ESAME DI MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE
30 AGOSTO 2016
— FILA A —

Esercizio 1.

(a) [3pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si dia la definizione di $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

(b) [3pt] Si calcoli (citando i teoremi usati) uno tra i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

Esercizio 2.

(a) [2pt] Si dia la definizione di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua su tutto il dominio.

(b) [2pt] Si esibisca un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia continua su tutto il dominio ed un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia discontinua in qualche punto del dominio.

Esercizio 3. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false. (Si motivino le risposte "vero" citando ed enunciando proposizioni o teoremi contenuti nel programma del corso oppure fornendone una dimostrazione e le risposte "falso" esibendo un controesempio all'affermazione; le risposte "vero" o "falso" senza spiegazione danno zero punti.)

(a) [2pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f è continua e $f(-1) < f(1)$, allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$.

(b) [2pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$, allora esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$.

(c) [2pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$, allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$.

(d) [2pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f è derivabile e esistono punti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$, allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$.

Esercizio 4. [7pt] Si scriva il polinomio di Taylor di terzo grado in un intorno di 0 (cioè con $x_0 = 0$) per la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 e^{2x}.$$

In che senso il polinomio così trovato è una buona approssimazione di $f(x)$ per x vicino a 0?

Esercizio 5. Si consideri la funzione definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{se } x \in (-\infty, 0), \\ \tan x, & \text{se } x \in [0, \pi/2), \\ x - \frac{\pi}{2}, & \text{se } x \geq \pi/2. \end{cases}$$

(a) [3pt] Si disegni il grafico della funzione.

(b) [2pt] Si determini l'immagine di f.

(c) [2pt] Si stabilisca quali sono i valori di $\inf f$ e $\sup f$ e si dica se essi sono, rispettivamente, un minimo e un massimo assoluto per f.

Esercizio 6. Sia data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + bx^2 - b^2x + d$, dove $b, d \in \mathbb{R}$.

(a) [2pt] Dopo aver posto $b = 3$ e $d = -4$, si determinino gli intervalli aperti in cui f è strettamente monotona.

(b) [3pt] Dopo aver posto $b = 3$ e $d = -4$, si determinino gli intervalli aperti in cui f è contemporaneamente strettamente decrescente e convessa.

(c) [3pt] Si determino gli intervalli aperti di concavità e convessit à per f al variare dei parametri b e d.

ESAME DI MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE
30 AGOSTO 2016
— FILA B —

Esercizio 1.

(a) [3pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si dia la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

(b) [3pt] Si calcoli (citando i teoremi usati) uno tra i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot e^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}.$$

Esercizio 2.

(a) [2pt] Si dia la definizione di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile su tutto il dominio.

(b) [2pt] Si esibisca un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia derivabile su tutto il dominio ed un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia non derivabile in qualche punto del dominio.

Esercizio 3. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false. (Si motivino le risposte "vero" citando ed enunciando proposizioni o teoremi contenuti nel programma del corso oppure fornendone una dimostrazione e le risposte "falso" esibendo un controesempio all'affermazione; le risposte "vero" o "falso" senza spiegazione danno zero punti.)

(a) [2pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f è continua e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$.

(b) [2pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f è derivabile e esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_0) = 0$, allora esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$.

(c) [2pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$, allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$.

(d) [2pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f è derivabile e esistono punti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$, allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$.

Esercizio 4. [7pt] Si scriva il polinomio di Taylor di terzo grado in un intorno di 0 (cioè con $x_0 = 0$) per la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = xe^{x^2}.$$

In che senso il polinomio così trovato è una buona approssimazione di $f(x)$ per x vicino a 0?

Esercizio 5. Si consideri la funzione definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{se } x \in (-\infty, 0), \\ e^x, & \text{se } x \in [0, \pi/2), \\ x, & \text{se } x \geq \pi/2. \end{cases}$$

(a) [3pt] Si disegni il grafico della funzione.

(b) [2pt] Si determini l'immagine di f.

(c) [2pt] Si stabilisca quali sono i valori di $\inf f$ e $\sup f$ e si dica se essi sono, rispettivamente, un minimo e un massimo assoluto per f.

Esercizio 6. Sia data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + bx^2 - b^2x + d$, dove $b, d \in \mathbb{R}$.

(a) [2pt] Dopo aver posto $b = -1$ e $d = -2$, si determinino gli intervalli aperti in cui f è strettamente monotona.

(b) [3pt] Dopo aver posto $b = -1$ e $d = -2$, si determinino gli intervalli aperti in cui f è contemporaneamente strettamente decrescente e convessa.

(c) [3pt] Si determino gli intervalli aperti di concavità e convessit à per f al variare dei parametri b e d.

Soluzioni Fila A.

Esercizio 1.

(a) La definizione è la seguente:

$$\forall A > 0 \ \exists \varepsilon > 0 \text{ tale che } 0 < |x| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f(x) > A.$$

(b) *Primo limite.* Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x} \log\left(1+x^2\right)}.$$

D'altra parte

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \log\left(1 + x^2\right) = \text{"}\frac{0}{0^+}\text{"}.$$

Applicando il teorema de l'Hopital si ottiene

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \log\left(1 + x^2\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{1 + x^2} = 0.$$

Dunque il limite cercato è $e^0 = 1$.

Secondo limite. Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \text{“}0 \cdot e^{\frac{1}{0^+}}\text{”} = \text{“}0 \cdot e^{+\infty}\text{”} = \text{“}0 \cdot (+\infty)\text{”}.$$

Per risolvere scriviamo

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)^2 \cdot e^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \left(\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x}\right) \cdot \left(\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin x}\right) \cdot \left(\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{\sin^2 x}}}{\frac{1}{\sin^2 x}}\right).$$

Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin x} = +\infty.$$

Inoltre, posto

$$y = \frac{1}{\sin^2 x}$$

e notando che $y \to +\infty$ quando $x \to 0^+$, otteniamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{1}{\sin^2 x}}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty.$$

Dunque, il limite cercato è $+\infty$.

Esercizio 2.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua su tutto il dominio se per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

(b) Esempio di funzione continua in $x_0 = 0$:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esempio di funzione non continua:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

Esercizio 3.

(a) *Falso.* Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$. Essa è strettamente crescente e dunque, in particolare, $f(-1)<f(1)$. D'altra parte, per ogni $x\in\mathbb{R}$ si ha $f(x)>0$.

(b) *Falso.* Si consideri, ad esempio, la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

(c) *Falso.* Si consideri, ad esempio, la funzione

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}-1 & \text{se} \quad x\leq 0\\ \\ 1 & \text{se} \quad x>0.\end{cases}$$

L'affermazione diventa vera se si considera una funzione continua (per il teorema degli zeri).

(d) *Vero.* Poichè f è derivabile su $\mathbb{R}$, essa è anche continua su $\mathbb{R}$. Dunque l'affermazone segue dal teorema degli zeri.

Esercizio 4. Il polinomio di Taylor di terzo grado in un intorno di 0 (cioè con $x_0=0$) per la funzione

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^2e^{2x}$$

si ottiene come segue. Si calcolano i valori della funzione e delle derivate fino al terzo ordine in $x_0=0$:

$$f(x)=x^2e^{2x} \qquad f(0)=0^2e^{2\cdot 0}=0$$

$$f'(x)=2xe^{2x}+x^2\cdot 2\cdot e^{2x}=2xe^{2x}(1+x)=2e^{2x}\left(x+x^2\right) \qquad f'(0)=0+0=0$$

$$f''(x)=2\left[2e^{2x}\left(x+x^2\right)+e^{2x}(1+2x)\right]=2e^{2x}\left(2x^2+4x+1\right) \qquad f''(0)=2$$

$$f'''(x)=2\left[2e^{2x}\left(2x^2+4x+1\right)+e^{2x}(4x+4)\right]=4e^{2x}\left(2x^2+6x+3\right) \qquad f'''(0)=4\cdot 3=12$$

Il polinomio cercato è

$$p_3(x):=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2}+f'''(0)\frac{x^3}{6}=0+0\cdot x+x^2+2x^3=x^2+2x^3.$$

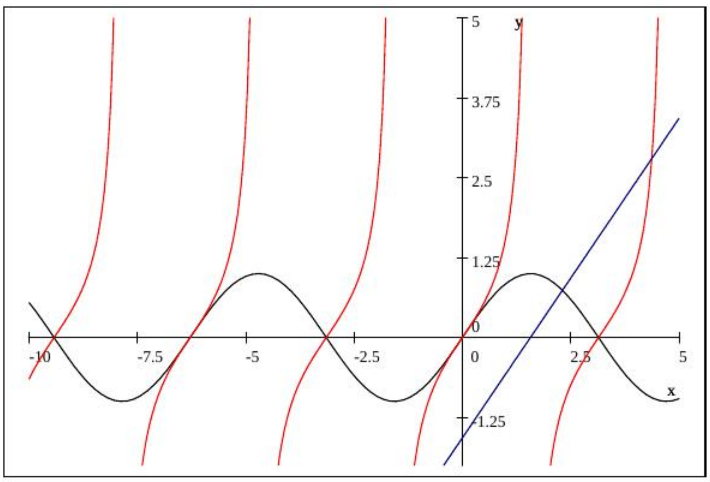
Il polinomio così trovato è una buona approssimazione di $f(x)$ per x vicino a 0 nel senso che

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-p_3(x)}{x^3}=0,$$

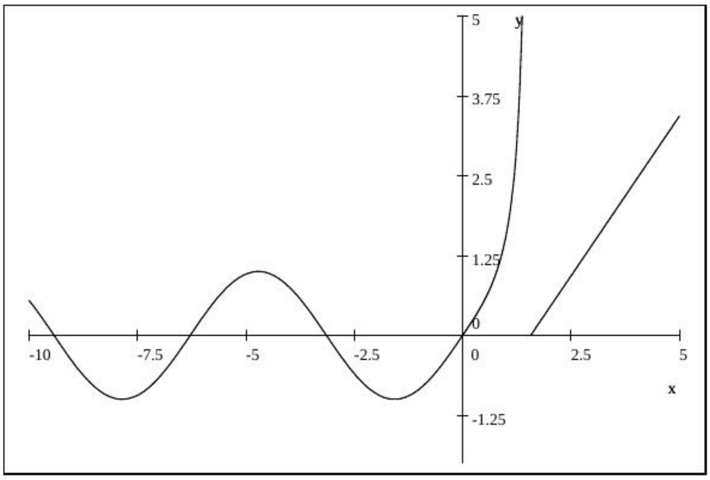
ovvero il resto è un infinitesimo di ordine superiore a x^3.

Esercizio 5.

(a) Il grafico delle tre funzioni $f_1(x)=\sin x$ (in nero), $f_2(x)=\tan x$ (in rosso) e $f_3(x)=x-\frac{\pi}{2}$ (in blu) è riportato di seguito.



Dunque il grafico di f, ottenuto selezionando il grafico di f_1 nell'intervallo $(-\infty, 0)$, di f_2 nell'intervallo $[0, \pi/2)$ e di f_3 nell'intervallo $[\pi/2, +\infty)$ è il seguente:



(b) Dal grafico si deduce che $\mathrm{Im} f = [-1, +\infty)$.

(c) Dal grafico si deduce che

- $\min f = \inf f = -1$;
- non esiste $\max f$;
- $\sup f = +\infty$.

Esercizio 6.

(a) Se $b = 3$ e $d = -4$, si ha

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 4,$$

e quindi

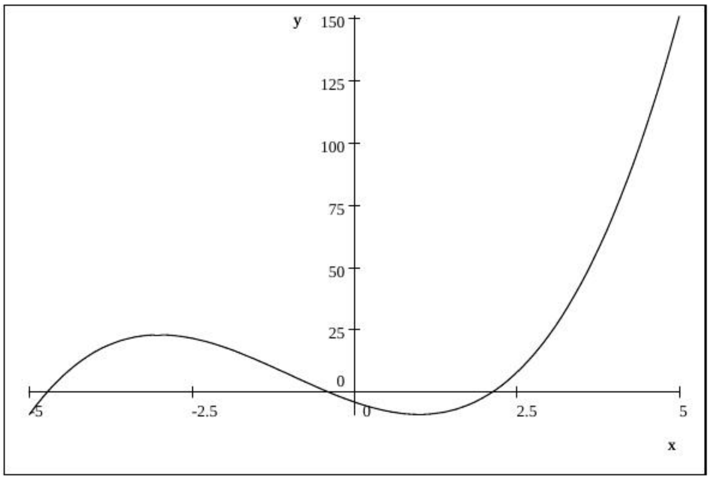
$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9.$$

Si ha $3x^2 + 6x - 9 = 0$ se e solo se $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+27}}{3} = \frac{-3 \pm 6}{3}$, cioè se e solo se $x = -3 \lor x = 1$. Dunque f è strettamente crescente nell'intervallo $(-\infty, -3)$, strettamente decrescente nell'intervallo $(-3, 1)$ e strettamente crescente nell'intervallo $(1, +\infty)$.

(b) Se $b = 3$ e $d = -4$, si ha

$$f''(x) = 6x + 6.$$

Dunque f è strettamente convessa nell'intervallo $(-1, +\infty)$ e strettamente concava nell'intervallo $(\infty, -1)$. Dunque f è contemporaneamente strettamente decrescente e strettamente convessa nell'intervallo $(-3, 1) \cap (-1, +\infty) = (-1, 1)$.



(c) Data $f(x) = x^3 + bx^2 - b^2x + d$, si ha

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx - b^2, \quad f''(x) = 6x + 2b.$$

Dunque f è strettamente convessa nell'intervallo $\left(-\frac{b}{3}, +\infty\right)$ e strettamente concava nell'intervallo $\left(-\infty, -\frac{b}{3}\right)$.

Soluzioni Fila B.

Esercizio 1.

(a) La definizione è la seguente:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A > 0 \text{ tale che } x > A \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 1| < \varepsilon.$$

(b) *Primo limite.* Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{x^2 \cdot \log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \text{"}(+\infty) \cdot 0\text{"}.$$

Posto $y = \frac{1}{x}$, si ha $y \to 0^+$ quando $x \to +\infty$ e dunque

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to0^+} \frac{\log(1+y)}{y^2} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{y\to0^+} \frac{1}{2y(1+y)} = +\infty.$$

Dunque il limite cercato è "$e^{+\infty}$" ovvero $+\infty$.

Secondo limite. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}} = \text{"}0 \cdot \left(e^{\frac{1}{\sin 0^+}}\right)\text{""}0 \cdot \left(e^{+\infty}\right)\text{"} = \text{"}0 \cdot (+\infty)\text{"}.$$

Posto $y = \frac{1}{x}$ si ha $y \to 0^+$ quando $x \to +\infty$, dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}} = \lim_{y\to0^+} y e^{\frac{1}{\sin y}} = \lim_{y\to0^+} \frac{y}{\sin y} \frac{1}{\frac{1}{\sin y}} e^{\frac{1}{\sin y}} = \lim_{y\to0^+} \frac{1}{\frac{1}{\sin y}} e^{\frac{1}{\sin y}}.$$

Posto $z = \frac{1}{\sin y}$ e notando che $z \to +\infty$ quando $y \to 0^+$, otteniamo

$$\lim_{y\to0^+} \frac{1}{\frac{1}{\sin y}} e^{\frac{1}{\sin y}} = \lim_{z\to+\infty} \frac{1}{z} e^z$$

e concludiamo per la gerarchia degli infiniti che il limite cercato vale $+\infty$.

Esercizio 2.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile su tutto il dominio se, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, esiste finito il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

(b) Esempio di funzione derivabile:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esempio di funzione non derivabile (ma continua) in $x_0 = 0$:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|.$$

Esercizio 3.

(a) *Falso.* Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$. Essa è continua su $\mathbb{R}$ e verifica la condizione $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. D'altra parte, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f(x) > 0$.

(b) *Falso.* Si consideri, ad esempio, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(c) *Falso.* Si consideri, ad esempio, la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

L'affermazione diventa vera se si considera una funzione continua (per il teorema degli zeri).

(d) *Vero.* Poichè f è derivabile su $\mathbb{R}$, essa è anche continua su $\mathbb{R}$. Dunque l'affermazone segue dal teorema degli zeri.

Esercizio 4. Il polinomio di Taylor di terzo grado in un intorno di 0 (cioè con $x_0 = 0$) per la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = xe^{x^2}$$

si ottiene come segue. Si calcolano i valori della funzione e delle derivate fino al terzo ordine in $x_0 = 0$:

$$f(x) = xe^{x^2} \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = e^{x^2} + x2xe^{x^2} = e^{x^2}\left(1 + 2x^2\right) \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = 2xe^{x^2}\left(1 + 2x^2\right) + e^{x^2} \cdot 4x = e^{x^2}\left(2x + 4x^3 + 4x\right) = e^{x^2}\left(4x^3 + 6x\right) \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 2xe^{x^2}\left(4x^3 + 6x\right) + e^{x^2}\left(12x^2 + 6\right) = e^{x^2}\left(8x^4 + 24x^2 + 6\right) \qquad f'''(0) = 6$$

Il polinomio cercato è

$$p_3(x) := f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(0)\frac{x^3}{6} = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2} + x^3 = x + x^3.$$

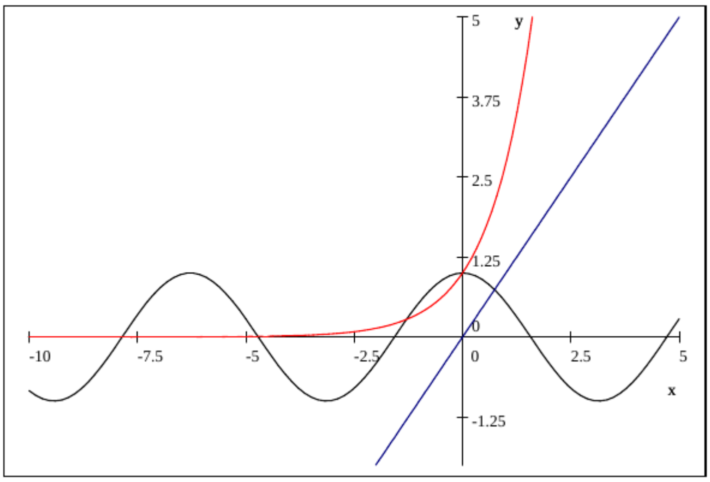
Il polinomio così trovato è una buona approssimazione di $f(x)$ per x vicino a 0 nel senso che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - p_3(x)}{x^3} = 0,$$

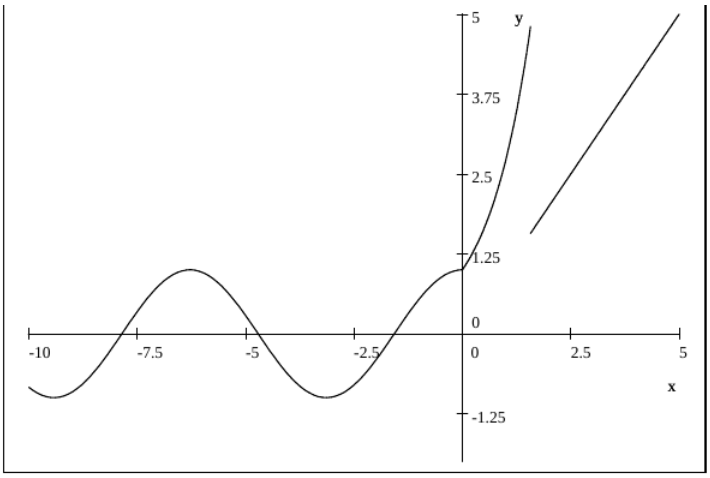
ovvero il resto è un infinitesimo di ordine superiore a x^3.

Esercizio 5.

(a) Il grafico delle tre funzioni $f_1(x) = \cos x$ (in nero), $f_2(x) = e^x$ (in rosso) e $f_3(x) = x$ (in blu) è riportato di seguito.



Dunque il grafico di f, ottenuto selezionando il grafico di f_1 nell'intervallo $(-\infty, 0)$, di f_2 nell'intervallo $[0, \pi/2)$ e di f_3 nell'intervallo $[\pi/2, +\infty)$ è il seguente:



(b) Dal grafico si deduce che $\text{Im} f = [-1, +\infty)$.

(c) Dal grafico si deduce che

- $\min f = \inf f = -1$;
- non esiste $\max f$;
- $\sup f = +\infty$.

Esercizio 6.

(a) Se $b = -1$ e $d = -2$, si ha

$$f(x) = x^3 - x^2 - x - 2,$$

e quindi

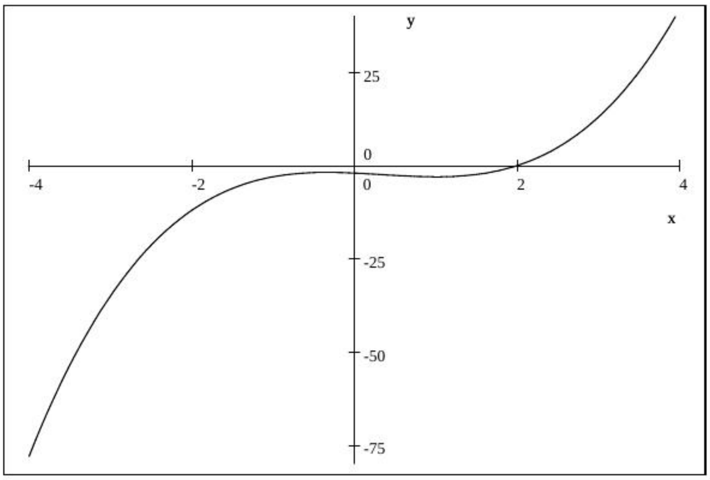
$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1.$$

Si ha $3x^2 - 2x - 1 = 0$ se e solo se $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \frac{1 \pm 2}{3}$, cioè se e solo se $x = 1 \vee x = -1/3$. Dunque f è strettamente crescente nell'intervallo $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$, strettamente decrescente nell'intervallo $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ e strettamente crescente nell'intervallo $(1, +\infty)$.

(b) Se $b = -1$ e $d = -2$, si ha

$$f''(x) = 6x - 2.$$

Dunque f è strettamente convessa nell'intervallo $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ e strettamente concava nell'intervallo $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$. Dunque f è contemporaneamente strettamente decrescente e strettamente convessa nell'intervallo $\left(-\frac{1}{3}, 1\right) \cap \left(\frac{1}{3}, +\infty\right) = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$.



(c) Data $f(x) = x^3 + bx^2 - b^2x + d$, si ha

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx - b^2, \quad f''(x) = 6x + 2b.$$

Dunque f è strettamente convessa nell'intervallo $\left(-\frac{b}{3}, +\infty\right)$ e strettamente concava nell'intervallo $\left(-\infty, -\frac{b}{3}\right)$.