Matematica per le Applicazioni Economiche I, 13 Dicembre 2016
Testo d'esame A

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

1. [12pt] Si studi il grafico della funzione $f(x) = x - \ln(3 + x^2)$. Si dimostri che esiste un unico $x_1 \in \mathbb{R}$ per cui $f(x_1) = 0$. Si stabilisca il segno di x_1. Si determinino infine $\mathrm{Im}(f)$, $\sup f, \inf f$.
   NOTA: risulta $f(\sqrt{3}) < 0$.

2. [9 punti] Per un'impresa, la funzione
$$C(x) = \begin{cases} 100 + 10x \text{ per } x \in (0, 100] \\ 100 + 12x \text{ per } x \in (100, 400] \end{cases}$$
   rappresenta il costo di produzione (in migliaia di Euro) di x quintali di merce.
   [2pt] 1) Si dica qual è l'insieme di definizione (campo di esistenza) di C e si disegni il grafico di C.
   [2pt] 2) Si stabilisca che C è iniettiva, si calcolino $C^{-1}(120)$ e $C^{-1}(10)$ e se ne dia l'interpretazione economica.
   [3pt] 3) Si consideri la funzione $g(x) = \frac{C(x)}{x}$, chiamata *costo medio* della produzione dei primi x quintali di merce. Si determinino il punto di minimo globale e il minimo per la funzione g. NOTA: A questo fine può essere utile disegnare il grafico di g.
   [2pt] 4) Per $x \in (1, 400]$, si scriva l'espressione di $C(x) - C(x-1)$. Tale differenza è chiamata *costo marginale per l'incremento della produzione da $x-1$ quintali a x quintali di merce.*

3. [3pt] 1). Per la funzione $f(x) = e^{5x^2}$ si calcoli il polinomio di Taylor di secondo grado centrato in $x_0 = 0$, specificando con precisione le proprietà del resto.
   [3pt] 2). Si calcoli
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x^2} - 1 - 3(\sin x)^2}{2x^2}.$$
   NOTA: Il polinomio di Taylor ricavato sopra può essere utilizzato per calcolare il limite.

4. [3pt] 1). Si enunci e si dimostri il teorema che lega la derivabilità di una funzione alla sua continuità.
   [3pt] 2). Si dia un esempio, se esiste, di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è continua in $\mathbb{R}$ ma in almeno due punti non è derivabile.

5. [7 punti] In ciascuna delle seguenti affermazioni si stabilisca se è presente un errore oppure no; nel caso ci sia un errore, si corregga tale errore. Ogni risposta deve essere giustificata.
   1) [pti 1] Per la funzione $f(x) = 2x^2$, il rapporto incrementale $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ è uguale a $\frac{2h^2-2x_0^2}{h}$.
   2) [pti 2] Il teorema di Fermat stabilisce che: *se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in $x_0 \in [a, b]$ e x_0 è un punto di massimo locale per f, allora $f'(x_0) = 0$.*
   3) [pti 2] Un insieme è aperto se e solo se contiene ogni suo punto.
   4) [pti 2] Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile e strettamente monotona e se in $x \in (a, b)$ si ha $f'(x) \neq 0$, allora la derivata della funzione inversa in x, cioè $\left[f^{-1}\right]'(x)$, è uguale a $\frac{1}{f'(x)}$.

SOLUZIONI FILA A

Ex1. $f(x) = x - \ln(3 + x^2)$

• il campo di esistenza è $\mathbb{R}$, poiché $3 + x^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

• $f \geq 0$ sse $\ln(3 + x^2) \leq x$, cioè $3 + x^2 \leq e^x$: non è immediato risolvere questa disequazione, procediamo allora come segue.

• Il $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ è immediato e fa $-\infty$,
il $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - \ln\left(x^2\left(\frac{3}{x^2}+1\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} x - 2\ln(x) - \ln\left(\frac{3}{x^2}+1\right) = +\infty$ per il fatto che $\frac{3}{x^2}+1 \to 1, \ln\left(\frac{3}{x^2}+1\right) \to 0$ e per la gerarchia degli infiniti.

f è continua sul suo campo di esistenza perché $\ln(3 + x^2)$ è composizione di $\ln(x)$ con $x^2 + 3$ che sono continue sul loro CE, dunque $\ln(3 + x^2)$ è continua sul suo CE, e la differenza delle due funzioni continue x e $\ln(3 + x^2)$ è continua.

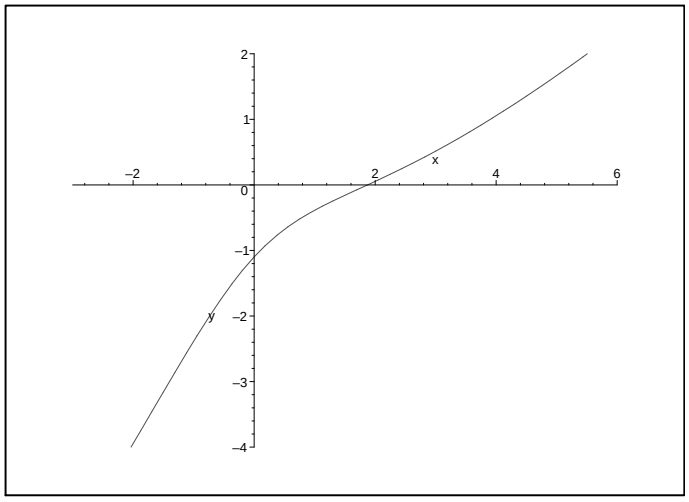
Poiché f è continua e assume sia valori positivi che negativi, necessariamente assume anche valore 0, ossia esiste un $x_1 \in \mathbb{R}$ su cui $f(x_1) = 0$.

• Inoltre f è derivabile perché la composizione e la differenza di funzioni derivabili sono derivabili, inoltre $f'(x) = 1 - \frac{2x}{3+x^2} = \frac{x^2-2x+3}{3+x^2}$, e risulta $f' \geq 0$ sse $x^2 - 2x + 3 \geq 0$. Essendo il $\frac{\Delta}{4} = -2 < 0$, abbiamo che $f' > 0$ su tutto $\mathbb{R}$, perciò f è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$, e allora è iniettiva, quindi il suo grafico interseca l'asse delle ascisse in un solo punto, ossia l'x_1 su cui $f(x_1) = 0$ è unico.

Essendo f crescente avremo poi che $f > 0$ per $x > x_1$, mentre $f < 0$ per $x < x_1$.

A questo punto conosciamo già il comportamento di f agli estremi del suo CE e l'andamento monotono di f, ci manca solo di controllare dove f è concava e dove è convessa.

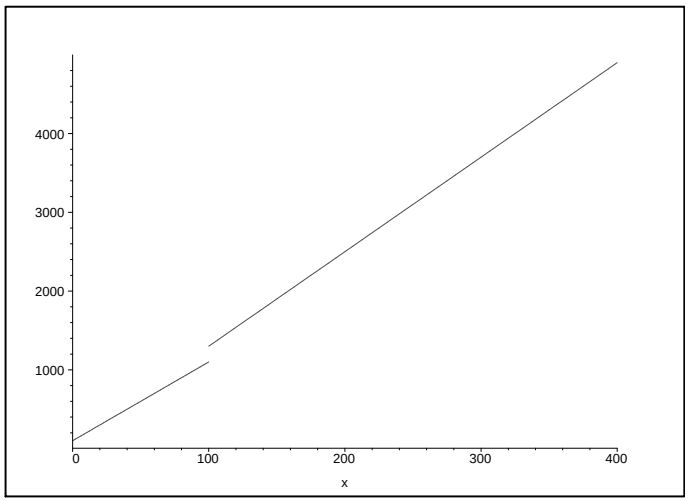
• f' è derivabile sul suo CE, perché quoziente di polinomi che sono derivabili su tutto $\mathbb{R}$.
$f''(x) = 2\frac{x^2-3}{(3+x^2)^2}$, ed è $f'' \geq 0$ sse $|x| \geq \sqrt{3}$, ossia per valori di x esterni alle radici $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$ di $x^2 - 3$. Segue che f è strettamente convessa su $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, ed è strettamente concava su $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Infine, essendo $f(\sqrt{3}) < 0 = f(x_1)$ e f crescente strettamente, otteniamo che $0 < \sqrt{3} < x_1$, ossia le ascisse dei due punti di flesso precedono lo zero x_1 della funzione.



Dalla continuità di f ed i valori dei limiti agli estremi del suo CE, risulta che $Im(f) = \mathbb{R}$, perciò $\sup f = +\infty, \inf f = -\infty$.

EX 2.

1) CE= $(0, 400]$, ed il grafico è costituito da due tratti di rette



2) Dal grafico si vede che C è strettamente crescente, dunque è iniettiva. Per determinare $C^{-1}(120)$ cerco la x per cui $C(x) = 120$: essendo, dal grafico, 120 un valore assunto sul primo tratto della C, risolvo $100 + 10x = 120$, ottenendo $x = 2$: la quantià di merce la cui produzione costa 120 mila Eu è 2 quintali.
Il grafico parte dal punto $(0, 100)$ e la curva è crescente, perciò C non assume mai valore 10: $C^{-1}(10) = \emptyset$: non si arriva mai a spendere solo 10 mila Eu per la produzione della merce.

3)

$$g(x) = \frac{C(x)}{x} = \begin{cases} \frac{100}{x} + 10 \text{ per } x \in (0, 100] \\ \frac{100}{x} + 12 \text{ per } x \in (100, 400] \end{cases}$$

g è derivabile su $(0, 100) \cup (100, 400)$, studiamo il segno di g' per determinare l'andamento di g sul suo CE. Per $x \in (0, 100) \cup (100, 400)$ si ha $g'(x) = \frac{xC'(x)-C}{x^2} = -100$, che è sempre negativo, perciò g decresce su $(0, 100]$ e decresce su $(100, 400]$, allora raggiunge il suo minimo globale sul livello più basso tra $g(100) = 11$ e $g(400) = 12.25$. Perciò il punto di minimo globale è 100 ed il valore minimo globale è 11 mila Eu.

4) $C(x) - C(x-1) = \begin{cases} 100 + 10x - [100 + 10(x-1)] = 10 \text{ per } x \in (1, 100] \\ 100 + 12x - [100 + 10(x-1)] = 2x + 10 \text{ per } x \in (100, 101] \\ 100 + 12x - [100 + 12(x-1)] = 12 \text{ per } x \in (101, 400] \end{cases}$

EX3.

1) $f(0) = 1; f'(x) = 10xe^{5x^2}, f'(0) = 0;\ f''(x) = (10x)^2 e^{5x^2} + 10e^{5x^2}, f''(0) = 10;$ perciò $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + R_2(x) = 1 + 5x^2 + R_2$, dove R_2 ha la proprietà che $\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0$.

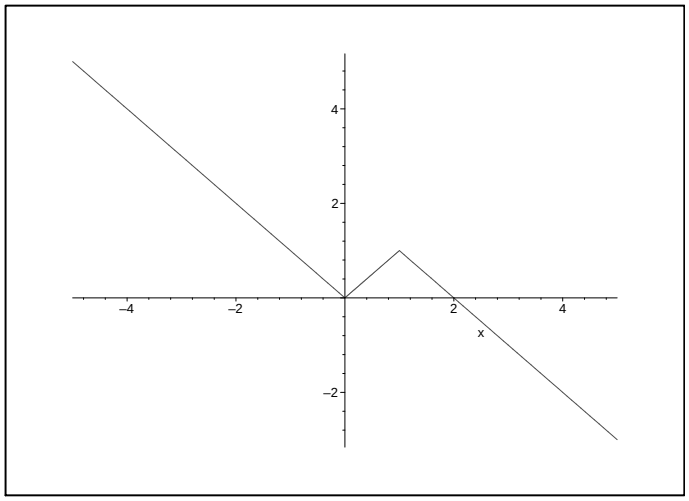
2) Sostituendo lo sviluppo di Taylor trovato ad $f(x)$, si ha $\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x^2}-1-3(\sin x)^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+5x^2+R_2-1-3(\sin x)^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2+R_2-3(\sin x)^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\frac{R_2(x)}{x^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right) \to \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$, avendo usato la proprietà del resto , il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ e la proprietà che il limite del prodotto $\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x}$ è il prodotto dei limiti.

EX 4.

1) *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0 interno al suo dominio D. Allora f è continua in x_0.*

Dim.: si deve mostrare che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, sapendo che esiste ed è finito il $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

Per $x \neq x_0$ scriviamo $f(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) + f(x_0)$: per $x \to x_0$ abbiamo che $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0)$ finito ed $x - x_0 \to 0$, perciò il prodotto $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) \to f'(0) \cdot 0 = 0$, e allora
$f(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) + f(x_0) \to f(x_0)$ ■.
2) Il tipico esempio di funzione continua ma non derivabile è $f(x) = |x|$, che però ha un solo punto di non derivabilità. Possiamo vedere questa come funzione definita a tratti $f(x) = \begin{cases} x, & \text{per } x \geq 0 \\ -x, & \text{per } x < 0 \end{cases}$, aggiungiamo allora un altro tratto in modo da creare un altro punto di non derivabilità, ma in maniera che i 3 tratti si raccordino in modo continuo. Ad esempio rendiamo 1 punto di non derivabilità, rimpiazzando la parte $y = x$ su $[1, +\infty]$ con una semiretta per $(1, 1)$ e con pendenza -1. Otteniamo che $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{per } x < 0 \\ x, & \text{per } x \in [0, 1] \\ -x + 2, & \text{per } x \in (1, +\infty) \end{cases}$
soddisfa le condizioni richieste



EX 5.
1) Nell'espressione del rapporto incrementale c'è un errore, l'espressione corretta è $\frac{2(x_0+h)^2-2x_0^2}{h}$
2) Nell'enunciato è scorretta l'ipotesi che $x_0 \in [a, b]$, l'ipotesi giusta è che $x_0 \in (a, b)$. Infatti non necessariamente se x_0 è agli estremi dell'intervallo e in x_0 la funzione assume valore massimo si ha $f'(x_0) = 0$. Ad esempio $f(x) = x$ in $[0, 1]$ assume valore massimo in 1, ma in 1 non ha derivata 0.
3) Nella frase è errata la condizione *contiene ogni suo punto.* Perché un insieme A sia aperto ogni suo punto deve essere *interno,* non semplicemente appartenente ad A. Ad esempio $[0, 1]$ contiene ogni suo punto, ma l'insieme non è aperto.
4) Nella frase sono errate la condizione $f'(x) \neq 0$ e l'espressione di $\left[f^{-1}\right]'$. La condizione corretta è che sia $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$. L'espressione corretta è $\left[f^{-1}\right]'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.
Equivalentemente possiamo chiedere che $f'(x) \neq 0$ e scrivere che allora la derivata in $y = f(x)$ della funzione è $\left[f^{-1}\right]'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 13 Dicembre 2016
Testo d'esame B

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

1. [12pt] Si studi il grafico della funzione $f(x) = \ln(3 + x^2) - x$. Si dimostri che esiste un unico $x_1 \in \mathbb{R}$ per cui $f(x_1) = 0$. Si stabilisca il segno di x_1. Si determinino infine $\mathrm{Im}(f)$, $\sup f, \inf f$.
   NOTE: risulta $f(\sqrt{3}) > 0$.

2. [9 punti] Per un'impresa, la funzione
$$C(x) = \begin{cases} 100 + 11x \text{ per } x \in (0, 100] \\ 100 + 12x \text{ per } x \in (100, 300] \end{cases}$$
   rappresenta il costo di produzione (in migliaia di Euro) di x quintali di merce.
   [2pt] 1) Si dica qual è l'insieme di definizione (campo di esistenza) di C e si disegni il grafico di C.
   [2pt] 2) Si stabilisca che C è iniettiva, si calcolino $C^{-1}(210)$ e $C^{-1}(10)$ e se ne dia l'interpretazione economica.
   [3pt] 3) Si consideri la funzione $g(x) = \frac{C(x)}{x}$, chiamata *costo medio* della produzione dei primi x quintali di merce. Si determinino il punto di minimo globale e il minimo per la funzione g. NOTA: A questo fine può essere utile disegnare il grafico di g.
   [2pt] 4) Per $x \in (1, 300]$, si scriva l'espressione di $C(x) - C(x-1)$. Tale differenza è chiamata *costo marginale per l'incremento della produzione da* $x - 1$ *quintali a* x *quintali di merce.*

3. [3pt] 1). Si dica se è vera la seguente affermazione: "una funzione non derivabile in un punto x_0 e' discontinua in x_0". Se si ritiene l'affermazione vera, allora la si dimostri, altrimenti si dia un controesempio.
   [3pt] 2). Si enunci e si dimostri il teorema che lega la derivabilità di una funzione alla sua continuità.

4. [3pt] 1). Per la funzione $f(x) = e^{-3x^2}$ si calcoli il polinomio di Taylor di secondo grado centrato in $x_0 = 0$, specificando con precisione le proprietà del resto.
   [3pt] 2). Si calcoli
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-3x^2} - 2 + \cos x}{x^2}.$$
   NOTA: Il polinomio di Taylor ricavato sopra può essere utilizzato per calcolare il limite.

5. [7 punti] In ciascuna delle seguenti affermazioni si stabilisca se è presente un errore oppure no; nel caso ci sia un errore, si corregga tale errore. Ogni risposta deve essere giustificata.
   1) [pti 1] Per la funzione $f(x) = 3\ln(x + 1)$, il rapporto incrementale $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ è uguale a $\frac{3\log(h+1)-3\log(x_0+1)}{h}$.
   2) [pti 2] Il teorema di Fermat stabilisce che: *se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è una funzione derivabile in* $x_0 \in [a, b]$ *e* x_0 *è un punto interno di,*$[a, b]$*, allora* $f'(x_0) = 0$.
   3) [pti 2] Un punto x_0 è di accumulazione per un insieme A se e solo se ogni intorno di x_0 contiene almeno un punto di A.
   4) [pti 2] Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile e strettamente monotona allora la funzione inversa è derivabile.

SOLUZIONI FILA B

Ex1. $f(x) = \ln(3 + x^2) - x$

• il campo di esistenza è $\mathbb{R}$, poiché $3 + x^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

• $f \geq 0$ sse $\ln(3 + x^2) \geq x$, cioè $3 + x^2 \geq e^x$: non è immediato risolvere questa disequazione, procediamo allora come segue.

• Il $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ è immediato e fa $+\infty$,
il $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(x^2\left(\frac{3}{x^2}+1\right)\right) - x = \lim_{x\to+\infty} 2\ln(x) - \ln\left(\frac{3}{x^2}+1\right) - x = -\infty$ per il fatto che $\frac{3}{x^2}+1 \to 1, \ln\left(\frac{3}{x^2}+1\right) \to 0$ e per la gerarchia degli infiniti.

f è continua sul suo campo di esistenza perché $\ln(3 + x^2)$ è composizione di $\ln(x)$ con $x^2 + 3$ che sono continue sul loro CE, dunque $\ln(3 + x^2)$ è continua sul suo CE, e la differenza delle due funzioni continue $\ln(3 + x^2)$ e x è continua.

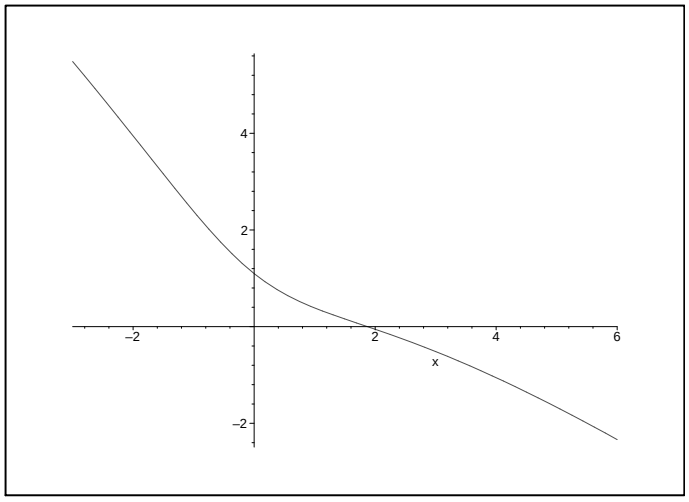
Poiché f è continua e assume sia valori positivi che negativi, necessariamente assume anche valore 0, ossia esiste un $x_1 \in \mathbb{R}$ su cui $f(x_1) = 0$.

• Inoltre f è derivabile perché la composizione e la differenza di funzioni derivabili sono derivabili, inoltre $f'(x) = \frac{2x}{3+x^2} - 1 = \frac{-x^2+2x-3}{3+x^2}$, e risulta $f' \geq 0$ sse $-x^2 + 2x - 3 \geq 0$. Essendo il $\frac{\Delta}{4} = -2 < 0$, abbiamo che $f' < 0$ su tutto $\mathbb{R}$, perciò f è strettamente decrescente su tutto $\mathbb{R}$, e allora è iniettiva, quindi il suo grafico interseca l'asse delle ascisse in un solo punto, ossia l'x_1 su cui $f(x_1) = 0$ è unico.

Essendo f decrescente avremo poi che $f > 0$ per $x < x_1$, mentre $f < 0$ per $x > x_1$.

A questo punto conosciamo già il comportamento di f agli estremi del suo CE e l'andamento monotono di f, ci manca solo di controllare dove f è concava e dove è convessa.

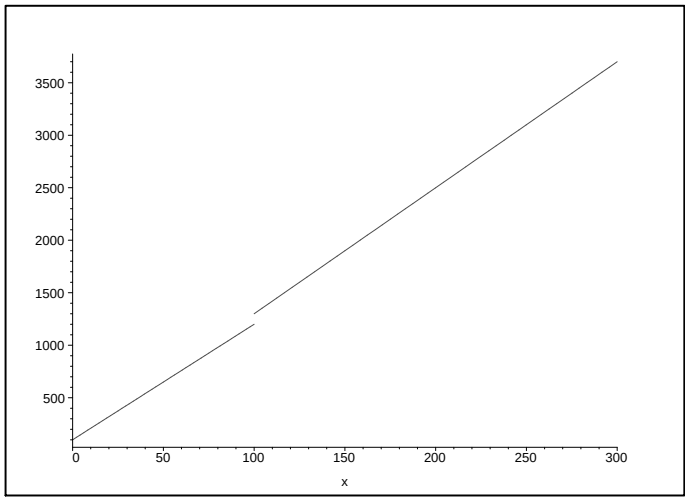
• f' è derivabile sul suo CE, perché quoziente di polinomi che sono derivabili su tutto $\mathbb{R}$.
$f''(x) = -2\frac{x^2-3}{(3+x^2)^2}$, ed è $f'' \geq 0$ sse $|x| \leq \sqrt{3}$, ossia per valori di x interni alle radici $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$ di $x^2 - 3$. Segue che f è strettamente concava su $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, ed è strettamente convessa su $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Infine, essendo $f(\sqrt{3}) > 0 = f(x_1)$ e f decrescente strettamente, otteniamo che $0 < \sqrt{3} < x_1$, ossia le ascisse dei due punti di flesso precedono lo zero x_1 della funzione.



Dalla continuità di f ed i valori dei limiti agli estremi del suo CE, risulta che $Im(f) = \mathbb{R}$, perciò $\sup f = +\infty, \inf f = -\infty$.

EX 2.

1) CE= $(0, 300]$, ed il grafico è costituito da due tratti di rette



2) Dal grafico si vede che C è strettamente crescente, dunque è iniettiva. Per determinare $C^{-1}(120)$ cerco la x per cui $C(x) = 120$: essendo, dal grafico, 120 un valore assunto sul primo tratto della C, risolvo $100 + 11x = 120$, ottenendo $x = 20/11$ che fa circa 2: la quantià di merce la cui produzione costa 120 mila Eu è $20/11$ quintali.

Il grafico parte dal punto $(0, 100)$ e la curva è crescente, perciò C non assume mai valore 10: $C^{-1}(10) = \emptyset$: non si arriva mai a spendere solo 10 mila Eu per la produzione della merce.

3)

$$g(x) = \frac{C(x)}{x} = \begin{cases} \frac{100}{x} + 11 \text{ per } x \in (0, 100] \\ \frac{100}{x} + 12 \text{ per } x \in (100, 300] \end{cases}$$

g è derivabile su $(0, 100) \cup (100, 300)$, studiamo il segno di g' per determinare l'andamento di g sul suo CE. Per $x \in (0, 100) \cup (100, 300)$ si ha $g'(x) = \frac{xC'(x)-C}{x^2} = -100$, che è sempre negativo, perciò g decresce su $(0, 100]$ e decresce su $(100, 300]$, allora raggiunge il suo minimo globale sul livello più basso tra $g(100) = 12$ e $g(300) = 37/3 > 36/3 = 12$. Perciò il punto di minimo globale è 100 ed il valore minimo globale è 12 mila Eu.

4) $C(x) - C(x-1) = \begin{cases} 100 + 11x - [100 + 11(x-1)] = 11 \text{ per } x \in (1, 100] \\ 100 + 12x - [100 + 11(x-1)] = x + 11 \text{ per } x \in (100, 101] \\ 100 + 12x - [100 + 12(x-1)] = 12 \text{ per } x \in (101, 300] \end{cases}$

EX 3.

1) Dire *Se f non è derivabile allora f non è continua* equivale a dire *Se f è continua allora f è derivabile*, il che è falso, ad esempio $f(x) = |x|$ è continua in 0 ma non derivabile in 0.

2) *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0 interno al suo dominio D. Allora f è continua in x_0.*

Dim.: si deve mostrare che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, sapendo che esiste ed è finito il $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

Per $x \neq x_0$ scriviamo $f(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x - x_0) + f(x_0)$: per $x \to x_0$ abbiamo che $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0)$ finito ed $x - x_0 \to 0$, perciò il prodotto $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x - x_0) \to f'(0) \cdot 0 = 0$, e allora

$f(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x - x_0) + f(x_0) \to f(x_0)$ ■.

EX4.

1) $f(0)=1; f'(x)=-6xe^{-3x^2}, f'(0)=0;\ f''(x)=(-6x)^2e^{-3x^2}-6e^{-3x^2}, f''(0)=-6$; perciò $f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2}+R_2(x)=1-3x^2+R_2$, dove R_2 ha la proprietà che $\lim_{x\to 0}\frac{R_2(x)}{x^2}=0$.

2) Sostituendo lo sviluppo di Taylor trovato ad $f(x)$, si ha $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-3x^2}-2+\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-3x^2+R_2-2+\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(-3+\frac{R_2(x)}{x^2}-\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)\to -3-\frac{1}{2}=-\frac{7}{2}$, avendo usato la proprietà del resto, il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ e la proprietà che il limite della somma/differenza di funzioni è la somma/differenza dei limiti.

EX 5.

1) Nell'espressione del rapporto incrementale c'è un errore, l'espressione corretta è $\frac{3\log\Big((x_0+h)+1\Big)-3\log(x_0+1)}{h}$

2) Nell'enunciato manca l'ipotesi che x_0 sia un punto estremale per f (cioè o di minimo o di massimo locale o globale). Infatti non necessariamente se x_0 è interno si ha $f'(x_0)=0$. Ad esempio $f(x)=x$ definita su $[0,1]$ in $x_0=1/2$ è derivabile, ma $f'(1/2)=1$, perché x_0 non è punto estremale per la funzione.

3) Nella frase è errata la condizione *contiene un punto di A*. Perché x_0 sia un punto di accumulazione per A bisogna che ogni intorno di x_0 contenga *infiniti* punti di A. Ad esempio per $A=\{1,2\}$ il punto $x_0=1$ è tale per cui ogni suo intorno contiene il punto 1 di A, ma 1 NON è di accumulazione per A.

4) Nella frase manca la condizione $f'\neq 0$. L'enunciato corretto della proprietà è il seguente: *Se* $f:(a,b)\to$ $\mathbb{R}$ *è una funzione derivabile e strettamente monotona, e se in* $x\in(a,b)$ *si ha* $f'(x)\neq 0$ *allora la funzione inversa* f^{-1} *è derivabile in* $y=f(x)$*, e* $\Big[f^{-1}\Big]'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. Ad esempio $f(x)=x^3$ su $(-1,1)$ è derivabile e strettamente monotona, e la fua funzione inversa è $f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$. Con $x=0$, risulta $f'(x)=0$, quindi $y=0$, ma $f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$ non è derivabile in $y=0$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 13 Dicembre 2016
Testo d'esame C

La prova ha la durata di due ore e mezzo. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

1. [12pt] Si studi il grafico della funzione $f(x) = \ln(x^2 + 2) - x$. Si dimostri che esiste un unico $x_1 \in \mathbb{R}$ per cui $f(x_1) = 0$. Si stabilisca il segno di x_1. Si determinino infine $\mathrm{Im}(f)$, $\sup f, \inf f$.
   NOTE: risulta $f(\sqrt{2}) < 0$.

2. [9 punti] Per un'impresa, la funzione
$$C(x) = \begin{cases} 100 + 10x \text{ per } x \in (0, 100] \\ 100 + 12x \text{ per } x \in (100, 400] \end{cases}$$
   rappresenta il costo di produzione (in migliaia di Euro) di x quintali di merce.
   [2pt] 1) Si dica qual è l'insieme di definizione (campo di esistenza) di C e si disegni il grafico di C.
   [2pt] 2) Si stabilisca che C è iniettiva, si calcolino $C^{-1}(220)$ e $C^{-1}(20)$ e se ne dia l'interpretazione economica.
   [3pt] 3) Si consideri la funzione $g(x) = \frac{C(x)}{x}$, chiamata *costo medio* della produzione dei primi x quintali di merce. Si determinino il punto di minimo globale e il minimo per la funzione g. NOTA: A questo fine può essere utile disegnare il grafico di g.
   [2pt] 4) Per $x \in [1, 400]$, si scriva l'espressione di $C(x) - C(x-1)$. Tale differenza è chiamata *costo marginale per l'incremento della produzione da $x-1$ quintali a x quintali di merce.*

3. [3pt] 1). Per la funzione $f(x) = e^{5(x-1)^2}$ si calcoli il polinomio di Taylor di secondo grado centrato in $x_0 = 1$, specificando con precisione le proprietà del resto.
   [3pt] 2). Si calcoli
$$\lim_{x \to 1} \frac{e^{5(x-1)^2} - 4 + 3\cos(x-1)}{(x-1)^2}.$$
   : :NOTA: Il polinomio di Taylor ricavato sopra può essere utilizzato per calcolare il limite.

4. [7 punti] In ciascuna delle seguenti affermazioni si stabilisca se è presente un errore oppure no; nel caso ci sia un errore, si corregga tale errore. Ogni risposta deve essere giustificata.
   1) [pti 1] Per la funzione $f(x) = -x^3$, il rapporto incrementale $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ è uguale a $\frac{-h^3+x_0^3}{h}$.
   2) [pti 2] Il teorema di Fermat stabilisce che: *se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in $x_0 \in [a, b]$ e x_0 è un punto di minimo locale per f, allora $f'(x_0) = 0$.*
   3) [pti 2] Un punto x_0 è di interno per un insieme A se e solo se esiste un intorno di x_0 che contiene infiniti punti di A.
   4) [pti 2] Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile e strettamente monotona e se in $x \in (a, b)$ si ha $f'(x) = 0$, allora la funzione inversa è derivabile in $f(x)$.

5. [3pt] 1). Si enunci e si dimostri il teorema che lega la derivabilità di una funzione alla sua continuità.
   [3pt] 2). Si dia un esempio, se esiste, di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è discontinua in un solo punto e non derivabile in un diverso punto.

Soluzioni

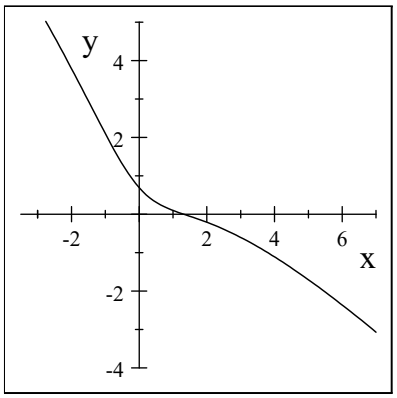
1. Poiche' $x^2+2>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, l'insieme di definizione di f e' $\mathbb{R}$. Questa funzione non e' pari, ne' dispari, ne' periodica; e' derivabile (e dunque continua) in $\mathbb{R}$ in quanto composizione e differenza di funzioni derivabili.

   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty-(-\infty)$, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty-\infty$, ma $\lim_{x\to+\infty}(\ln(x^2+2)-x) = \lim_{x\to+\infty}((\ln(x^2))-x) = \lim_{x\to+\infty}(2(\ln x)-x) = -\infty$ in virtu' della gerarchia tra infiniti. Questi due limiti implicano che $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$, e poiche' f e' continua e' possibile applicare una versione del teorema dei valori intermedi per concludere che $\mathrm{Im}(f) = (-\infty,+\infty)$. Ancora dai due limiti discende che esista un a (negativo e grande in valore assoluto) tale che $f(a)>0$, e che esista un b (positivo e grande in valore assoluto) tale che $f(b)<0$. Poiche' f e' continua in $[a,b]$, il teorema degli zeri implica che esista almeno un $x_1\in(a,b)$ tale che $f(x_1)=0$.

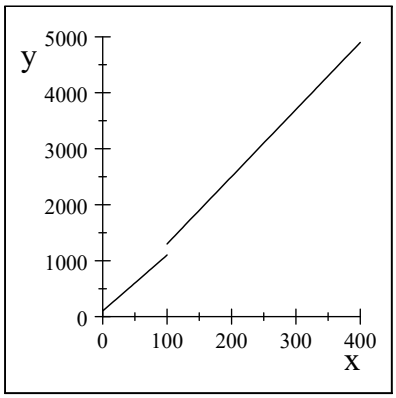
   $f'(x) = \frac{2x}{x^2+2}-1 = \frac{-x^2+2x-2}{x^2+2} < 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, dunque f e' strettamente decrescente in $\mathbb{R}$; questo implica l'esistenza di un <u>unico</u> $x_1\in\mathbb{R}$ tale che $f(x_1)=0$. Poiche' $f(0)=\ln 2>0$ ed f e' strettamente decrescente, si deduce che $x_1>0$.

   $f''(x) = \frac{(-2x+2)(x^2+2)-2x(-x^2+2x-2)}{(x^2+2)^2} = \frac{4-2x^2}{(x^2+2)^2}$, e $f''(x)>0$ per $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $f''(x)<0$ per $x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$. Dunque f e' concava in $(-\infty,-\sqrt{2})$, convessa in $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, concava in $(\sqrt{2},+\infty)$.

   Pertanto il grafico di f e'

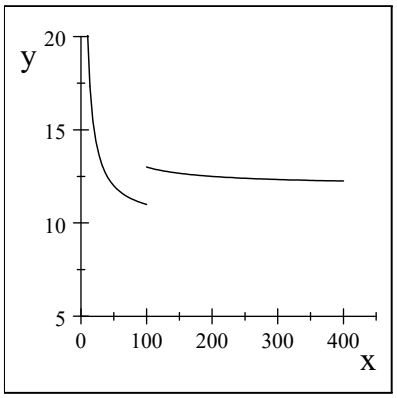


2. 1) L'insieme di definizione di C e' $(0,400]$. Il grafico di C e' $f(x)$



2) Poiche' C e' monotona strettamente crescente (come risulta dal grafico), si deduce che C e' iniettiva, e dunque esiste la funzione inversa C^{-1}. $C^{-1}(220)$ e' il valore di x tale che $C(x) = 220$, ovvero tale che $100+10x = 220$, cioe' $x = 12$ (l'equazione $100+12x = 220$ non ha soluzioni nell'intervallo $(100, 400]$). In termini economici, 12 e' la quantita' il cui costo di produzione e' uguale a 220. $C^{-1}(20)$ non esiste perche' $C(x) \neq 20$ per ogni $x > 0$ (per la precisione, $C(x) > 100$ per ogni $x > 0$), e dunque 20 non e' un elemento dell'insieme immagine di C.

3) $g(x) = \begin{cases} \frac{100}{x} + 10 & \text{per } x \in (0, 100] \\ \frac{100}{x} + 12 & \text{per } x \in (100, 400] \end{cases}$ e' una funzione strettamente decrescente in $(0, 100]$ (perche' $\frac{100}{x}$ e' strettamente decrescente e 10 e' costante) e strettamente decrescente in $(100, 400]$ (perche' $\frac{100}{x}$ e' strettamente decrescente e 12 e' costante). Dunque calcoliamo $g(100) = 11$ e $g(400) = 12.25$ e concludiamo che 100 e' il punto di minimo globale per g e $\min g = 11$. Il grafico di g e'$h(x)$



4) $C(x) - C(x-1) = \begin{cases} 10 & \text{se } 1 < x \leq 100 \\ 2x + 10 & \text{se } 100 < x \leq 101 \\ 12 & \text{se } 101 < x \leq 400 \end{cases}$

3. 1) Risulta che $f(1) = 1$, $f'(x) = e^{5(x-1)^2} \cdot 10(x-1)$, $f'(1) = 0$, $f''(x) = e^{5(x-1)^2} \cdot 10(x-1) \cdot 10(x-1) + e^{5(x-1)^2} \cdot 10 = e^{5(x-1)^2}\left(-200x + 100x^2 + 110\right)$, $f''(1) = 10$, quindi $P_2(x) = 1 + 5(x-1)^2$. Pertanto $e^{5(x-1)^2} = 1 + 5(x-1)^2 + R_2(x, 1)$ con $\lim_{x\to 1} \frac{R_2(x,1)}{(x-1)^2} = 0$.

   2)

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{5(x-1)^2} - 4 + 3\cos(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{1 + 5(x-1)^2 + R_2(x,1) - 4 + 3\cos(x-1)}{(x-1)^2}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{5\,(x-1)^2 - 3\,(1 - \cos(x-1)) + R_2(x,1)}{(x-1)^2} = 5 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 0 = \frac{7}{2}$$

4. 1) Si veda il teorema 8.1 nel libro di testo.

   2) Si consideri la seguente funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in (-\infty, 4] \\ 7 & \text{se } x \in (4, 7] \\ x & \text{se } x \in (7, +\infty) \end{cases}$. Questa funzione e' discontinua in $x_0 = 4$ (perche' $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x\to 4^+} f(x) = 7$, quindi $\lim_{x\to 4} f(x)$ non esiste e non puo' essere uguale a $f(4)$) e non derivabile in $x_1 = 7$ (perche' $f'_-(7) = 0 \neq f'_+(7) = 1$, quindi $f'(7)$ non esiste).

5. 1) Data $f(x) = -x^3$, il rapporto incrementale $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ è uguale a $\frac{(x_0+h)^3-x_0^3}{h} = h^2 + 3hx_0 + 3x_0^2$, non uguale a $\frac{-h^3+x_0^3}{h}$.

   2) L'affermazione e' errata in quanto l'enunciato del teorema di Fermat richiede che x_0 sia punto interno per il dominio di f, e la condizione $x_0 \in [a, b]$ permette che x_0 sia uguale ad a, oppure uguale a b, i quali non sono punti intermi per il dominio di f.

   3) L'affermazione e' errata in quanto un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice interno per un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se e solo se esiste un intorno di x_0 che e' sottoinsieme di A. In base alla condizione enunciata nel testo dell'esame, il punto $x_0 = 5$ e' punto interno per l'insieme $A = [1, 3]$, in quanto esiste un intorno di 5 che contiene infiniti punti di A: ad esempio si consideri $I(5) = (2, 8)$.

   4) L'affermazione e' errata. Per vedere perche', consideriamo la funzione $f(x) = x^3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la quale e' derivabile in $\mathbb{R}$ e monotona strettamente crescente in $\mathbb{R}$. Per questa funzione, $x_0 = 0$ e' tale che $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ ma f^{-1} (cioe' la funzione radice terza) non e' derivabile nel punto 0.