.$$

(ii) Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice derivabile in $\mathbb{R}$ se per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ il seguente limite esiste ed è finito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

(b) (i) Vero. Si veda il libro di testo.

(ii) Falso. Controesempio: la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ è continua ma non derivabile in $x = 0$.

(iii) Falso. Non è detto che una funzione crescente sia derivabile dappertutto (quindi non ha senso l'espressione $f'(x) \geq 0$): per esempio la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 0, \\ 0, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

è crescente in $\mathbb{R}$, ma $f'(0)$ non esiste.

(iv) Falso.

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ in effetti è derivabile in $\mathbb{R}$ e la sua derivata è $f'(x) = a$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

La funzione è crescente se e solo se $a \geq 0$. Quindi la seconda parte della affermazione è falsa. Controesempio: $f(x) = -x + 1$.

SOLUZIONI FILA C

Esercizio 1.

(a) L'insieme di definizione è $\mathbb{R}$ per ogni valore del parametro $a \in \mathbb{R}$.

(b) Si ha

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} \cos x = \cos\pi = -1, \qquad \lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} (x+a) = \pi + a.$$

Dunque la condizione di continuità porta ad imporre $-1 = \pi + a$. Se ne deduce che f è continua in $x = \pi$ se e solo se $a = -(\pi + 1)$.

(c) `FARE GRAFICO`

Esercizio 2.

(a) Si veda il libro.

(b) La funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0, \\ x, & \text{se } x \in (0,1], \end{cases}$$

non ammette minimo in $[0,1]$.

(c) La funzione $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ identicamente uguale alla costante 1 (cioè definita da $f(x) = 1$ per ogni $x \in (-\infty, 0)$) è continua sull'intervallo $(-\infty, 0)$. Tutti i punti del dominio sono punti di massimo e minimo per la funzione.

Esercizio 3.

(a) Si deve imporre la condizione per l'esistenza del logaritmo, cioè $x + 1 > 0$, ovvero $x \geq -1$ e la condizione di non annullamento del denominatore, cioè $x + 1 \neq 1$, ovvero $x \neq 0$. Dunque l'insieme di definizione della funzione è l'insieme $(-1, +\infty)\setminus\{0\}$.

(b) La quantità $\sin(\frac{1}{\log(x+1)})$ è limitata e $\lim_{x\to 0} \log(x+1) = 0$. Per un ben noto risultato, corollario del teorema del confronto o dei due carabinieri, si deduce che il limite richiesto esiste ed è uguale a 0.

Esercizio 4.

(a) Dominio. $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Segno di f. Poichè $|x| > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(x) > 0, \;\; \forall x \in D(f).$$

Comportamento nei punti di discontinuità. Si ha

$$\lim_{x \to 0^-} |x|\, e^{-\frac{1}{x}} \overset{y:=-\frac{1}{x}}{=} \lim_{y \to +\infty} \left| -\frac{1}{y} \right| e^y = +\infty.$$

$$\lim_{x \to 0^+} |x|\, e^{-\frac{1}{x}} = \text{“}0 \cdot e^{-\infty}\text{”} = 0.$$

Dunque l'asse delle ordinate è un asintoto verticale per il grafico della funzione a sinistra di 0.

Comportamento a $\pm\infty$ ed eventuali asintoti orizzontali. Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} |x|\, e^{-\frac{1}{x}} = \text{“}(+\infty) \cdot e^{0}\text{”} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} |x|\, e^{-\frac{1}{x}} = \text{“}(+\infty) \cdot e^{0}\text{”} = +\infty.$$

Dunque non ci sono asintoti orizzontali.

Calcolo di f' e studio del suo segno. Si osservi che

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x}} & se \quad x > 0 \\ -xe^{-\frac{1}{x}} & se \quad x < 0 \end{cases}$$

ovvero, definita $g(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$,

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & se \quad x > 0 \\ -g(x) & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Si ha inoltre

$$g'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + x\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

e dunque

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right) & se \quad x > 0 \\ -e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right) & se \quad x < 0 \end{cases}$$

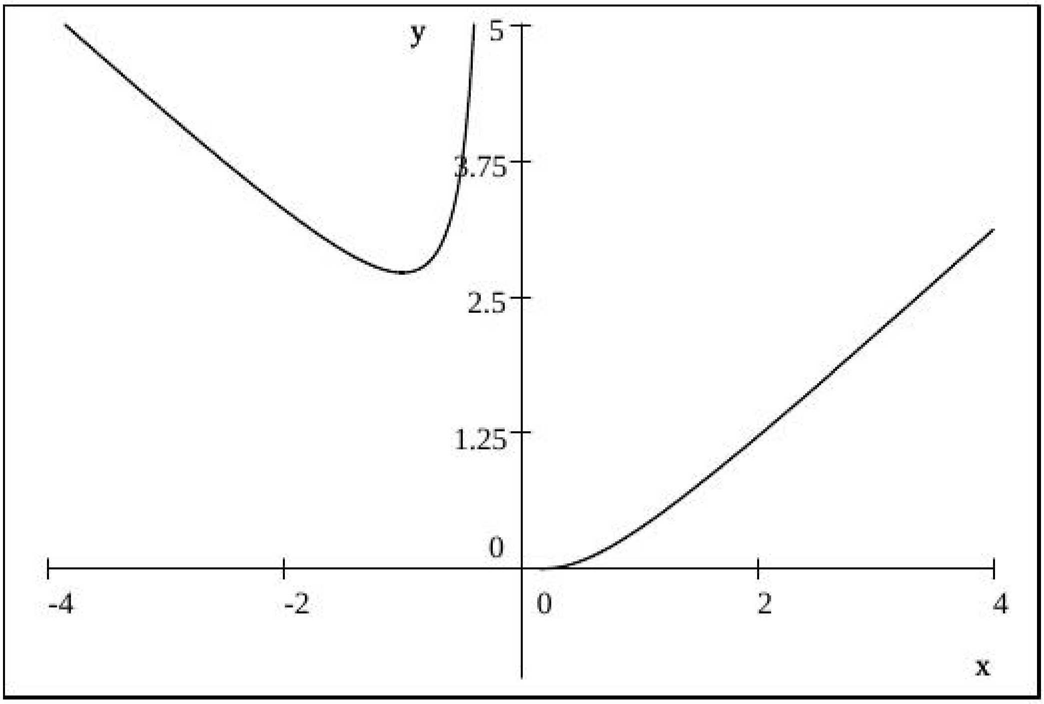
Dunque si ha:

- $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$;
- Poichè $-\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0 \Leftrightarrow -\frac{x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0)$,

$$f'(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in (-1, 0), \\ = 0, & \text{se } x = -1, \\ < 0, & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

Monotonia di f. Dallo studio del segno della f' si deduce che

- f è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty, -1]$;
- f ha un minimo locale in $x = -1$;
- f è strettamente crescente (separatamente) negli intervalli $[-1, 0)$ e $(0, +\infty)$.



(b) Poichè $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si ha $\sup_{D(f)} f = +\infty$; chiaramente, tale valore non è un massimo. Poichè $f > 0$ ovunque e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, risulta $\inf_{D(f)} f = 0$ e tale valore non è un minimo.

(c) Definizione: Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice iniettiva se vale l'implicazione

$$f(x') = f(x'') \Rightarrow x' = x'', \quad \forall x', x'' \in A.$$

La funzione studiata sopra non è iniettiva su $D(f)$: infatti, dall'analisi del grafico, si ricava che per ogni $y \geq e$, l' equazione $f(x) = y$ nella incognita x ha tre soluzioni.

Esercizio 5.

(a) La definizione di

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

è la seguente:

$$\forall K < 0,\ \exists a \in \mathbb{R} : \forall x > a,\ \text{risulta } f(x) < K.$$

(b) Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x + x^2\right)^{\frac{1}{x^2}} = \text{“}\left(0^+\right)^{\frac{1}{0^+}}\text{”} = \text{“}\left(0^+\right)^{+\infty}\text{”} = \text{“}e^{+\infty \cdot \log 0^+}\text{”} = \text{“}e^{-\infty}\text{”} = 0.$$

Esercizio 6.

(a) (a) Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice decrescente se

$$x' < x'' \Rightarrow f(x') \geq f(x''), \quad \forall x', x'' \in \mathbb{R}.$$

(b) Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice derivabile in $\mathbb{R}$ se per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ il seguente limite esiste ed è finito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

(b) (i) Vero. Si veda il libro di testo.

(ii) Falso. Controesempio: la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ è continua ma non derivabile in $x = 0$.

(iii) Falso. Non è detto che una funzione decrescente sia derivabile dappertutto (quindi non ha senso l'espressione $f'(x) \leq 0$): per esempio la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \leq 0, \\ 0, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

è decrescente in $\mathbb{R}$, ma $f'(0)$ non esiste.

(iv) Falso.

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ in effetti è derivabile in $\mathbb{R}$ e la sua derivata è $f'(x) = a$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

La funzione è decrescente se e solo se $a \leq 0$. Quindi la seconda parte della affermazione è falsa. Controesempio: $f(x) = x - 1$.