

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 14 Luglio 2016

Testo d'esame A

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):

1.1)	1.2)	1.3)	1.4)	1.5)	2.1)	2.2)	2.3)	2.4)	2.5)	2.6)	3.a)	3.b)	4.a)	4.b)	5
punti															
2	1	3	3	2	1	1	1	2	2	2	3	4	3	3	7

1. (11 punti) La funzione $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, data da $f(t) = \frac{t}{6}$, rappresenta la tariffa che pago, in centesimi di Euro, per una telefonata di durata $t > 0$ secondi.

Una tariffa alternativa offerta dalla mia compagnia telefonica è rappresentata dalla funzione

$$g(t) = \begin{cases} 10 + t/8 & \text{per } t \in (0, 120] \\ 22 + t/15 & \text{per } t \in (120, 300] \\ 37 + t/30 & \text{per } t > 300. \end{cases}$$

- 1) [pti 2] Si calcoli la spesa, secondo le due tariffe, per una telefonata di 120 secondi, per una di 5 minuti e per una di 500 secondi.
- 2) [pti 1] Si calcoli $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$ e si interpreti il risultato. Si calcoli $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ e si interpreti il risultato.
- 3) [pti 3] Si calcolino $\lim_{t \rightarrow 120^+} g(t)$, $\lim_{t \rightarrow 300^+} g(t)$ e si disegnino sullo stesso piano cartesiano i grafici delle due tariffe in funzione di t .
Aiutandosi con i grafici, si risponda alle seguenti domande:
- 4) [pti 3] avendo a disposizione 35 cent (credito residuo), qual è la massima durata della prossima telefonata con ciascuna tariffa?
- 5) [pti 2] per quali t è più conveniente la tariffa f ?

NOTA: le funzioni proposte in questo esercizio sono una semplificazione di quelle più complicate che rappresentano tariffe realistiche.

2. (9 punti) Dato un sottoinsieme non vuoto D di $\mathbb{R}$, si consideri una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.
- 1) [pti 1] Si dia la definizione di funzione superiormente limitata su D .
 - 2) [pti 1] Si dia la definizione di $\max f$ (ossia di $\max_D f$).
 - 3) [pti 1] Si dia la definizione di $\sup f$ (ossia di $\sup_D f$).
- Si dica se ciascuna delle affermazioni seguenti è vera o falsa, portando una dimostrazione nel primo caso ed un controesempio nel secondo.
- 4) [pti 2] Se f è limitata superiormente su D allora ha massimo su D .
 - 5) [pti 2] Se il $\sup f$ è finito allora f ha massimo su D .
 - 6) [pti 2] Se f è limitata superiormente allora il $\sup f$ è finito.

3. (7 punti)

(a) [pti 3] Si enunci e si dimostri il teorema di Rolle.

(b) [pti 4] Data la funzione $f : [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{x^2}{x-1}$, si verifichi che essa soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle e si determinino i punti (uno o piu' di uno) che soddisfano la condizione contenuta nella tesi del teorema di Rolle.

4. (6 punti) Si calcolino i seguenti limiti

$$(a) \text{ [pti 3]} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + x} - \sqrt{\frac{1}{4} - 5x}}{\sin(7x)}, \quad (b) \text{ [pti 3]} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x - 2^x| + 6x^3 + 4}{|x^2 - \ln x|} \quad (1)$$

5. (7 punti) Si studi il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ ricavando l'insieme di definizione e il segno di f , calcolando gli opportuni limiti, studiando la monotonia di f ed individuando eventuali punti di max/min globali/locali per f , infine studiando la concavità/convessità di f .

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 14 Luglio 2016

Testo d'esame B

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):

1.1)	1.2)	1.3)	1.4)	1.5)	2.1)	2.2)	2.3)	2.4)	2.5)	2.6)	3.a)	3.b)	4.a)	4.b)	5
punti															
2	1	3	3	2	1	1	1	2	2	2	3	4	3	3	7

1. **(11 punti)** La funzione $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, data da $f(t) = \frac{t}{5}$, rappresenta la tariffa che pago, in centesimi di Euro, per una telefonata di durata $t > 0$ secondi.

Una tariffa alternativa offerta dalla mia compagnia telefonica è rappresentata dalla funzione

$$g(t) = \begin{cases} 11 + t/8 & \text{per } t \in (0, 120] \\ 22 + t/16 & \text{per } t \in (120, 300] \\ 35 + t/30 & \text{per } t > 300. \end{cases}$$

1) [pti 2] Si calcoli la spesa, secondo le due tariffe, per una telefonata di 120 secondi, per una di 5 minuti e per una di 500 secondi.

2) [pti 3] Si calcolino $\lim_{t \rightarrow 120^+} g(t)$, $\lim_{t \rightarrow 300^+} g(t)$ e si disegnino sullo stesso piano cartesiano i grafici delle due tariffe in funzione di t .

Aiutandosi con i grafici, si risponda alle seguenti domande:

3) [pti 1] Si calcoli $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$ e si interpreti il risultato. Si calcoli $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ e si interpreti il risultato.

4) [pti 3] avendo a disposizione 37 cent (credito residuo), qual è la massima durata della prossima telefonata con ciascuna tariffa?

5) [pti 2] per quali t è meno conveniente la tariffa f ?

NOTA: le funzioni proposte in questo esercizio sono una semplificazione di quelle più complicate che rappresentano tariffe realistiche.

2. **(9 punti)** Dato un sottoinsieme non vuoto D di $\mathbb{R}$, si consideri una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

1) [pti 1] Si dia la definizione di f inferiormente limitata su D .

2) [pti 1] Si dia la definizione di $\min f$ (ossia di $\min_D f$).

3) [pti 1] Si dia la definizione di $\inf f$ (ossia di $\inf_D f$).

Si dica se ciascuna delle affermazioni seguenti è vera o falsa, portando una dimostrazione nel primo caso ed un controesempio nel secondo.

4) [pti 2] Se f è limitata inferiormente su D allora ha minimo su D .

5) [pti 2] Se $\inf f$ è finito allora f ha minimo su D .

6) [pti 2] Se f è limitata inferiormente allora $\inf f$ è finito.

3. (7 punti)

(a) [pti 3] Si enunci e si dimostri il teorema di Rolle.

(b) [pti 4] Data la funzione $f : [3, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{x^2}{x-2}$, si verifichi che essa soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle e si determinino i punti (uno o piu' di uno) che soddisfano la condizione contenuta nella tesi del teorema di Rolle.

4. (6 punti) Si calcolino i seguenti limiti

$$(a) \text{ [pti 3] } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + 3x} - \sqrt{\frac{1}{4} - 7x}}{\sin(9x)}, \quad (b) \text{ [pti 3] } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|3^x - x^2| - 5x^4 + 6}{|\ln x - x^3|} \quad (2)$$

5. (7 punti) Si studi il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x}$ ricavando l'insieme di definizione e il segno di f , calcolando gli opportuni limiti, studiando la monotonia di f e individuando eventuali punti di max/min globali/locali per f , infine studiando la concavità/convessità di f .

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 14 Luglio 2016

Testo d'esame C

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Spuntate gli esercizi che avete svolto (verranno corretti solo questi !!!):

1.1)	1.2)	1.3)	1.4)	1.5)	2.1)	2.2)	2.3)	2.4)	2.5)	2.6)	3.a)	3.b)	4.a)	4.b)	5
punti															
2	1	3	3	2	1	1	1	2	2	2	3	4	3	3	7

1. **(11 punti)** La funzione $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, data da $f(t) = \frac{t}{4}$, rappresenta la tariffa che pago, in centesimi di Euro, per una telefonata di durata $t > 0$ secondi.

Una tariffa alternativa offerta dalla mia compagnia telefonica è rappresentata dalla funzione

$$g(t) = \begin{cases} 22 + t/8 & \text{per } t \in (0, 140] \\ 35 + t/14 & \text{per } t \in (140, 280] \\ 55 + t/30 & \text{per } t > 280. \end{cases}$$

- 1) [pti 2] Si calcoli la spesa, secondo le due tariffe, per una telefonata di 2 minuti e 20 secondi, per una di 280 secondi e per una di 600 secondi.
- 2) [pti 1] Si calcoli $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$ e si interpreti il risultato. Si calcoli $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ e si interpreti il risultato.
- 3) [pti 3] Si calcolino $\lim_{t \rightarrow 140^+} g(t)$, $\lim_{t \rightarrow 280^+} g(t)$ e si disegnino sullo stesso piano cartesiano i grafici delle due tariffe in funzione di t .
Aiutandosi con i grafici, si risponda alle seguenti domande:
- 4) [pti 2] per quali t è più conveniente la tariffa g ?
- 5) [pti 3] avendo a disposizione 38 cent (credito residuo), qual è la massima durata della prossima telefonata con ciascuna tariffa?

NOTA: le funzioni proposte in questo esercizio sono una semplificazione di quelle più complicate che rappresentano tariffe realistiche.

2. **(9 punti)** Dato un sottoinsieme non vuoto D di $\mathbb{R}$, si consideri una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) [pti 1] Si dia la definizione di estremo superiore di f su D .
- 2) [pti 1] Si dia la definizione di f superiormente limitata su D .
- 3) [pti 1] Si dia la definizione di massimo di f su D .

Si dica se ciascuna delle affermazioni seguenti è vera o falsa, portando una dimostrazione nel primo caso ed un controesempio nel secondo.

- 4) [pti 2] Se f è limitata superiormente allora il $\sup f$ è finito.
- 5) [pti 2] Se $\sup f$ appartiene all'immagine di f allora f ha massimo su D .
- 6) [pti 2] Se f è limitata superiormente su D allora ha massimo su D .

3. (7 punti)

(a) [pti 3] Si enunci e si dimostri il teorema di Rolle.

(b) [pti 4] Data la funzione $f : [4, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \frac{x^2}{x-3}$, si verifichi che essa soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle e si determinino i punti (uno o piu' di uno) che soddisfano la condizione contenuta nella tesi del teorema di Rolle.

4. (6 punti) Si calcolino i seguenti limiti

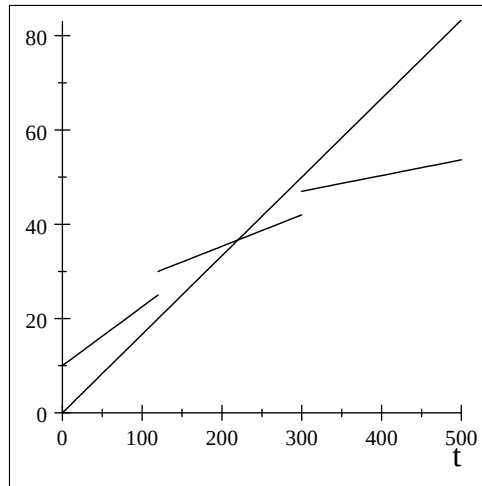
$$(a) \text{ [pti 3]} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + 6x} - \sqrt{\frac{1}{4} - 9x}}{\sin(11x)}, \quad (b) \text{ [pti 3]} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^3 - 4x| - x^5 + 8}{|x^4 - \ln x|} \quad (3)$$

5. (7 punti) Si studi il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{x}$ ricavando l'insieme di definizione e il segno di f , calcolando gli opportuni limiti, studiando la monotonia di f e individuando eventuali punti di max/min globali/locali per f , infine studiando la concavità/convessità di f .

Soluzioni

Fila A

1. EX 1. 1) $f(120) = 20, g(120) = 25; f(300) = 50, g(300) = 42; f(500) \approx 83.3, g(500) \approx 53.6$
 2) $g(0^+) = 10$, è l'ammontare dello scatto alla risposta; $f(0^+) = 0$: la tariffa f non ha scatto alla risposta.
 3) $g(120^+) = 22 + 120/15 = 30, g(300^+) = 37 + 300/30 = 47$. Il grafico delle due tariffe è sotto riportato: la linea spezzata è il grafico della tariffa g .



- 4) $f(t) = \frac{t}{6} \leq 35$ per $t \leq 210$, ossia la telefonata può durare al massimo 3 minuti e mezzo, con la tariffa f .
 $g(120^+) = 30, g(300) = 42$: essendo la funzione g iniettiva su $\mathbb{R}_+$ e continua da $(120, 300)$ in $(30, 42)$, può raggiungere il valore 35 solo lungo il suo secondo tratto, quindi va risolta la disequazione $22 + \frac{t}{15} \leq 35$, da cui risulta che $t \leq 195$, ossia la telefonata può al massimo durare 3 minuti e 15 secondi con la tariffa g (che è quindi più costosa per le telefonate di lunghezza almeno fino a 3 minuti e 15 secondi).
 5) Si cercano i t per cui $f(t) \leq g(t)$. Dalla figura si vede che i due grafici si incontrano in corrispondenza del secondo tratto di g , e che prima del punto di incontro la tariffa f è sempre più bassa della g , mentre dopo è sempre più alta. Risolviamo allora $\frac{t}{6} \leq 22 + \frac{t}{15}$, ossia $t\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{15}\right) \leq 22$. Risulta $t \leq 220$, corrispondente a 3 minuti e 40 secondi.

EX 2.

1), 2), 3): si veda libro di testo.

4) Falsa, ad es. $f(x) = x$ definita su $D = [0, 1)$, è limitata superiormente da 1, ma non ha massimo perché il candidato valore massimo 1 non è raggiunto su D .

5) Falsa, stessa f del punto 4): $\sup f = 1 < \infty$, ma 1 non è raggiunto.

6) Vero. Si osservi che il caso $\sup f = -\infty$ non si pone perché $D \neq \emptyset$. Quindi dobbiamo dimostrare che $\sup f < +\infty$.

Per ipotesi sappiamo che esiste un $M < +\infty$ per cui $f(x) \leq M \quad \forall x \in D$. Quindi M è un maggiorante,

allora il minimo m dei maggioranti soddisfa $m \leq M < +\infty$, ossia $\sup f < +\infty$.

EX 3. (a) Si veda il libro di testo.

(b) f e' continua nell'intervallo $[2, 4]$ in quanto e' somma e quoziente di funzioni continue; f e' derivabile nell'intervallo $(2, 4)$ in quanto e' somma e quoziente di funzioni derivabili; per finire, $f(2) = f(4) = \frac{8}{3}$. La derivata di f e' $f'(x) = -\frac{2}{3} + \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, e $f'(x) = 0$ per $x = 1 + \sqrt{3}$.

$$\text{EX 4. (a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{4}+x}-\sqrt{\frac{1}{4}-5x}}{\sin(7x)} = \frac{0}{0}, \text{ e } \frac{\sqrt{\frac{1}{4}+x}-\sqrt{\frac{1}{4}-5x}}{\sin(7x)} = \frac{(\sqrt{\frac{1}{4}+x}-\sqrt{\frac{1}{4}-5x})(\sqrt{\frac{1}{4}+x}+\sqrt{\frac{1}{4}-5x})}{\sin(7x)(\sqrt{\frac{1}{4}+x}+\sqrt{\frac{1}{4}-5x})} = \frac{6x}{\sin(7x)(\sqrt{\frac{1}{4}+x}+\sqrt{\frac{1}{4}-5x})}.$$

$$\text{Dunque } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{4}+x}-\sqrt{\frac{1}{4}-5x}}{\sin(7x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sin(7x)} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+x}+\sqrt{\frac{1}{4}-5x}} = \frac{6}{7} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{4}}}+\sqrt{\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{1}{4}}}} = \frac{6}{7}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-2^x|+6x^3+4}{|x^2-\ln x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x-x+6x^3+4}{x^2-\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^2} = +\infty.$$

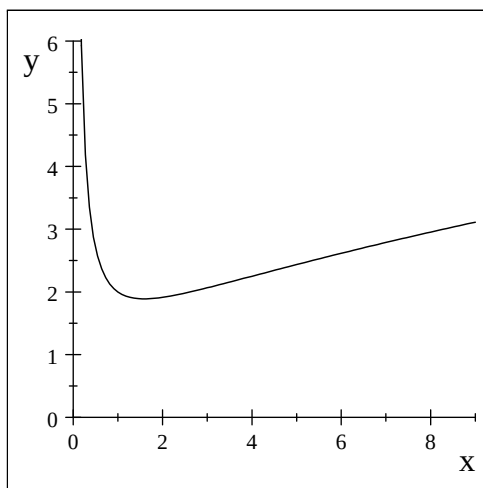
EX 5. $A = (0, +\infty)$.

$f(x) > 0$ per ogni $x \in A$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, la retta di equazione $x = 0$ e' asintoto verticale.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2x^2}(x^{\frac{3}{2}} - 2)$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (0, 2^{2/3})$, $f'(x) > 0$ per $x \in (2^{2/3}, +\infty)$, dunque f e' monotona strettamente decrescente nell'intervallo $(0, 2^{2/3})$, monotona strettamente crescente nell'intervallo $(2^{2/3}, +\infty)$ e $x = 2^{2/3}$ e' punto di min globale per f , $\inf f = \min f = f(2^{2/3})$, $\sup f = +\infty$, $\max f$ non esiste, non esistono punti di max locale/globale per f .

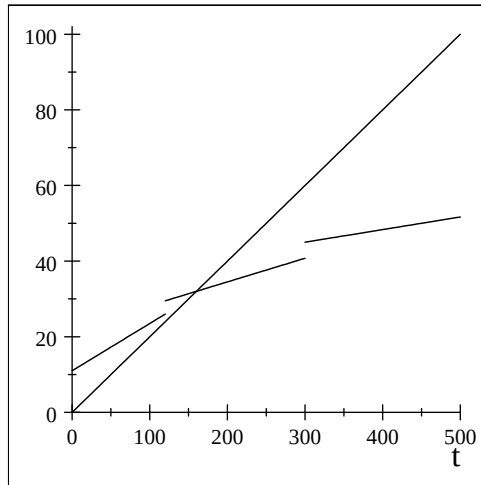
$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{4x^{\frac{5}{2}}} = \frac{8-x^{3/2}}{4x^3}$ e $f''(x) > 0$ per $x \in (0, 4)$, $f''(x) < 0$ per $x \in (4, +\infty)$, dunque f e' convessa nell'intervallo $(0, 4)$, concava nell'intervallo $(4, +\infty)$ e $x = 4$ e' punto di flesso per f .



Soluzioni

Fila B

1. EX 1. 1) $f(120) = 24, g(120) = 26; f(300) = 60, g(300) = 40.75; f(500) = 100, g(500) \approx 51.7$
2) $g(120^+) = 22 + 120/16 = 29.5, g(300^+) = 35 + 300/30 = 45$. Il grafico delle due tariffe è sotto riportato: la linea spezzata è il grafico della tariffa g .



3) $g(0^+) = 11$, è l'ammontare dello scatto alla risposta; $f(0^+) = 0$: la tariffa f non ha scatto alla risposta.

4) $f(t) = \frac{t}{5} \leq 37$ per $t \leq 185$, ossia la telefonata può durare al massimo 3 minuti e 5 secondi, con la tariffa f .

Dobbiamo trovare i $t > 0$ per cui $g(t) \leq 37$. Si osservi che essendo $g(120^+) = 29.5, g(300) = 40.75$, ed essendo la funzione g iniettiva su $\mathbb{R}_+$ e continua da $(120, 300)$ in $(29.5, 40.75)$, g può raggiungere il valore 37 solo lungo il suo secondo tratto, quindi va risolta la disequazione $22 + \frac{t}{16} \leq 37$, da cui risulta che $t \leq 240$, ossia la telefonata può al massimo durare 4 minuti con la tariffa g (che è quindi meno costosa per le telefonate di lunghezza almeno fino a 4 minuti).

5) Si cercano i t per cui $f(t) \geq g(t)$. Dalla figura si vede che i due grafici si incontrano in corrispondenza del secondo tratto di g , e che prima del punto di incontro la tariffa f è sempre più bassa della g , mentre dopo è sempre più alta. Risolviamo allora $\frac{t}{5} \geq 22 + \frac{t}{16}$, ossia $t\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{16}\right) \geq 22$. Risulta $t \geq 160$, corrispondente a 2 minuti e 40 secondi.

EX 2.

1), 2), 3): si veda libro di testo.

4) Falsa, ad es. $f(x) = x$ definita su $D = (0, 1)$, è limitata inferiormente da 0, ma non ha minimo perché il candidato valore minimo 0 non è raggiunto su D .

5) Falsa, stessa f del punto 4): $\inf f = 0 \in \mathbb{R}$, ma 0 non è raggiunto.

6) Vero. Si osservi che il caso $\inf f = +\infty$ non si pone perché $D \neq \emptyset$. Quindi dobbiamo dimostrare che $\inf f > -\infty$.

Per ipotesi sappiamo che esiste un $m > -\infty$ per cui $f(x) \geq m \quad \forall x \in D$. Quindi m è un minorante,

allora il massimo M dei minoranti soddisfa $\inf f = M \geq m > -\infty$, come si voleva.

EX 3. (a) Si veda il libro di testo.

(b) f e' continua nell'intervallo $[3, 5]$ in quanto e' somma e quoziente di funzioni continue; f e' derivabile nell'intervallo $(3, 5)$ in quanto e' somma e quoziente di funzioni derivabili; per finire, $f(3) = f(5) = 10$. La derivata di f e' $f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$, e $f'(x) = 0$ per $x = 2 + \sqrt{3}$.

Ex 4. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{4}+3x}-\sqrt{\frac{1}{4}-7x}}{\sin(9x)} = \frac{0}{0}$, e $\frac{\sqrt{\frac{1}{4}+3x}-\sqrt{\frac{1}{4}-7x}}{\sin(9x)} = \frac{(\sqrt{\frac{1}{4}+3x}-\sqrt{\frac{1}{4}-7x})(\sqrt{\frac{1}{4}+3x}+\sqrt{\frac{1}{4}-7x})}{\sin(9x)(\sqrt{\frac{1}{4}+3x}+\sqrt{\frac{1}{4}-7x})} =$
 $\frac{10x}{\sin(9x)(\sqrt{\frac{1}{4}+3x}+\sqrt{\frac{1}{4}-7x})}$. Dunque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{4}+3x}-\sqrt{\frac{1}{4}-7x}}{\sin(9x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x}{\sin(9x)} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+3x}+\sqrt{\frac{1}{4}-7x}} = \frac{10}{9} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+3x}+\sqrt{\frac{1}{4}-7x}} =$
 $\frac{10}{9}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|3^x - x^2| - 5x^4 + 6}{|\ln x - x^3|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - x^2 - 5x^4 + 6}{x^3 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{x^3} = +\infty$.

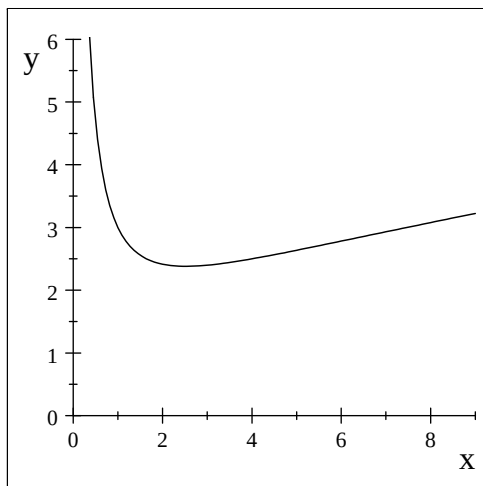
EX 5. $A = (0, +\infty)$.

$f(x) > 0$ per ogni $x \in A$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, la retta di equazione $x = 0$ e' asintoto verticale.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{2x^2}(x^{\frac{3}{2}} - 4)$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (0, 4^{2/3})$, $f'(x) > 0$ per $x \in (4^{2/3}, +\infty)$, dunque f e' monotona strettamente decrescente nell'intervallo $(0, 4^{2/3})$, monotona strettamente crescente nell'intervallo $(4^{2/3}, +\infty)$ e $x = 4^{2/3}$ e' punto di min globale per f , $\inf f = \min f = f(4^{2/3})$, $\sup f = +\infty$, $\max f$ non esiste, non esistono punti di max locale/globale per f .

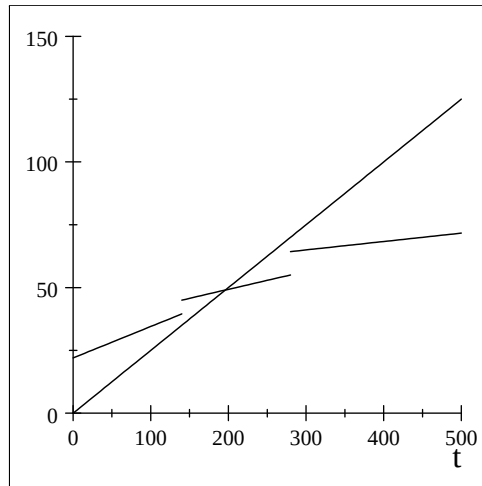
$f''(x) = \frac{4}{x^3} - \frac{1}{4x^{\frac{5}{2}}} = \frac{16-x^{3/2}}{4x^3}$ e $f''(x) > 0$ per $x \in (0, 16^{2/3})$, $f''(x) < 0$ per $x \in (16^{2/3}, +\infty)$, dunque f e' convessa nell'intervallo $(0, 16^{2/3})$, concava nell'intervallo $(16^{2/3}, +\infty)$ e $x = 16^{2/3}$ e' punto di flesso per f .



Soluzioni

Fila C

1. EX 1. 1) $f(140) = \frac{140}{4}$, $g(140) = 22 + 140/8 = 39.5$; $f(280) = 70$, $g(280) = 35 + 280/14 = 55$; $f(600) = 150$, $g(600) = 75$: 23.333333
- 2) $g(0^+) = 22$, è l'ammontare dello scatto alla risposta; $f(0^+) = 0$: la tariffa f non ha scatto alla risposta.
- 3) $g(140^+) = 35 + 140/14 = 45$, $g(280^+) = 55 + 280/30 \approx 64.3$. Il grafico delle due tariffe è sotto riportato: la linea spezzata è il grafico della tariffa g .



4) Si cercano i t per cui $g(t) \leq f(t)$. Dalla figura si vede che i due grafici si incontrano in corrispondenza del secondo tratto di g , e che prima del punto di incontro la tariffa f è sempre più bassa della g , mentre dopo è sempre più alta. Risolviamo allora $35 + \frac{t}{14} \leq \frac{t}{4}$, ossia $t\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{14}\right) \geq 35$. Risulta $t \geq 196$, corrispondente a 3 minuti e 16 secondi.

5) $f(t) = \frac{t}{4} \leq 38$ per $t \leq 152$, ossia la telefonata può durare al massimo 2 minuti e 32 secondi, con la tariffa f .

Dobbiamo trovare i $t > 0$ per cui $g(t) \leq 38$. Si osservi che essendo $g(0^+) = 22$, $g(140^+) = 45$, ed essendo la funzione g iniettiva su $\mathbb{R}_+$ e continua da $(0, 140)$ in $(22, 45)$, g può raggiungere il valore 38 solo lungo il suo primo tratto, quindi va risolta la disequazione $22 + \frac{t}{8} \leq 38$, da cui risulta che $t \leq 128$, ossia la telefonata può al massimo durare 2 minuti e 8 secondi con la tariffa g (che è quindi più costosa per le telefonate di lunghezza almeno fino a 2 minuti e 8 secondi).

EX 2.

1), 2), 3): si veda libro di testo.

4) Vero. Si osservi che il caso $\sup f = -\infty$ non si pone perché $D \neq \emptyset$. Quindi dobbiamo dimostrare che $\sup f < +\infty$.

Per ipotesi sappiamo che esiste un $M < +\infty$ per cui $f(x) \leq M \quad \forall x \in D$. Quindi M è un maggiorante, allora il minimo m dei maggioranti soddisfa $m \leq M < +\infty$, ossia $\sup f < +\infty$.

5) Vera. Sappiamo per ipotesi che esiste un $\bar{x} \in D$ tale che $f(\bar{x}) = \sup f$. Allora $\sup f$, che è un

maggiorante per f , è anche assunto, ossia vale $\forall x \in D, f(x) \leq f(\bar{x})$, ma allora $\bar{x}$ è un punto di massimo assoluto per f su D e $f(\bar{x})$ è il massimo assoluto, ossia $\sup f = \max f$.

6) Falsa, ad es. $f(x) = x$ definita su $D = (0, 1)$, è limitata superiormente da 1, ma non ha massimo perché il candidato valore massimo 1 non è raggiunto su D .

EX 3. (a) Si veda il libro di testo.

(b) f è continua nell'intervallo $[4, 6]$ in quanto è somma e quoziente di funzioni continue; f è derivabile nell'intervallo $(4, 6)$ in quanto è somma e quoziente di funzioni derivabili; per finire, $f(4) = f(6) = 24$. La derivata di f è $f'(x) = 2 + \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}$, e $f'(x) = 0$ per $x = 3 + \sqrt{3}$.

EX 4. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + 6x} - \sqrt{\frac{1}{4} - 9x}}{\sin(11x)} = \frac{0}{0}$, e $\frac{\sqrt{\frac{1}{4} + 6x} - \sqrt{\frac{1}{4} - 9x}}{\sin(11x)} = \frac{(\sqrt{\frac{1}{4} + 6x} - \sqrt{\frac{1}{4} - 9x})(\sqrt{\frac{1}{4} + 6x} + \sqrt{\frac{1}{4} - 9x})}{\sin(11x)(\sqrt{\frac{1}{4} + 6x} + \sqrt{\frac{1}{4} - 9x})} = \frac{\frac{15x}{\sin(11x)(\sqrt{\frac{1}{4} + 6x} + \sqrt{\frac{1}{4} - 9x})}}{\sin(11x)(\sqrt{\frac{1}{4} + 6x} + \sqrt{\frac{1}{4} - 9x})}$. Dunque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + 6x} - \sqrt{\frac{1}{4} - 9x}}{\sin(11x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{15x}{\sin(11x)} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + 6x} + \sqrt{\frac{1}{4} - 9x}} = \frac{15}{11} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{15}{11}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^3 - 4^x| - x^5 + 8}{|x^4 - \ln x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x - x^3 - x^5 + 8}{x^4 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x}{x^4} = +\infty$.

EX 5. $A = (0, +\infty)$.

$f(x) > 0$ per ogni $x \in A$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, la retta di equazione $x = 0$ è asintoto verticale.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2} = \frac{1}{2x^2}(x^{\frac{3}{2}} - 6)$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (0, 6^{2/3})$, $f'(x) > 0$ per $x \in (6^{2/3}, +\infty)$, dunque f è monotona strettamente decrescente nell'intervallo $(0, 6^{2/3})$, monotona strettamente crescente nell'intervallo $(6^{2/3}, +\infty)$ e $x = 6^{2/3}$ è punto di min globale per f , $\inf f = \min f = f(6^{2/3})$, $\sup f = +\infty$, $\max f$ non esiste, non esistono punti di max locale/globale per f .

$f''(x) = \frac{6}{x^3} - \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} = \frac{24 - x^{3/2}}{4x^3}$ e $f''(x) > 0$ per $x \in (0, 24^{2/3})$, $f''(x) < 0$ per $x \in (24^{2/3}, +\infty)$, dunque f è convessa nell'intervallo $(0, 24^{2/3})$, concava nell'intervallo $(24^{2/3}, +\infty)$ e $x = 24^{2/3}$ è punto di flesso per f .

