Matematica per le Applicazioni Economiche I
12 gennaio 2017
FILA A

La prova ha la durata di $\boxed{\text{due ore}}$. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1. (6 punti)

1. Si diano le definizioni di insieme aperto e di insieme chiuso.
2. Si stabilisca quali dei seguenti insiemi sono aperti, quali chiusi e quali né aperti né chiusi:

$$A = [0,1] \cup \{2\}, \quad B = (0,1) \cup \{2\}, \quad C = A \setminus B.$$

Esercizio 2. (8 punti)

Sia $a \in \mathbb{R}$ un parametro. Si consideri la funzione definita a tratti come segue:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{se } x \geq 0, \\ a - x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

1. Si stabilisca per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua.
2. Si tracci il grafico di f corrispondente al valore $a = 0$ e quello corrispondente al valore $a = 1$.
3. Si determini l'insieme $f^{-1}(\{1\})$ nel caso $a = 0$ e nel caso $a = 1$.

Esercizio 3. (8 punti)

1. Sia dia la definizione di
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$
2. Utilizzando la definizione del punto precedente, si dimostri che
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \log \left| x - \frac{1}{2} \right| = -\infty.$$
3. Si calcoli
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|1 - x| - x^2 + e^x}{|2e^x - \log x|}.$$

Esercizio 4. (12 punti)

Si studi
$$f(x) = \frac{x - 1}{\log(x - 1)},$$
e si disegni il suo grafico tralasciando lo studio della derivata seconda.

Esercizio 5. (6 punti)

Sia data la funzione
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt[5]{x^2}.$$

1. Si dia la definizione di funzione derivabile in un punto e si dica se f è derivabile in 0;
2. Si dia la definizione di retta tangente al grafico di una funzione in un punto e si calcoli l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto del grafico $(x_0, f(x_0))$ per il quale $f(x_0) = 1$ e $x_0 > 0$.

SOLUZIONE.

Esercizio 1.

1. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice aperto se ogni suo punto è un punto interno per l'insieme — cioè se

$$\forall x_0 \in A\ \exists r > 0 :\ I(x_0, r) \subseteq A,$$

dove $I(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$.

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice chiuso se il suo complementare A^c è aperto.

2. A è chiuso, B né chiuso né aperto. Infine notando che $C = \{0, 1\}$ si vede che esso è chiuso.

Esercizio 2.

1. Si ha

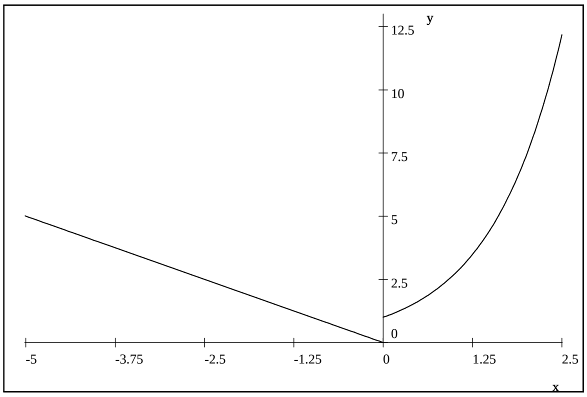
$$f(0) = e^0 = 1 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

e

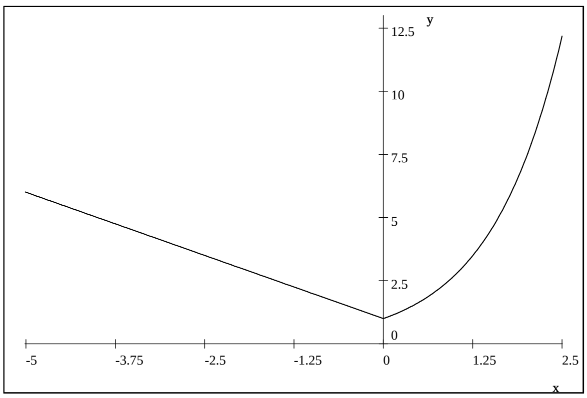
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (a - x) = a.$$

Dunque f è continua in $x_0 = 0$ (e quindi in tutto l'insieme di definizione, dato che $x_0 = 0$ è l'unico punto dell'insieme di definizione "critico" per la continuità) se e solo se $a = 1$.

2. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{if} \quad x < 0 \\ e^x & \text{if} \quad x \geq 0 \end{cases}$



$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{if} \quad x < 0 \\ e^x & \text{if} \quad x \geq 0 \end{cases}$



3. Si ha
$$f^{-1}(\{1\}) = \{0\} \;\text{ se } a = 1, \qquad f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 0\} \;\text{ se } a = 0.$$

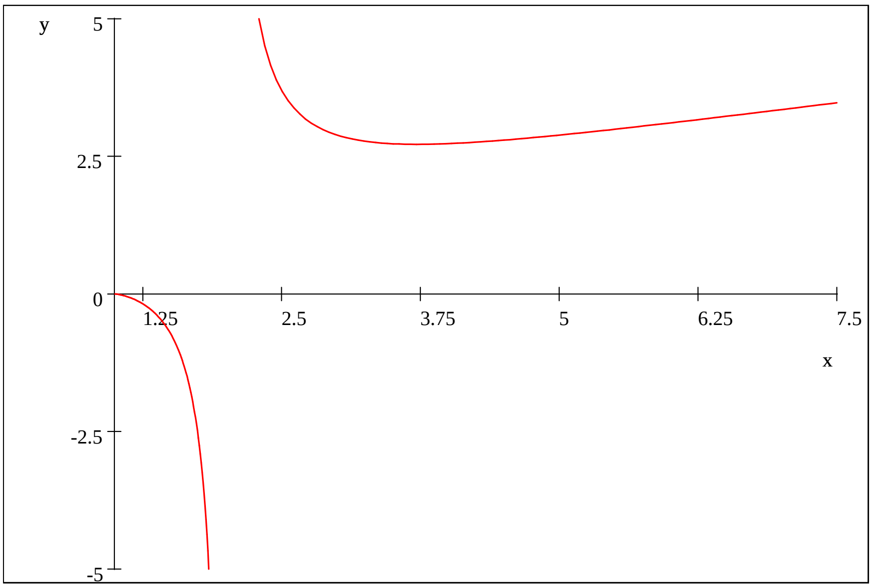
Esercizio 3.

1. Sia x_0 un punto di accumulazione per S, dominio di f. La definizione di
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$
è la seguente:
$$\forall A \in \mathbb{R}_{++} \;\; \exists \delta > 0 : \; x \in (I(x, \delta) \setminus \{x_0\}) \cap S \;\; \Rightarrow f(x) < -A,$$
o, equivalentemente,
$$\forall A \in \mathbb{R}_{++} \;\; \exists \delta > 0 : \; 0 < |x - x_0| < \delta \;\wedge\; x \in S \;\; \Rightarrow f(x) < -A.$$

2. Si noti che l'insieme di definizione di $\log\left|x - \frac{1}{2}\right|$ è $S = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, per cui $x = \frac{1}{2}$ è un punto di accumulazione per S. Occorre dimostrare che
$$\forall A \in \mathbb{R}_{++} \;\; \exists \delta > 0 : \; x \in \left(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta\right) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \;\Rightarrow\; \log\left|x - \frac{1}{2}\right| < -A.$$
Risolviamo la disequazione
$$\log\left|x - \frac{1}{2}\right| < -A.$$
Si ha
$$\log\left|x - \frac{1}{2}\right| < -A \iff \left|x - \frac{1}{2}\right| < e^{-A} \iff x \in \left(\frac{1}{2} - e^{-A}, \frac{1}{2} + e^{-A}\right).$$
Dunque la definizione è soddisfatta con $\delta = e^{-A}$.

3. Si ha
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|1 - x| - x^2 + e^x}{|2e^x - \log x|} = \text{“}\frac{(+\infty) - (+\infty) + (+\infty)}{|(+\infty) - (+\infty)|}\text{”}.$$
È una forma indeterminata. Per risolvere si può eliminare opportunamente il valore assoluto tenendo conto che $x \to +\infty$ per determinare il segno dei termini interni ad esso e poi dividere numeratore e denominatore per e^x:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|1 - x| - x^2 + e^x}{|2e^x - \log x|} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1 + x - x^2 + e^x}{2e^x - \log x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{-1 + x - x^2}{e^x} + 1}{2 - \frac{\log x}{e^x}} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 4.
$$f(x) = \frac{x - 1}{\log(x - 1)}$$



(i) Determinazione dell'insieme di definizione della funzione.

L'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo, ovvero deve risultare $x-1>0$, cioè $x>1$. Inoltre deve risultare $\log(x-1)\neq 0$, poiché l'espressione $\log(x-1)$ si trova al denominatore. Ciò accade se e solo se

$$x-1\neq 1 \iff x\neq 2.$$

Dunque l'insieme di definizione è $(1,+\infty)\setminus\{2\}$. La funzione da studiare è dunque

$$f:(1,+\infty)\setminus\{2\}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{x-1}{\log(x-1)}$$

(ii). Studio del segno della funzione e delle eventuali intercette con gli assi.

Il numeratore dell'espressione che definisce la funzione è strettamente positivo sul dominio. Dunque il segno di f coincide col segno di $\log(x-1)$. Risulta

$$\log(x-1)>0 \iff x-1>1 \iff x>2.$$

Ne consegue che $f>0$ in $(2,+\infty)$ e $f<0$ in $(1,2)$. Infine, f non si annulla in nessun punto del dominio.

(iii) Studio della continuità della funzione e individuazione degli eventuali punti di discountinuità e/o asintoti verticali.

La funzione è continua in tutti i punti del suo dominio. In $x=2$ si ha

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x-1}{\log(x-1)}=\frac{1}{0^-}=-\infty,\quad \lim_{x\to 2^+}\frac{x-1}{\log(x-1)}=\frac{1}{0^+}=+\infty.$$

Dunque in $x=2$ è presente un asintoto verticale. In $x=1$ si ha

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\log(x-1)}=\frac{0}{-\infty}=0.$$

(iv) Studio del comportamento a $+\infty$ e determinazione degli eventuali asintoti non verticali.

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\log(x-1)}=\text{``}\frac{+\infty}{+\infty}\text{''}.$$

Applicando il teorema di de l'Hopital, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\log(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x-1}}=+\infty;$$

Si può ottenere il precedente risultato anche con la sostituzione $y=x-1$ e usando la "gerarchia degli infiniti".

(v) Studio del segno della derivata prima (nel caso la funzione sia derivabile) e della monotonia della funzione.

Si ha

$$f'(x)=\frac{\log(x-1)-\frac{1}{x-1}(x-1)}{(\log(x-1))^2}=\frac{\log(x-1)-1}{(\log(x-1))^2}$$

Poichè

$$\log(x-1)-1>0\iff\log(x-1)>1\iff x-1>e\iff x>1+e$$

e

$$\log(x-1)-1<0\iff\log(x-1)<1\iff 0<x-1<e\iff 1<x<1+e$$

e

$$\log(x-1)-1=0\iff\log(x-1)=1\iff x-1=e\iff x=1+e,$$

si deduce che la funzione è (strettamente) decrescente nell'intervallo $(1,2)$ e nell'intervallo $(2,1+e]$; ha un punto di minimo in $1+e$, ed è (strettamente decrescente su $(1+e,+\infty)$. Il valore di minimo locale in $x=1+e$ è $f(1+e)=e$.

[scale=1]fig1.pdf

Esercizio 5.

1. Il calcolo del limite del rapporto incrementale in $x_0=0$ dà

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\sqrt[5]{h^2}}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{h^{\frac{2}{5}}}{h}=\lim_{h\to0^+}h^{-\frac{3}{5}}=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h^{\frac{3}{5}}}=+\infty.$$

   Dunque la funzione non è derivabile in $x_0=0$.

2. Se f è derivabile in x_0, allora l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0,f(x_0))$ è

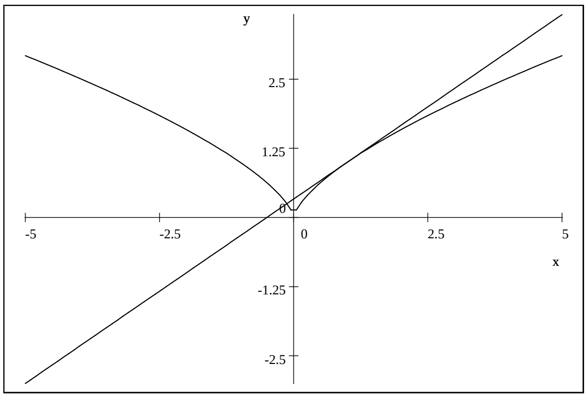
$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

   $f(x_0)=1$ equivale a $\sqrt[5]{x_0^2}=1$. L'equazione precedente ammette le radici $x_0=\pm1$. Poiché è richiesto che sia anche $x_0>0$, l'unico punto del grafico che soddifa la richiesta è $(x_0,f(x_0))=(1,1)$. Inoltre

$$f'(x)=\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}$$

   da cui si ricava $f'(1)=\frac{2}{5}$. Dunque l'equazione cercata è

$$y=1+\frac{2}{5}(x-1)=\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}.$$


y
2.5
1.25
0
-5
-2.5
0
2.5
5
x
-1.25
-2.5